

APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE MATRIZ A TRAVES DE PROBLEMAS APLICADOS A LA INGENIERIA

José Luis Ávila Luna, Ofelia Montelongo Aguilar, Lorena Jiménez Sandoval

Resumen

En este trabajo, se presentan los avances del proyecto de investigación que tiene como objetivo describir las construcciones y mecanismos mentales de los estudiantes de la carrera de ingeniería en mecatrónica de la UPZ (Universidad Politécnica de Zacatecas), respecto al concepto de matriz cuando se enfrenta a situaciones problemáticas aplicadas a la ingeniería en mecatrónica. El marco teórico que sustenta la investigación es la teoría APOE, la cual cuenta con un ciclo de investigación como metodología. Este ciclo consta de tres fases: análisis teórico del concepto, diseño e implementación de enseñanza y el análisis y verificación de los datos. Se presenta como avance de la investigación, la primera componente del ciclo de la teoría APOE, que da como resultado una descomposición genética preliminar del concepto de matriz.

Palabras Claves: matriz, APOE, ciclo de investigación, construcciones y mecanismos mentales, descomposición genética.

Introducción

En las ingenierías como en otras ramas afines a la matemática, los conceptos del álgebra lineal son relevantes debido a la gran diversidad de aplicaciones que los requieren, por ejemplo: el cálculo de corrientes o voltajes (diferencia de potencial) en un circuito eléctrico o para manipular las articulaciones de algún mecanismo robótico. Al menos un curso de Álgebra Lineal está presente en los planes de estudio de las carreras como Ingeniería en Mecatrónica. A pesar de que en la mayoría de los casos los cursos se ven desde su aspecto puramente algorítmico, los estudiantes tienen dificultades con la materia. Dorier y Sierpinska (2001) atribuyen estas dificultades a la naturaleza abstracta de los conceptos que se abordan en un curso tradicional de Álgebra Lineal.

Investigaciones como las presentadas en Dorier (2000) se han enfocado en detectar las “*fuentes de las dificultades*” de los estudiantes al abordar las nociones del álgebra lineal en el nivel superior. Otros estudios como los reportados en Oktaç y Trigueros (2010) consideran a la teoría APOE como una herramienta poderosa para estudiar cómo los estudiantes construyen los conceptos del álgebra lineal.

Nos centramos en el concepto de matriz, debido a la gran variedad de aplicaciones que tiene en la solución de problemas propios de la ingeniería, además de ser un concepto que no se ha abordado desde su aspecto cognitivo, y que a pesar de parecer sencillo, es conceptualmente difícil de comprender para un estudiante de ingeniería. Es por ello, que nuestro interés sea describir el desarrollo cognitivo del estudiante respecto al concepto de matriz, a través de la caracterización de las construcciones y mecanismos mentales que los

estudiantes llevan a cabo cuando aprenden dicho concepto, poniendo en marcha el ciclo de investigación de la teoría APOE.

Las preguntas de investigación que se pretenden responder son:

- ¿Cuáles son las construcciones y mecanismos mentales de los estudiantes de ingeniería en mecatrónica de la UPZ sobre el concepto de matriz?
- ¿Qué papel juega la modelación en la construcción del concepto de matriz?
- Para dar respuesta a estas preguntas se plantea el siguiente objetivo general y los objetivos particulares:
- **Objetivo general:**
- Caracterizar las construcciones y mecanismos mentales que desarrollan los estudiantes de ingeniería en mecatrónica de la UPZ sobre el concepto de matriz al resolver situaciones problemáticas que involucran aplicaciones de dicho concepto.
- **Objetivos particulares:**
- Diseñar una descomposición genética del concepto de matriz, a partir de un diseño preliminar elaborado por el grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community).
- Elaborar e implementar un diseño de enseñanza.
- Diseñar y aplicar instrumentos que permitan analizar las construcciones y mecanismos mentales de los estudiantes de ingeniería en mecatrónica de la UPZ respecto al concepto de matriz haciendo énfasis en problemas de modelación.
- Recolectar y analizar los datos obtenidos de la aplicación de los instrumentos diseñados y de ser necesario refinar la descomposición genética.
- Proporcionar sugerencias didácticas que permita mejorar el aprendizaje del concepto.

Marco teórico-metodológico

Se considera como marco teórico a la teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema), ya que ha mostrado ser una herramienta poderosa que permite describir cómo se construye el conocimiento matemático en el nivel superior (Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros, & Weller, 2014).

