

# PERSPECTIVA AMPLIADA DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DEL PROFESOR

Luis R. Pino-Fan ([luis.pino@ulagos.cl](mailto:luis.pino@ulagos.cl))  
Universidad de Los Lagos, Chile

Juan D. Godino ([jgodino@ugr.es](mailto:jgodino@ugr.es))  
Universidad de Granada, España

**Recibido:** 03/11/2014 **Aceptado:** 17/03/2015

## Resumen

En este trabajo presentamos una versión revisada y ampliada del sistema de categorías de conocimientos didáctico-matemáticos del profesor, basada en la aplicación de las herramientas de análisis del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos. Se distinguen las dimensiones *matemática*, *didáctica* y *meta didáctico-matemática*, y se tienen en cuenta los conocimientos puestos en juego en las fases de diseño instruccional (análisis preliminar, diseño, implementación y evaluación). Este modelo ampliado del conocimiento didáctico-matemático se compara con otros modelos propuestos en educación matemática para identificar concordancias y complementariedades.

**Palabras Clave:** formación de profesores, conocimiento del profesor, enfoque onto-semiótico, conocimiento didáctico-matemático.

## AN EXPANDED VIEW OF TEACHERS' DIDACTIC-MATHEMATICAL KNOWLEDGE

### Abstract

In this paper we present a revised and expanded version of the system of categories of teachers' didactic-mathematical knowledge based on the application of analysis tools of the Onto-Semiotic Approach (OSA) to cognition and mathematical instruction. The *mathematical*, *didactical* and *meta didactic-mathematical* dimensions are distinguished, and taken into account the knowledge involved in the phases of instructional design (preliminary analysis, design, implementation and assessment). This expanded model of the didactic-mathematical knowledge is compared with other models proposed in mathematics education to identify concordances and complementarities.

**Key Words:** teacher training, teachers' knowledge, didactic-mathematic knowledge, onto-semiotic approach.

### Antecedentes

Desde hace aproximadamente tres décadas, la formación matemática y didáctica de los profesores constituye un campo que ha llamado la atención de la comunidad de investigación. Esto queda reflejado en el incremento notable de investigaciones sobre la formación de profesores de matemáticas incluidas en los "handbooks" de investigación en educación matemática (Bishop, Clements, Keitel, Kilpatrick, & Leung, 2003; English, Bartolini-Busi, Jones, Lesh, & Tirosh, 2002; Llinares y Krainer, 2006; Hill, Sleep, Lewis, & Ball, 2007;

Franke, Kazemi, & Battey, 2007; Sowder, 2007), y en la publicación de revistas específicas como el *Journal of Mathematics Teacher Education*.

Una de las problemáticas que más ha interesado a investigadores, formadores de profesores y administraciones educativas, está relacionada con la determinación del conglomerado de conocimientos, matemáticos y didácticos, que un profesor de matemáticas debería tener para que su práctica de enseñanza de las matemáticas sea lo más idónea posible. Al respecto, existen en el campo de investigación de Didáctica de las Matemáticas, diversas propuestas de modelos que tratan de determinar y describir los elementos que componen el conocimiento que los profesores de matemáticas deberían tener para desempeñarse eficazmente en su práctica y facilitar el aprendizaje de sus estudiantes.

En el presente trabajo, se realiza un ensayo teórico sobre la diversidad de modelos existentes para caracterizar los conocimientos del profesorado de matemáticas, y se discuten los hallazgos y aportes de cada uno de ellos. La diversidad de modelos y posturas, dan cuenta de que aún no existe un consenso sobre las dimensiones o componentes que deberían incluirse como parte del conocimiento del profesor. Seguidamente presentamos una versión ampliada del modelo de “Conocimientos Didáctico–Matemáticos” (CDM) del profesor, basado en la aplicación de las herramientas de análisis didáctico propuestas por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos desarrollado en diversos trabajos por Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007). Estas herramientas permiten hacer análisis pormenorizados de las diversas categorías de conocimientos del profesor de matemáticas.

