

## Pruebas de hipótesis en Educación Matemática

M.Sc Jorge Monge Fallas<sup>1</sup>

### Resumen

La idea en esta comunicación es presentar parte del análisis de los resultados de un trabajo de investigación. Este trabajo fue enfocado a determinar la comprensión de conceptos en la enseñanza del tema de derivada en un curso de cálculo diferencial e integral. La idea era discriminar si había diferencias en grupos donde se realizó la intervención a través de la visualización del conocimiento y los grupos donde no se llevó a cabo la intervención.

Como fueron varios grupos los que participaron en el proyecto, se hicieron en la mayoría de los casos pruebas paramétricas como comparación de medias, ANOVA de un factor y pruebas post hoc en los casos que fue necesario. Además se realizaron las pruebas previas de normalidad y de homogeneidad de la varianzas para definir si se utilizaban pruebas paramétricas o pruebas no paramétricas.

**Palabras clave:** pruebas de hipótesis, pruebas paramétricas, ANOVA, enseñanza de la derivada.

**Modalidad:** Ponencia.

### Introducción

Esta comunicación presenta una parte muy puntual de mi trabajo doctoral. En este trabajo se realiza una intervención a través de la visualización del conocimiento en un grupo de cálculo diferencial, se plantearon varios objetivos y se desarrollaron algunos instrumentos de evaluación. Además se trabajó con grupos control y con grupos experimentales, en particular se trabajaron dos grupos control y dos grupos experimentales, estos grupos fueron impartidos por dos profesores. En esta comunicación trabajaremos únicamente en una de las variables de enseñanza.

#### Objetivo General

Analizar la influencia de la intervención de la Visualización del Conocimiento como estrategia metodológica para incorporar la tecnología en la enseñanza-aprendizaje del tema de derivada de funciones reales de variable real en un curso de Cálculo Diferencial.

#### Objetivos Específicos(único objetivo tratado en esta comunicación)

El objetivo específico que se define para lograr el objetivo general son los siguientes:

- Investigar la influencia de la intervención de la Visualización del Conocimiento como estrategia metodológica en la comprensión de conceptos del tema de derivadas de funciones reales en variable real.

#### Delimitación del problema de estudio

La investigación se realizó a nivel universitario por la experiencia y conocimiento sobre la temática en los cursos que se ofrecen a este nivel. En particular los cursos de matemática que la

---

<sup>1</sup> Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica. [jomonge@itcr.ac.cr](mailto:jomonge@itcr.ac.cr)

Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica (ITCR) ofrece a las carreras de ingeniería.

El estudio se realizó en el Instituto Tecnológico de Costa Rica por razones netamente laborales y la dificultad de desplazamiento hacia otros centros educativos, además de las comodidades que este centro ofrece en cuanto al espacio y recursos tecnológicos.

Se eligió el curso de Cálculo Diferencia e Integral por razones de contenido. El curso se caracteriza por los contenidos tradicionales de un curso de cálculo diferencial e integral, como son los temas de límites, derivadas e integrales. En este curso el apoyo visual se ha considerado muy importante, es decir se puede aprovechar mucho mejor el uso de representaciones visuales.

Se decidió trabajar sobre el tema particular de derivada debido a que es un tema de interés tanto en la parte conceptual como algorítmica, además sus aplicaciones son variadas y muy ricas en su contexto. Por otro lado la relación del tema con el aspecto gráfico es muy fuerte, por lo que se consideró un escenario adecuado para llevar a cabo la intervención.

Por lo extenso de la temática se consideró prudente desarrollar bajo este enfoque lo que correspondía a cuatro semanas. Estas cuatro semanas se desarrollaría la temática utilizando tecnología bajo el enfoque de visualización del conocimiento.

#### Variables de enseñanza e instrumentos didácticos

Las variables de enseñanza que se decidieron utilizar se describen en seguida:

Variable independiente: Visualización del conocimiento. Cuando nos referimos a visualización del conocimiento implica la utilización de componentes del marco general de visualización del conocimiento en la enseñanza de la matemática. La visualización del conocimiento será operatizada a través del marco general de visualización que se utilizaron, como se muestra a continuación.

Variable independiente	Operativización
Visualización del Conocimiento	Imágenes
	Visualización Interactiva
	Simulaciones
	Animaciones

Variable dependiente: Aprendizaje de conceptos del cálculo diferencial e integral. Cuando nos referimos a aprendizaje de conceptos del cálculo diferencial e integral queremos decir explícitamente el dominio y noción de los conceptos de derivada de funciones en una variable.

