

CONCEPCIONES SOBRE EL INFINITO DE UN GRUPO DE ESTUDIANTES DE CUARTO MEDIO: EVIDENCIAS DEL OBSTÁCULO EPISTEMOLÓGICO A TRAVÉS DE UN ANÁLISIS DIDÁCTICO

Francisca A. Álvarez Toledo, Astrid Morales Soto
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Resumen: ¿Qué piensan los alumnos sobre el infinito en su última etapa de formación escolar? ¿Son capaces de resolver situaciones matemáticas que involucran este objeto? En este trabajo, se indaga en las concepciones sobre el infinito de un grupo de estudiantes de cuarto medio, usando el análisis didáctico como herramienta metodológica, con el objeto de evidenciar el obstáculo mismo, cuyas raíces se pueden pesquisar en la historia de la construcción de este objeto, con dificultades y errores similares a los documentados y evidenciados en las aulas actuales. Se presenta una actividad que enfrenta a los estudiantes a sus concepciones y limitaciones del objeto que han construido, con el fin de realizar un análisis y concluir sobre las evidencias del obstáculo epistemológico y proyecciones de esta investigación.

Infinito, infinito actual, obstáculo epistemológico, dificultades

INTRODUCCIÓN

El infinito está inmerso en la construcción de gran variedad de conceptos matemáticos, siendo objeto de estudio de matemáticos, didactas, filósofos y profesores. Entre las investigaciones se ha concluido que los obstáculos asociados a su estudio son tanto didácticos como epistemológicos. Entre los didácticos está la poca consideración en el currículum o la reducción banal de lo infinito como extensión de lo finito (Arrigo y D'Amore, 1996). Más aún, el currículum escolar chileno no ofrece ningún proceso de formalización del infinito, como concepto ni noción (Cáceres, 2012), menos aún el desarrollo de competencias fundamentales sobre conjuntos infinitos (Arrigo y D'Amore, 2004) y, por lo tanto, su comprensión se ve limitada por las capacidades y competencias desarrolladas por los estudiantes en torno a otros objetos matemáticos. Sin embargo, investigadores han señalado que el obstáculo epistemológico está por sobre los didácticos, pesquiéndose en la historia misma del infinito, con dificultades y errores que se ven hoy mismo en las aulas (Mena et al., 2015), como la no distinción de diferentes tipos de infinito, razonar de manera finita en situaciones que involucran conjuntos infinitos o la comprensión del infinito solo en potencia.

En consecuencia, ¿cuáles son las concepciones que tienen los alumnos sobre el infinito y cómo este conocimiento es usado para resolver una situación que involucra el infinito actual?

A partir de esta problemática, surge como objetivo de investigación evidenciar el infinito como obstáculo epistemológico a través de las concepciones de un grupo de alumnos de cuarto medio.

MARCOS DE REFERENCIA

La teoría de situaciones didácticas (TSD), plantea que “[el] alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios (...)” (Brousseau, 2007, p.30). En este sentido, se espera que el profesor proponga situaciones matemáticas y problemáticas que permitan al alumno interactuar y desarrollar un nuevo saber, por tanto, la clase propuesta e implementada ha sido diseñada considerando las cuatro fases de esta teoría.

Brousseau señala que un obstáculo es un conocimiento que utiliza el alumno para dar respuesta a situaciones, el cual funciona de manera correcta en ciertos escenarios, pero en otros de manera limitada o errónea. A pesar de las contradicciones y errores evidentes, el alumno resiste en su uso.

Se reconocen tres tipos de obstáculos: ontogenéticos, didácticos y epistemológicos, siendo este último aquellas concepciones destacables en un número significativo de alumnos y que se pueden relacionar con concepciones históricas.

METODOLOGÍA

El Análisis Didáctico es una metodología de investigación, propia de la Didáctica de la Matemática, que busca fundamentar, dirigir y sistematizar la planificación y puesta en práctica de procesos de enseñanza y aprendizaje. Bajo esta metodología se estructura la investigación mediante la organización de las etapas de análisis. Rico (2013) señala cinco etapas: conceptual, contenidos, cognitivo, instrucción y actuación.

El contexto donde se lleva a cabo la investigación en su etapa de instrucción corresponde al plan matemático del cuarto medio del colegio Seminario San Rafael de Valparaíso; colegio católico, particular y de formación científico humanista. El grupo lo componen 20 alumnos (4 mujeres y 16 hombres), con edades entre los 17 y 18 años.

RESULTADOS Y DESARROLLO DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO

Análisis Conceptual

Primera etapa del análisis didáctico que corresponde a una herramienta metodológica, no empírica; que permite la reflexión de los conceptos y nociones básicas sobre el conocimiento, desde sus fundamentos e historia.

Para abordar esta investigación se ha desarrollado un análisis histórico y epistemológico, señalando la construcción del infinito como noción y concepto desde los Jainas hasta el siglo XIX, con el desarrollo de la teoría de números transfinitos de Cantor.