### **Modelos del conocimiento del profesor de matemáticas**

Uno de los pioneros en esta área fue Shulman (1986) quien propuso en su trabajo tres categorías para el conocimiento del profesor: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico del contenido (PCK<sup>1</sup>) y conocimiento curricular. El conocimiento pedagógico del contenido (PCK) es descrito por Shulman como “aquel que vas más allá del conocimiento de la materia en sí misma a la dimensión del conocimiento de la materia para la enseñanza... [El conocimiento pedagógico del contenido] es la forma particular del conocimiento del contenido

---

<sup>1</sup> Siglas en inglés que hacen referencia a la expresión “Pedagogical Content Knowledge”.

que incorpora el aspecto del contenido que guarda más relación con la enseñanza” (p. 9). De acuerdo con Shulman (1986) el PCK incluye, para los temas que habitualmente se enseñan en matemáticas, “las formas más útiles de representar las ideas, las analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones más poderosas; en una palabra, las formas de representar y formular el tema que hacen que sea más comprensible para los demás” (p. 9).

Posteriormente, en otro trabajo, Shulman (1987) amplía sus ideas y propone siete categorías para el conocimiento del profesor, lo que denomina “*categorías del conocimiento base*: 1) *conocimiento del contenido*; 2) *conocimiento pedagógico general*, que se refieren a esos principios y estrategias generales que ayudan a la gestión y organización de la clase y que aparecen para hacer trascender el contenido; 3) *conocimiento curricular*, comprensión de los materiales y programas que sirven como ‘herramientas de trabajo’ para los profesores; 4) *conocimiento pedagógico del contenido (PCK)*, que es esa amalgama especial de contenido y pedagogía que es el campo propio de los profesores, su forma especial de comprensión profesional; 5) *conocimiento de los estudiantes y sus características*; 6) *conocimiento de los contextos educativos*, que van desde el funcionamiento del grupo o la clase, el gobierno y financiamiento de los distritos escolares, hasta el carácter de las comunidades y culturas; y 7) *conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación*” (p. 8).

De acuerdo con Shulman (1987), hay por lo menos cuatro fuentes principales de este conocimiento base: 1) formación académica en la disciplina a enseñar; 2) los materiales y el contexto del proceso educativo institucionalizado (por ejemplo, los currículos, los libros de texto, la organización escolar y la financiación, y la estructura de la profesión docente); 3) la investigación sobre la escolarización, las organizaciones sociales, el aprendizaje humano, la enseñanza y el desarrollo, y los demás fenómenos socioculturales que influyen en el quehacer de los profesores; y 4) la sabiduría que otorga la práctica misma, las máximas que guían la práctica de los profesores competentes.

Shulman señala que de las siete categorías antes mencionadas, el *conocimiento pedagógico del contenido (PCK)*, resulta de especial interés puesto que identifica el “cuerpo distintivo” de conocimiento para la enseñanza, pues representa la mezcla de contenido y pedagogía en la comprensión de cómo un tópico particular, problema o tema se organiza, representa y se adapta atendiendo a la diversidad de intereses y habilidades de los estudiantes,

y se presenta para su enseñanza. Al respecto, Ponte y Chapman (2006) sostienen que el énfasis de la comunidad de investigadores fue puesto sobre la categoría *conocimiento pedagógico del contenido*, la cual en su momento representó uno de los avances más importantes en la caracterización y concepciones del conocimiento de los profesores.

Posteriormente, Grossman (1990) tomando como base los desarrollos de Shulman y sus colaboradores sobre el conocimiento base, reorganiza dichas ideas y propone un “*modelo del conocimiento del profesor*” en el que considera cuatro componentes principales (p. 5):