Para evaluar el aprendizaje o comprensión del concepto de derivada se definieron cuatro sub-variables que definimos a continuación:

Variable dependiente	Sub-variables
Aprendizaje del concepto de derivada	Comprensión de la derivada como razón de cambio, su relación con la monotonía y concavidad de la gráfica de una función(COD)

	Manejo de la perspectiva analítica de la derivada(PAD)
	Comprensión del concepto de diferencial(CODI)
	Manejo de la perspectiva analítica de la diferencial(PADI)

Variable dependiente: Ambiente de aprendizaje en el aula. Cuando nos referimos a ambiente de aprendizaje en el aula queremos decir explícitamente la percepción que tiene los estudiantes sobre las actividades realizadas en clase.

Variable dependiente: Rendimiento académico. Cuando nos referimos a rendimiento académico nos referimos a la nota obtenida por el estudiante en la prueba sobre el tema de deriva como en las pruebas parciales realizadas ordinariamente en el curso.

En este caso particular trabajaremos únicamente sobre la variable COD y solo dos de los contrastes propuestos.

### Comprensión del concepto de derivada

Dentro de este apartado se consideraron dos aspectos fundamentales en la comprensión del concepto de derivada, el manejo del concepto propiamente y el manejo de la perspectiva analítica de la derivada.

Para realizar estos análisis fue necesario verificar varios supuesto, uno de ellos el de homogeneidad o aleatoriedad, para ello consideramos las notas de los estudiantes participantes en el curso previo de Cálculo Diferencial e Integral, en este caso corresponde al curso de Matemática General. Al inicio de este capítulo se verificó que no hay diferencia en entre los grupos en cuanto a su rendimiento en el curso previo al de Cálculo Diferencial e Integral

En la mayoría de los casos, los contrastes que se realizaron fueron contrastes de pruebas para dos muestras independientes y para cada una de ellas se utilizó un nivel de significancia del 5% .

Se realizaron dos contrastes con los cinco grupos involucrados a través de un ANOVA de un factor y en los casos necesarios se realizó una prueba POSHOC.

El siguiente cuadro muestra en forma explícita los contrastes que se realizaron y las variables involucradas

Tabla 1

### Contrastes propuestos para las variables COD

N	Grupos para el contraste	Variable
1	Profesor_1_Control vs Profesor_1_Experimental	COD
3	Profesor_2_Control vs Profesor_2_Experimental	COD
9	Todos los grupos	COD

EL uso de pruebas paramétricas y no paramétricas para realizar los contrastes dependen de la distribución de las variables involucradas, sea esta normal o no. Seguidamente se presenta en forma resumida el análisis de normalidad de cada una de las variables implicadas ( Tabla 2 ).

Tabla 2

Resumen de prueba de normalidad para los grupos involucrados

Grupo	Variable	Valor de la prueba de Kolmogorov-Smirnov	Total de casos válidos
Profesor_1_Control	COD	,307	26
Profesor_1_Experimental	COD	,813	23
Profesor_2_Control	COD	,918	23
Profesor_2_Experimental	COD	,456	35

De acuerdo con los niveles de significancia de la prueba establecidos (5%) y los valores obtenidos en la prueba de normalidad de Kolmogorov-Smirnov en cada una de las pruebas. Todas son claramente superiores al nivel de significancia. Por tanto se concluyó que la distribución de la variable COD sigue una distribución normal en cada uno de los grupos, en consecuencia utilizamos pruebas paramétricas para realizar los contrastes.

Estadísticamente estos son algunos de los contrastes propuestos:

**Contraste  $N^{\circ}$  1:** Profesor\_1\_Control vs Profesor\_1\_Experimental:

**Variable:** COD

$H_0 : \mu_C = \mu_E$  : La comprensión del concepto de derivada como razón de cambio... por parte de los estudiantes es igual en el grupo control como el experimental del profesor\_1

$H_1 : \mu_C \neq \mu_E$  : La comprensión del concepto de derivada como razón de cambio... por parte de los estudiantes no es igual en el grupo control como el experimental del profesor\_1

Para la prueba de homogeneidad de las varianzas se utilizó la prueba de Levene y para la igualdad de las medias la prueba T para dos muestras independientes y la decisión se toma según la presunción de varianzas iguales o no. La tabla resume los resultados de las pruebas:

Tabla 3

Resumen de prueba de prueba de Levene y prueba t para las variables COD

Variable	Prueba de Levene para la igualdad de varianzas	Prueba t para la igualdad de medias
COD	Se han asumido varianzas iguales	,011
Concepto de derivada	No se han asumido varianzas iguales	,002

De acuerdo a los valores obtenidos en la tabla para la variable COD tenemos un valor de la prueba T de 0.002 inferior a nuestro nivel de significancia ( $\alpha = 0.05$ ) planteado por lo que existe evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula, por lo que se concluye que la comprensión del concepto de derivada como razón de cambio... por parte de los estudiantes no es igual en el grupo control y en el experimental del profesor\_1.