Dicha teoría está sustentada en las ideas de Piaget relacionadas con la abstracción reflexiva, que en un primer momento Dubinsky y posteriormente el grupo RUMEC transponen esta idea al contexto de las matemáticas de nivel superior para describir el desarrollo cognitivo del estudiante. La abstracción reflexiva es considerada como un proceso que permite al individuo, a partir de las acciones sobre los objetos, inferir sus propiedades o las relaciones entre objetos en un cierto nivel de pensamiento. (Dubinsky, 1991 a), 1991 b)). Dubinsky usa la abstracción reflexiva para describir cómo un individuo logra ciertas construcciones mentales sobre un concepto determinado, al enfrentarlo a situaciones problemáticas. La teoría considera el conocimiento matemático de un individuo como:

Su “tendencia” a responder a ciertas situaciones matemáticas problemáticas en un contexto social, construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos y organizándolas en esquemas con el fin de manejar las situaciones y resolver los problemas (Dubinsky y McDonald, 2001, p.276).

Para la teoría APOE la construcción de un concepto matemático pasa por tres etapas básicas: acción, proceso y objeto; el mecanismo que permite pasar de una etapa de construcción de conocimiento a otra, es la abstracción reflexiva. De este modo, la construcción del conocimiento matemático se realiza a través de distintas abstracciones sucesivas hasta llegar a construir de manera coherente un esquema asociado a un concepto matemático.

La construcción del concepto matemático en estudio, comienza con la realización de una acción sobre un objeto que fue previamente construido por el individuo. La acción se interioriza por medio de la repetición reflexiva y guiada en un proceso, en el cual la transformación es controlada de forma consciente por el individuo. Nuevos procesos se pueden construir mediante los mecanismos de coordinación y reversión. El proceso es encapsulado en un objeto a través de la aplicación de acciones u otros procesos acompañada de una reflexión sobre él. Los esquemas son una colección coherente de acciones, procesos, objetos y otros esquemas relacionado con el concepto, así como de las relaciones entre sus elementos. Estos esquemas son dinámicos y van evolucionando a través de las etapas de desarrollo llamadas inter, intra y trans. Los esquemas se pueden tematizar en objetos. La figura 1 muestra las relaciones entre las construcciones y mecanismos mentales que explica la teoría.

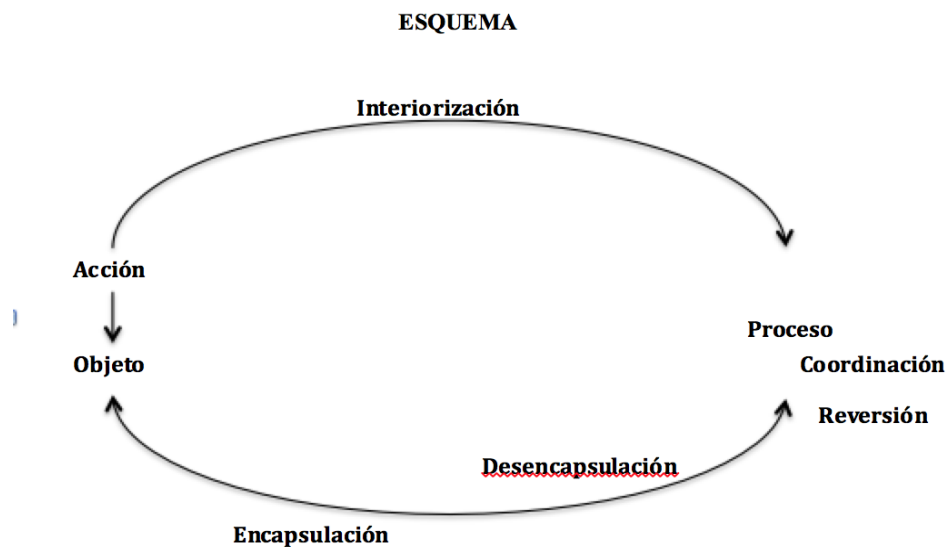


Figura1. Construcciones y mecanismos mentales para la construcción de conocimiento matemático (Arnon et al., 2014, p. 18)

Metodología

La teoría APOE propone un ciclo de investigación (Arnon et al., 2014) como metodología el cual guía la investigación, este nos permitirá alcanzar cada uno de los objetivos que se plantearon y así dar respuesta a las preguntas de investigación.