1. Conocimiento pedagógico general. “Incluye un cuerpo de conocimiento general, creencias y habilidades relacionadas con la enseñanza: conocimiento y creencias concernientes al aprendizaje y los aprendices; conocimiento de principios generales de instrucción tales como el tiempo de aprendizaje académico, tiempo de espera o instrucción en pequeños grupos; conocimiento y habilidades relacionadas con la gestión de la clase; y conocimiento y creencias sobre los fines y objetivos de la educación” (p. 6).
2. Conocimiento del contenido. “Se refiere a los conceptos y hechos principales dentro de un campo y las relaciones entre ellos” (p. 6).
3. Conocimiento pedagógico del contenido. Está compuesto de cuatro componentes centrales: concepciones de las propuestas para la enseñanza de un contenido, conocimiento de la comprensión de los estudiantes, conocimiento curricular y conocimiento de las estrategias instruccionales. “El primer componente se refiere a los conocimientos y creencias sobre las propuestas para la enseñanza de un contenido en diferentes grados. Esas concepciones generales de la enseñanza de un contenido están reflejadas en los objetivos de los profesores para con la enseñanza de un contenido particular” (p. 8). “El segundo componente incluye conocimiento de la comprensión de los estudiantes, concepciones, y concepciones erróneas de tópicos particulares en un área. Para generar apropiadamente representaciones y explicaciones, los profesores deberían tener algunos conocimientos sobre aquello que los estudiantes ya conocen sobre un tópico y aquello que podrían encontrar extraño” (p. 8). “El tercer componente incluye conocimiento de los materiales curriculares disponibles para la enseñanza de un contenido particular, así como el conocimiento sobre el currículum horizontal y vertical para un tema” (p.8). El cuarto componente “incluye conocimiento de las estrategias instruccionales y representaciones para la enseñanza de un tópico particular. Los profesores con experiencia pueden poseer repertorios ricos de metáforas, experimentos, actividades, o explicaciones que son particularmente efectivos para la enseñanza de un tema particular, mientras que los profesores principiantes todavía están en el proceso de desarrollar un repertorio de estrategias instruccionales y representaciones” (p. 9).
4. Conocimiento del contexto. “Los profesores deberían basarse en su comprensión del contexto particular en el que enseñan para adaptar su conocimiento general a las necesidades específicas de la escuela y de cada uno de los estudiantes. El conocimiento del contexto incluye: conocimiento de los distritos en que los profesores trabajan, incluyendo las oportunidades, expectativas y limitaciones planteadas por el distrito; conocimiento del entorno de la escuela, incluyendo la ‘cultura’ de la escuela, directrices departamentales, y otros factores contextuales en el nivel de la escuela que afectan la instrucción; y conocimiento de estudiantes y comunidades específicos, y los antecedentes de los estudiantes, familias, puntos fuertes, debilidades e intereses” (p. 9).

Otro de los modelos importantes en este campo, es el desarrollado, en diversos trabajos, por Deborah Ball y colaboradores (Ball, 2000; Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Schilling y Ball, 2004; Ball, Hill y Bass, 2005; Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008), quienes apoyándose en las ideas de Shulman (concretamente en las nociones

del conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido), han propuesto la noción de “*conocimiento matemático para la enseñanza (MKT<sup>2</sup>)*”, el cual han definido como “el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno” (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 374). Este conocimiento (MKT) está conformado por dos grandes categorías, cada una de las cuales, a su vez, está conformada por otras subcategorías del conocimiento: 1) *conocimiento del contenido*, que incluye conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y conocimiento en el horizonte matemático; y 2) *conocimiento pedagógico del contenido*, conformado por el conocimiento del contenido y los estudiantes, conocimiento del contenido y la enseñanza, y conocimiento del currículo. Los componentes del conocimiento matemático para la enseñanza, se pueden ver de forma más clara en la Figura 1.

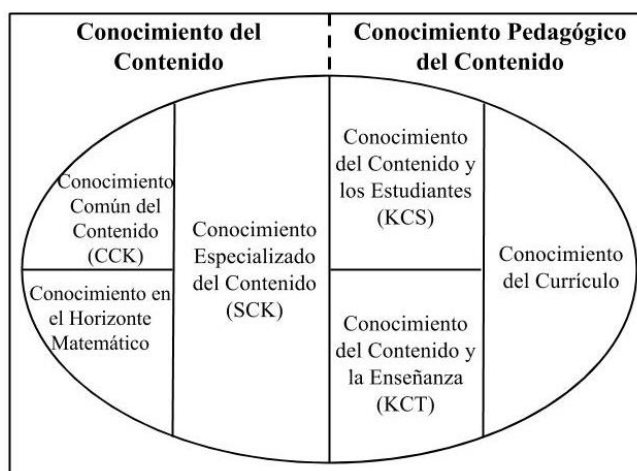


Figura 1. *Conocimiento matemático para la enseñanza (MKT)* (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 377)