**Contraste  $N^{\circ} 2$ :** Profesor\_2\_Control vs Profesor\_2\_Experimental:

**Variable:** COD

$H_0 : \mu_C = \mu_E$  : La comprensión del concepto de derivada como razón de cambio... por parte de los estudiantes es igual en el grupo control como el experimental del profesor\_2

$H_1 : \mu_C \neq \mu_E$  : La comprensión del concepto de derivada como razón de cambio... por parte de los estudiantes no es igual en el grupo control como el experimental del profesor\_2

En estos contrastes utilizamos la mismas pruebas de homogeneidad de las varianzas y la prueba T, la siguiente tabla resume los resultados de las pruebas:

Tabla 4

Resumen de prueba de prueba de Levene y prueba t para las variables COD

Variable		Prueba de Levene para la igualdad de varianzas	Prueba t para la igualdad de medias
COD	Se han asumido varianzas iguales	,680	,912
Concepto de derivada	No se han asumido varianzas iguales		

De acuerdo a los valores obtenidos en la tabla para la variable COD tenemos una valor de la prueba T de 0.912 superior a nuestro nivel de significancia ( $\alpha = 0.05$ ) planteado, por lo que no existe evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula, por lo que se concluye que la comprensión del concepto de derivada como razón de cambio... por parte de los estudiantes es igual en el grupo control y en el experimental del profesor\_2.

**Contraste  $N^{\circ} 3$ :** Las medias de todos los grupos

**Variable:** COD

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$  : La comprensión del concepto de derivada como razón de cambio... por parte de los estudiantes es igual en todos los grupos

$H_1 : \mu_i \neq \mu_j$  para algún  $i \neq j$  con  $i = 1..5 \wedge j = 1..5$  : La comprensión del concepto de derivada como razón de cambio... por parte de los estudiantes no es igual en en al menos dos grupos

En la tabla, se presentó la prueba de normalidad y como resultado se obtuvo que la distribución de las variables dependientes en los cinco grupos es normal.

De igual forma que en las pruebas anteriores se realiza la prueba para verificar el supuesto de homogeneidad de las varianzas, en este caso la tabla siguiente muestra el resultado de la prueba de Levene.

Tabla 5

Prueba de homogeneidad de las varianzas para el ANOVA

Variables	Estadístico de			Sig.
	Levene	gl1	gl2	
COD	1,908	4	123	,113

De acuerdo a los valores obtenidos en la tabla para ambas variables el valor de la prueba es superior a nuestro nivel de significancia ( $\alpha = 0.05$ ) planteado, por lo que asumimos la hipótesis nula de igualdad de varianzas de los cinco grupos. Bajo los supuestos verificados aceptamos la  $F$  del ANOVA como la prueba más adecuada para responder a la pregunta. El resultado obtenido es el siguiente:

Tabla 6

ANOVA de un factor para las variables COD

Variables		Suma de		Media		Sig.
		cuadrados	gl	cuadrática	F	
COD	Inter-grupos	7077,790	4	1769,447	5,062	,001
	Intra-grupos	42995,452	123	349,557		
	Total	50073,242	127			

En cuanto a la variable COD el valor de la prueba es superior al nivel de significancia por lo que se concluye que la comprensión del concepto de derivada como razón de cambio... por parte de los estudiantes no es igual en todos los grupos.

Como no sólo nos interesa conocer que existen diferencias entre los grupos sino la concreción respecto a cuales son esas diferencias y averiguar entre qué grupos se dan. Con el objetivo de determinar las diferencias mostradas por la prueba de la  $F$  del ANOVA utilizaremos una prueba de Comparación a Posteriori o Comparaciones Post Hoc. Como en nuestro caso la prueba de Levene nos ha informado que las varianzas de los grupos son iguales y dado que el tamaño de los grupos está equilibrado utilizaremos la prueba HSD de Tukey.

La tabla siguiente recoge las diferencias de las medias entre todos los pares de grupos implicados.