El ciclo de investigación de la teoría APOE consta de tres fases que se describen en detalle a continuación (ver figura 2):

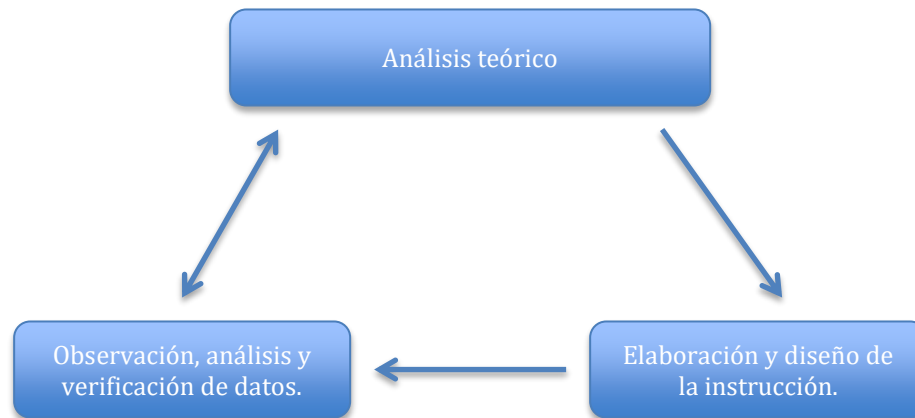


Figura 2. Ciclo de investigación (Asiala et al., 1996)

Fase 1: Análisis Teórico. Se elabora un análisis teórico tomando algunos de los elementos descritos por Roa y Oktaç (2010), tales como el análisis de los libros que se utilizan como textos básicos en los cursos de Álgebra Lineal de la carrera de Ingeniería en mecatrónica, con el objetivo de conocer los conceptos previos requeridos para la construcción del concepto de matriz, así como las investigaciones que han abordado esta temática desde la teoría APOE, esto permitirá determinar las construcciones previas requeridas para la construcción del concepto en estudio. El resultado final de este análisis es una descomposición genética del concepto de matriz, en la que se describen las construcciones y mecanismos mentales que pueden ayudar al estudiante en la comprensión del concepto matemático en estudio.

Fase 2: Elaboración y diseño de la instrucción. Se elabora un diseño instruccional sustentado en el análisis teórico elaborado en la primera fase del ciclo, y se pondrá en marcha mediante el ciclo de enseñanza ACE de la teoría APOE (Asiala et al., 1996), el cual consiste de tres componentes: (A) actividades en grupos colaborativos, (C) discusiones en clases y (E) ejercicios. Esta propuesta pedagógica tiene como objetivo principal facilitar al estudiante la construcción de las estructuras mentales propuestas en la descomposición genética.

Fase 3: La recolección y análisis de los datos. La recolección de los datos se llevará a cabo mediante un cuestionario escrito y una entrevista semiestructurada. El análisis se realizará bajo la lente de la descomposición genética, poniendo el foco de atención en determinar si las construcciones mentales propuestas en la descomposición genética son o no realizadas por los estudiantes.

Fase 1 del ciclo de investigación

Mediante la teoría APOE el desarrollo cognitivo del estudiante se puede describir al poner en marcha su ciclo de investigación, el cual por lo general comienza con el diseño del análisis teórico, en él se describen las construcciones y los mecanismos mentales que

requiere un estudiante para la construcción de un concepto matemático, el resultado final del análisis teórico proporciona una descomposición genética (DG) del concepto. Así, una descomposición genética es un modelo hipotético que describe las estructuras y los mecanismos mentales que un estudiante puede requerir para la construcción de un concepto matemático (Arnon et al., 2014).

El diseño de una descomposición genética se puede basar en la comprensión matemática del concepto, la experiencia con la que cuenta el investigador ya sea como aprendiz o enseñante del concepto. También, se pueden tomar en cuenta otros elementos como: el análisis de textos, los resultados de estudios previos, las investigaciones previas sobre el pensamiento que tienen los estudiantes del concepto, por ejemplo las dificultades de estos con el concepto, las perspectivas teóricas del desarrollo del concepto y/o los materiales de instrucción (Arnon et al., 2014).