El *conocimiento común del contenido (CCK<sup>3</sup>)* es descrito como “aquel conocimiento que es usado en el trabajo de enseñanza en formas comunes a como se utiliza en muchas otras profesiones u ocupaciones que también usan matemáticas” (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 377). En palabras de Ball, Thames y Phelps (2008) el conocimiento común del contenido es aquel que posibilita al profesor resolver correctamente los problemas o tareas matemáticas que asignan a sus estudiantes; no obstante, dichos conocimientos y habilidades matemáticas que permiten la resolución de tareas, no son exclusivos de la enseñanza, sino que son utilizados en

<sup>2</sup> Siglas en inglés que hacen referencia a la expresión “Mathematical Knowledge for Teaching”.

<sup>3</sup> Siglas en inglés que hacen referencia a la expresión “Common Content Knowledge”.

una amplia variedad de contextos. Por *conocimiento especializado del contenido* (SCK<sup>4</sup>), Ball, Thames y Phelps (2008) entienden al conglomerado de “conocimientos y habilidades matemáticas exclusivas para la enseñanza” (p. 400). Este conocimiento incluye “cómo representar con exactitud ideas matemáticas, ofrecer explicaciones matemáticas de reglas y procedimientos que comúnmente se encuentran en la enseñanza, analizar y comprender los métodos inusuales que permiten resolver un problema” (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 377-378). El *conocimiento en el horizonte matemático* es definido como “una toma de conciencia (más como un turista experimentado y apreciativo que como un guía de turismo) del gran paisaje matemático en el que la experiencia y la instrucción presentes están situadas” (Ball y Bass, 2009, p. 6). Esto es, se trata de un tipo de conocimiento que puede guiar los siguientes tipos de actos y responsabilidades de enseñanza:

- Hacer juicios sobre la importancia matemática.
- Atención al significado matemático subyacente a lo que los estudiantes opinan.
- Destacar y subrayar puntos clave.
- Anticipar y hacer conexiones
- Notar y evaluar oportunidades matemáticas
- Detectar distorsiones matemáticas o posibles precursores de confusiones o interpretaciones matemáticas erróneas posteriores.

De acuerdo con Ball y Bass (2009), la actual concepción del conocimiento en el horizonte matemático tiene cuatro elementos que lo constituyen: 1) un sentido del medio ambiente matemático que rodea la situación actual en la instrucción; 2) principales ideas disciplinares y su estructura; 3) prácticas matemáticas clave; y 4) valores y sensibilidades matemáticas fundamentales.

El *conocimiento del contenido y de los estudiantes* (KCS<sup>5</sup>) se define como “el conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento sobre como los estudiantes piensan, conocen o aprenden este contenido particular” (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 375).

Por su parte, el *conocimiento del contenido y la enseñanza* (KCT<sup>6</sup>) “combina conocimiento sobre la enseñanza y conocimiento sobre las matemáticas. Muchas de las tareas matemáticas de enseñanza requieren un conocimiento matemático para el diseño de la

---

<sup>4</sup> Siglas en inglés que hacen referencia a la expresión “Specialized Content Knowledge”.

<sup>5</sup> Siglas en inglés que hacen referencia a la expresión “Knowledge of Content and Students”.

<sup>6</sup> Siglas en inglés que hacen referencia a la expresión “Knowledge of Content and Teaching”.

instrucción. Los profesores secuencian contenidos particulares para la instrucción. Los profesores eligen los ejemplos para comenzar con el proceso y los ejemplos que usan para ayudar a los estudiantes a profundizar en el contenido. Los profesores evalúan las ventajas y desventajas instruccionales de las representaciones usadas para la enseñanza de ideas específicas e identifican los diferentes métodos y procedimientos permisibles en el proceso de instrucción. Cada una de esas tareas requiere una interacción entre una comprensión matemática específica y una comprensión de los aspectos pedagógicos que afectan el aprendizaje de los estudiantes” (Ball, Thames y Phelps, 2008, p. 401). Finalmente, el *conocimiento curricular*, es entendido por el equipo de Ball y colaboradores, en el sentido de los trabajos de Grossman (1990).