Tabla 7

## Prueba Post Hoc de HSD de Tukey

Variable dependiente		(I) Grupo	(J) Grupo	Sig.
COD	HSD de Tukey	Profesor_2_Experimental	Profesor_3_Control	,083
			Profesor_1_Experimental	,981
			Profesor_1_Control	,018
			Profesor_2_Control	1,000
			Profesor_2_Experimental	,083
			Profesor_1_Experimental	,041
		Profesor_3_Control	Profesor_1_Control	,997
			Profesor_2_Control	,108
			Profesor_2_Experimental	,981
			Profesor_3_Control	,041
			Profesor_1_Control	,009
			Profesor_2_Control	,995
		Profesor_1_Experimental	Profesor_2_Experimental	,018
			Profesor_3_Control	,997
			Profesor_1_Experimental	,009
			Profesor_2_Control	,031
			Profesor_2_Experimental	1,000
			Profesor_3_Control	,108
		Profesor_2_Control	Profesor_1_Experimental	,995
			Profesor_1_Control	,031

De acuerdo con los datos de la tabla (descripción de los estadísticos) y los resultados de la prueba de Tukey, podemos establecer diferencias entre algunos grupos, algunas de ellas ya habían sido consideradas cuando se realizaron los análisis de comparación de dos medias. Rescatamos para el grupo del profesor\_1\_Experimental diferencias significativas con los grupos control del profesor\_3 y su grupo control, en ambos casos el grupo experimental es superior en el manejo del concepto de derivada.

En el caso del grupo del profesor\_2\_Experimental no presenta diferencias significativas con su grupo control y con el grupo\_profesor\_\_3 en cuanto al manejo del concepto de derivada. Sin embargo si se muestran diferencias entre el grupo profesor\_2\_control y el grupo profesor\_1\_control, mostrando el primero superioridad en cuanto al manejo del concepto de derivada.

## Conclusiones

### Conclusiones importantes:

- Hay evidencia estadística para creer que existen diferencias significativas entre el grupo control y el grupo experimental del profesor\_1 en cuanto a la comprensión de la derivada.
- No hay evidencia estadística para creer que exista diferencias significativas entre el grupo control y el grupo experimental del profesor\_2 en cuanto a la comprensión de la derivada.
- Hay evidencia estadística para creer que existen diferencias significativas entre los grupos en cuanto a la comprensión de la derivada.
- El análisis estadístico nos permite explorar datos de nuestro quehacer diario y establecer hipótesis que pueden influenciar nuestro proceso de enseñanza.
- Se deben considerar todos los factores que intervienen en estos procesos de investigación de tal forma que puedan dar validez a los resultados
- El docente debe tener un dominio de los tipos de visualización y lo más importante estar convencido sobre el aporte que las representaciones visuales pueden ofrecer como apoyo a la enseñanza de la matemática.
- Uno de los factores que pueden contribuir al éxito al usar tecnología como apoyo para la enseñanza y aprendizaje de la matemática, es que el profesor realmente crea que puede lograr diferencias con ella.

### Referencias

Burkhard, R. (2002). Learning from Architects Difference between Knowledge Visualization and Information Visualization . Proceeding of the Eighth Conference on Information Visualisation: IEEE, pp. 519-524. Obtenido el 7 de septiembre del 2007 de la base de datos IEEE Xplorer.

Burkhard, R. (2005). Knowledge Visualization. A dissertation submitted to the Swiss Federal Institute of Technology Zurich for the degree of Doctor of Sciences. Obtenido el 7 de Septiembre del 2007, de [http://www.ia.arch.ethz.ch/files/publications/remo\\_burkhard/2005\\_burkhard\\_knowledge\\_visualization\\_dissertation\\_remo\\_burkhard.pdf](http://www.ia.arch.ethz.ch/files/publications/remo_burkhard/2005_burkhard_knowledge_visualization_dissertation_remo_burkhard.pdf)

Burkhard, R & Meier, M. (2005). Tube Map Visualization: Evaluation of a Novel Knowledge Visualization Application for the Transfer of Knowledge in Long-Term Projects. Journal of Universal Computer Science , vol. 11, no 4. Obtenido el 7 de septiembre del 2007 de, <http://www.knowledgemedia.org/modules/pub/download.php?id=knowledgemedia-66>

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. Proceeding of the Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Obtenido el 7 de octubre del 2007, de <http://pat-thompson.net/PDFversions/1999Duval.pdf>

Eppler, M & Burkhard, R. (2004). Knowledge Visualization: Towards a New Discipline and its Fields of Application. Obtenido el 11 de abril del 2008, de <http://www.bul.unisi.ch/cerca/bul/pubblicazioni/com/pdf/wpca0402.pdf>

Figueras, O. (2005). Atrapados en la explosión del uso de tecnologías de la información y la comunicación. Departamento de Matemática Educativa, México. Nuevo Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM. Obtenido el 6 de Junio del 2007, de <http://www.ugr.es/local/seiem>