Análisis de Contenidos

A partir de los antecedentes expuestos, se identifican en primer lugar, la definición de infinito potencial y actual, desde la filosofía y, por otro lado, la matematización del infinito actual desde la teoría de Cantor, desde la cual deriva la definición moderna de conjunto infinito: *un conjunto es transfinito (o infinito) si es biyectivo a un subconjunto propio de sí mismo. De lo contrario es finito.*

Por otra parte, no se encontraron evidencias de la definición de infinito en los textos escolares. Sin embargo, es posible identificar usos de este objeto en diferentes registros de

representación. Existen diferencias entre el concepto de infinito que es tratado en textos escolares y el que es abordado en la matemática; tampoco existen en ellos evidencias de la definición moderna de conjunto infinito y éste suele abordarse desde ideas intuitivas, más cercanas al infinito potencial.

Análisis Cognitivo

En primer lugar, se señalan las expectativas de aprendizaje en torno al infinito presente en el currículum escolar chileno. En segundo lugar, se señalan las dificultades de aprendizaje y los errores documentados y/o evidenciados en la propia práctica. Finalmente se presentan tareas, mediante las cuales se busca retar al alumno a dar respuesta a situaciones, con el fin de lograr aprendizajes o enfrentarlo a sus concepciones buscando la superación de errores.

Las principales dificultades asociadas al infinito son: (D.1) Dificultad para concebir el infinito actual. (D.2) Dificultad para reconocer, distinguir y comprender distintos tipos de infinito. (D.3) Dificultad para movilizar y aplicar conocimientos de biyección.

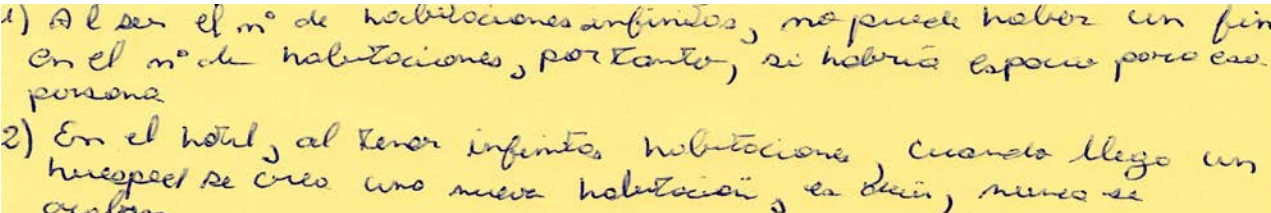
Análisis de Instrucción

A partir de las etapas previas del análisis didáctico, se diseñan dos situaciones didácticas, en sus 4 fases. La actividad propuesta a los estudiantes se lleva a cabo con la presentación de un video, cuyo caso corresponde al Hotel Infinito de Hilbert, el cual consta de infinitas habitaciones, todas éstas ocupadas. En la primera situación, se plantea a los estudiantes la pregunta *¿cómo alojas al nuevo huésped?* En la segunda situación, *¿cómo lograrán esta vez alojar a infinitos turistas?* Finalizando con un cuestionario de 6 preguntas, con el objeto de levantar evidencias de acuerdo al objetivo de investigación.

Análisis de Actuación

En base a las respuestas obtenidas por parte de los estudiantes en cada una de las situaciones planteadas y el cuestionario, se identifican errores, para posteriormente categorizarlos de acuerdo a las dificultades expuestas en el análisis cognitivo.

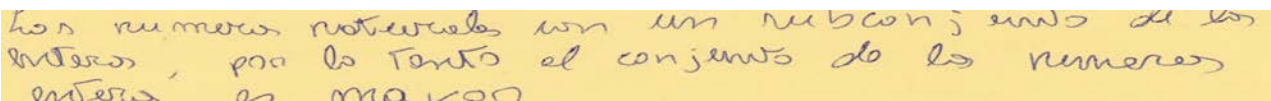
Se evidencia la dificultad para aceptar el infinito en acto. Más aún, 6 de los 20 alumnos muestran una concepción potencial del infinito.



1) Al ser el n° de habitaciones infinitas, no puede haber un fin en el n° de habitaciones, por tanto, si habría espacio para esa persona.
2) En el hotel, al tener infinitas habitaciones, cuando llega un huésped se crea una nueva habitación, es decir, nunca se acaban.

Figura 1: Respuesta del estudiante 1 para la primera situación del Hotel de Hilbert.