A pesar que el modelo del MKT desarrollado por Ball y colaboradores, descrito anteriormente, resulta ser un avance significativo en la caracterización de los conocimientos que debe tener un profesor para la enseñanza de las matemáticas, aún quedan cuestiones importantes que siguen abiertas, por ejemplo, ¿De qué forma o bajo qué criterios se puede evaluar o medir el MKT? ¿Cómo se puede ayudar a los profesores a adquirir o desarrollar los distintos componentes del MKT? ¿Cómo se relacionan entre sí, los distintos componentes del MKT? En palabras de Silverman y Thompson (2008):

Aunque el conocimiento matemático para la enseñanza ha comenzado a ganar atención como un concepto importante en la comunidad de investigación sobre formación de profesores, hay una comprensión limitada de lo que es, cómo se puede reconocer, y cómo se puede desarrollar en la mente de los profesores (p. 499).

Otras investigaciones cuyas aportaciones han tratado de contribuir a la especificación de los conocimientos que deben tener los profesores para que su enseñanza de las matemáticas sea idónea, son, por un lado, el estudio de Schoenfeld y Kilpatrick (2008) sobre la *“proficiencia” en la enseñanza de las matemáticas*, y por otro, la propuesta de Rowland, Huckstep y Thwaites (2005) sobre el *cuarteto del conocimiento (KQ<sup>7</sup>)*. *La proficiencia en la enseñanza de las matemáticas* puede ser interpretada como los conocimientos y competencias que deberían tener los profesores para que su enseñanza se pueda considerar de calidad. Schoenfeld y Kilpatrick (2008, p. 322) proponen distinguir las siguientes dimensiones: 1) conocer las matemáticas escolares con profundidad y amplitud; 2) conocer a los estudiantes como personas que piensan; 3) conocer a los estudiantes como personas que aprenden; 4)

---

<sup>7</sup> Siglas en inglés que hacen referencia a la expresión “Knowledge Quartet”.

diseñar y gestionar entornos de aprendizaje; 5) desarrollar las normas de la clase y apoyar el discurso de la clase como parte de la “enseñanza para la comprensión”; 6) construir relaciones que apoyen el aprendizaje; y 7) reflexionar sobre la propia práctica.

Schoenfeld y Kilpatrick concluyen que su propuesta es el primer paso hacia una teoría de la proficiencia en la enseñanza de las matemáticas, y que indudablemente, se requieren nuevos refinamientos y elaboraciones.

El *cuarteto del conocimiento* (KQ), por su parte, es propuesto por Rowland, Huckstep y Thwaites (2005), como una herramienta que permite observar el conocimiento del contenido matemático de los profesores (tanto el MSK<sup>8</sup> y el PCK) en la práctica de enseñanza de las matemáticas y, desarrollar la enseñanza de dicha disciplina. Rowland, Huckstep y Thwaites (2005, p. 260) consideran cuatro grandes dimensiones o unidades para el cuarteto del conocimiento (KQ):

1. Fundamentos. Esta primera dimensión se refiere, como su nombre lo indica, a los fundamentos o antecedentes teóricos y las creencias de los profesores en formación. Se trata de los conocimientos, la comprensión y de los recursos que los profesores aprenden en la “academia”, de cara a su preparación (intencional o no) para su papel en el aula.
2. Transformación. Se refiere, en congruencia con los aportes del conocimiento base de Shulman, a la capacidad de un profesor para transformar el conocimiento del contenido que posee, en formas que son “pedagógicamente poderosas” (p. 261). Esto incluye la demostración de los profesores, el uso de materiales instruccionales, la elección de representaciones y la elección de ejemplos (Turner y Rowland, 2011, p. 200).
3. Conexión. Se refiere a la coherencia de la planificación de la forma en que aparece un episodio, lección o serie de lecciones, para su enseñanza. La concepción de coherencia incluye la secuenciación de los tópicos dentro y entre las lecciones, incluyendo el orden de las tareas y ejercicios (p. 263). Esto incluye hacer conexiones entre los procedimientos, hacer conexiones entre los conceptos, decisiones sobre la secuenciación y reconocimiento de la pertinencia conceptual (Turner y Rowland, 2011, p. 201).
4. Contingencia. Se refiere a eventos de la clase que son casi imposibles de planificar. Los dos componentes que constituyen esta categoría son la disposición de responder a las ideas de los niños y la preparación consecuente, cuando sea necesario, para desviarse de lo planificado cuando la lección ha sido preparada (p. 263).