Una vez elaborada una descomposición genética hasta que no sea probada experimentalmente es considerada preliminar. Es importante aclarar que distintos estudiantes pueden seguir caminos diferentes para construir el concepto, esto llevaría a tener más de una descomposición genética. Cada una de ellas puede ser validada en base a los datos que se obtengan de la aplicación y análisis de instrumentos que permitan observar las construcciones y mecanismos que desarrollan los estudiantes sobre el concepto. Puede ocurrir que los datos muestren evidencia de construcciones o mecanismos que no fueron considerados en la descomposición genética preliminar lo cual llevaría a refinarla, y mediante la aplicación sucesiva del ciclo de investigación de la teoría APOE tener una descomposición genética más acabada (Asiala et al., 1996), de modo que dé cuenta de una mejor manera, de lo que se observa que realizan los estudiantes cuando construyen el concepto.

Para nuestra investigación, se modificó y amplió una descomposición genética preliminar del concepto de matriz, diseñada por el grupo RUMEC, para elaborar las actividades propuestas en el libro de texto *Learning Linear Algebra with ISETL* (Weller et al., 2002). En la descomposición genética se considera que el estudiante debe contar con la construcción previa de esquema de secuencia, el cual contiene al menos al objeto secuencia considerada como una lista de elementos y el objeto secuencia como una función definida entre los naturales y los reales

Se propone que el concepto de matriz como objeto puede ser construido por el estudiante encapsulando el proceso de matriz, obtenido de la coordinación de los procesos:

1. Considerar a una secuencia como una función definida entre el conjunto de los números naturales y los reales.
2. Usando el esquema de secuencia se construye el concepto de una secuencia de secuencias, dado que cada elemento del conjunto de matrices de $m \times n$ es una secuencia vertical de longitud m de secuencias alineadas horizontalmente de longitud n .
3. De igual manera que en 2, cada elemento del conjunto de matrices de $m \times n$ es una secuencia horizontal de longitud n de secuencias alineadas verticalmente de longitud m .

Para la encapsulación del proceso matriz en un objeto, el estudiante debe ser capaz de construir nuevos objetos matriz mediante acciones que pueden ser por ejemplo, sumar, multiplicar matricialmente y/o multiplicar por escalar otras matrices; verlas como

elementos del espacio vectorial de las matrices de $m \times n$ o tomar una matriz y reducirla a su forma escalonada.

Reflexiones

El diseño de una descomposición genética es fundamental en la teoría APOE, ya que está es necesaria para el desarrollo de las demás fases del ciclo de investigación, pero también es la más difícil de elaborar, por ello se presenta solo un avance de dicha descomposición genética.

Actualmente, se está trabajando en la descripción detallada de las construcciones previas que necesita el estudiante para lograr con éxito la comprensión del concepto de matriz, pues a pesar de tener en claro que el estudiante requiere contar con la estructura de esquema de secuencia, hace falta especificar y justificar mediante la teoría los elementos mínimos que componen al esquema y las relaciones entre estos. Por otra parte, se requiere delinear cómo lograr que los estudiantes desarrollen los mecanismos propuestos en la descomposición genética, por ejemplo: la coordinación de procesos.

Referencias

- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. DOI 10.1007/978-1-4614-7966-6. New York: Springer.
- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. En J. Kaput, Shoenfeld, A. y Dubinsky, E. (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education (Vol. II)*, pp. 1-32). U.S.A.: American Mathematical Society.
- Dorier, J. (2000). Epistemological Analysis of the Genesis of the Theory of Vector Spaces. En Dorier, J. (Eds.), *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 3-81). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Dorier, J. & Sierpinska, A. (2001). Research into the Teaching and Learning of Linear Algebra. En Holton, D. (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 255-273). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Dubinsky, E. (1991 a). Reflexive Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En Tall, D. (Eds.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-126). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Dubinsky, E. (1991b). The constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. En Steffe, L. (Eds.) *Epistemological Foundations of Mathematical Experiences* (pp. 160-220). New York: Springer-Verlag.
- Dubinsky, E. & McDonald, M. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. En Holton, D. (Eds.). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study (Vol. 7)*, pp. 273-280). Kluwer Academic Publishers.

Roa, S. & Oktac, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), 89-112.

Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Trigueros, M., Arnon, I. & Dubinsky, E. (2002). Learning Linear Algebra with ISETL. Obtenido de <http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/datastore/linear-alg/LLAWI-P3.pdf>

Autores

José Luis Ávila Luna; UAZ. México; joseluis.avilaluna@hotmail.com

Ofelia Montelongo Aguilar; UAZ. México; omontelo@mate.reduaz.mx

Lorena Jiménez Sandoval; UAZ. México; lorejim79@hotmail.com