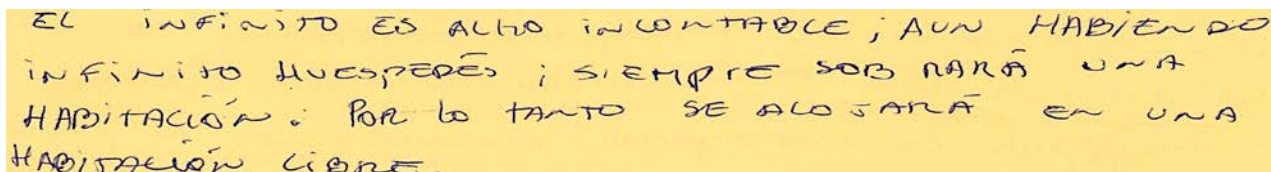
Al preguntar si existen más números naturales o enteros, 11 de 20 alumnos responden indicando que el conjunto de los enteros es más grande, argumentando que \mathbb{N} es un subconjunto de \mathbb{Z} .



Los números naturales son un subconjunto de los enteros, por lo tanto el conjunto de los números enteros es mayor.

Figura 2: Respuesta del estudiante 2 a la pregunta “¿Hay más números naturales o enteros?”.

Cabe destacar, que la mayor cantidad de errores están relacionados a (D.3), lo que motiva el diseño de una propuesta didáctica donde los alumnos apliquen el concepto de biyectividad para la comparación entre conjuntos infinitos. Además, en las respuestas de los estudiantes se evidenciaron similitudes con las concepciones sobre el infinito a lo largo de la historia. Aristóteles, por ejemplo, declaró de manera tajante que el *infinito es de una naturaleza tal que el acto pueda jamás realizarse*, es decir, afirmó que el infinito en acto no se puede concebir, situación que se repite en el aula.



EL INFINITO ES ALGO INCONTABLE; AUN HABIENDO INFINITO HUESPEROS; SIEMPRE SOB RARÁ UNA HABITACIÓN. POR LO TANTO SE ALOJARÁ EN UNA HABITACIÓN LIBRE.

Figura 3: Respuesta del estudiante 3 para la primera situación del Hotel de Hilbert.

Finalmente, a partir del análisis realizado sobre la implementación y las evidencias encontradas, se propone una reformulación para el plan de clase, cuya fase de institucionalización esté centrada en la definición matemática de igualdad de cardinales entre dos conjuntos finitos o infinitos, trabajando el concepto de función biyectiva.

CONCLUSIONES Y COMENTARIOS FINALES

En coherencia con lo documentado en la literatura, las evidencias encontradas dan cuenta que el infinito es un obstáculo epistemológico, cumpliéndose así el objetivo general de esta investigación.

Por otro lado, durante la formación escolar, se prescinde de la noción de infinito actual, menos aún existen intenciones de formalizarlo. Por tanto, las ideas intuitivas de los estudiantes no generan mayores contradicciones en esta etapa. Investigadores agregan que el infinito no es abordado, puesto que los mismos profesores hacen uso de ideas intuitivas, enfrentándose a sus propias limitaciones y contradicciones.

Desde el punto de vista didáctico, el obstáculo debe ser tratado desde la matemática, por tanto, la identificación de la dificultad (D.3) como predominante motiva el trabajo en situaciones orientadas a la movilización y aplicación del concepto de biyección, fundamentado en el rol clave de esta noción en la construcción de la teoría de números transfinitos realizada por Cantor.

Finalmente, se proyecta la implementación de la reformulación, en la que se sugiere su aplicación en un contexto diferente, y el estudio de las concepciones que tienen profesores de matemáticas en formación y ejercicio, con el objeto de generar mayores evidencias en torno a la problemática de la investigación. Conjuntamente, se proyecta el diseño de una actividad orientada a la comparación de distintos tipos de infinitos.

Referencias

Arrigo, G. & D'Amore, B. (1996) Lo veo pero no lo creo: Obstáculos epistemológicos y didácticos para la comprensión de un teorema de Cantor que involucre el infinito actual. México: *Educación Matemática*. 11(1), 5-24.

- Arrigo, G. & D'Amore, B. (2004) Otros hallazgos sobre los obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor. México: *Educación Matemática*. 16(2), 5-19.
- Brousseau, G. (2007) *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.
- Cáceres, P. (2012) *El infinito: Fundamentos e ideas para su resignificación en a educación matemática según la socioepistemología* (Tesis no publicada), PUCV, Chile.
- Lestón, P. (2008) *Ideas previas a la construcción del infinito en escenarios no escolares* (Tesis de maestría no publicada) Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, D.F. México.
- Lestón, P. (2011) *El infinito en el aula de matemática. Un estudio de sus representaciones sociales desde la socioepistemología*. (Tesis doctoral no publicada) Cinvestav, IPN, D.F. México.
- Mena, A., Mena, J., Montoya, E., Morales, A. & Parraguez, M. (2015) El obstáculo epistemológico del infinito actual: Persistencia, resistencia y categorías de análisis. *RELIME*. (18)3, 329-358.
- Rico, L. (2013) El método del análisis didáctico. *Revista Iberoamericana de educación matemática*. (33)11-27.