Uno de los inconvenientes del marco teórico denominado *cuarteto del conocimiento* (KQ), radica en que, aunque originalmente fue desarrollado para el estudio y desarrollo del conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido de los profesores en formación inicial, su uso se ha centrado principalmente en el estudio del conocimiento de los profesores en acción. Esto se debe al contexto en el que se estudian cada uno de los cuatro

---

<sup>8</sup> Siglas en inglés que hacen referencia a la expresión “Subject Matter Knowledge” introducida por Shulman.



componentes del cuarteto, lo cual es señalado por Rowland, Huckstep y Thwaites (2005), “Las siguientes tres categorías [dimensiones 2, 3 y 4, descritas arriba], a diferencia de la primera, se refieren a la forma y el contexto en el cual el conocimiento es aplicado para la preparación y desarrollo de la enseñanza. Estas tres categorías se centran en el conocimiento en la acción, demostrado mediante la planificación para enseñar y el acto de la enseñanza en sí mismo” (p. 261).

Los trabajos científicos que acabamos de repasar, en los cuales se desarrollan los diversos modelos del conocimiento del profesor de matemáticas, muestran una visión multifacética sobre la identificación de los conocimientos requeridos para la enseñanza. Investigaciones más recientes (por ejemplo, los trabajos presentados en los dos últimos PME y el último CERME), nos muestran que, tal como señalan Rowland y Ruthven (2011), no existe un acuerdo universal sobre un marco teórico para describir el conocimiento de los profesores de matemáticas. Y es que a pesar de los avances importantes en cuanto a la caracterización del entramado complejo de conocimientos que deberían tener los profesores para que su práctica de enseñanza de las matemáticas sea efectiva, en general, como señala Godino (2009, p. 19), “los modelos de conocimiento matemático para la enseñanza elaborados desde las investigaciones en educación matemática, incluyen categorías demasiado globales, por lo que sería útil disponer de modelos que permitan análisis más detallados de cada uno de los tipos de conocimiento que se ponen en juego en una enseñanza efectiva de las matemáticas. Además, esto permitiría orientar el diseño de acciones formativas y la elaboración de instrumentos de evaluación de los conocimientos de los profesores”.

### **Modelo de Conocimientos Didáctico-Matemáticos (CDM) basado en el EOS**

En Godino (2009) se comenzó a proponer un sistema de categorías para analizar los conocimientos del profesor de matemáticas, referido como “conocimientos didáctico-matemáticos” al considerar a la Didáctica de la Matemática como la disciplina que articula de manera sistémica los distintos aspectos implicados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Las categorías propuestas estaban relacionadas con los tipos de herramientas de análisis elaboradas en el seno del marco teórico conocido como *Enfoque Onto-Semiótico* (EOS), asumiendo que el uso de cada herramienta pone en juego conocimientos didáctico-matemáticos. De ese modo el sistema formado por las distintas

herramientas teóricas proporciona un sistema de categorías y subcategorías de conocimientos que el profesor debe conocer, comprender, saber aplicar y valorar.

En el mencionado artículo se resalta el uso de dos tipos de herramientas elaboradas en el marco del EOS: 1) Las *facetas* implicadas en los procesos de instrucción matemática (epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional); y 2) Los *niveles de análisis* (prácticas matemáticas y didácticas, configuraciones de objetos y procesos, normas e idoneidad). Al final de su estudio, en la sección cuatro, Godino (2009) proporciona mediante cuatro tablas una serie de pautas para la creación de ítems para evaluar y analizar cada una de las categorías del CDM. Con dichas tablas se introduce de manera implícita una reestructuración del modelo MKT. No queda claro cuáles son los vínculos, si es que los hay, entre el MKT (y otros modelos del conocimiento del profesor) y el CDM. Además, no se ve claramente la relación e interacción entre cada una de las categorías incluidas en el modelo CDM. Por tanto, se hace necesario el desarrollo de “refinamientos” y “matizaciones” que amplíen el modelo CDM, y que faciliten su entendimiento y uso.

Actualmente, como parte de los desarrollos del EOS, para cada faceta y nivel de análisis se han elaborado y refinado nociones específicas que permiten análisis detallados de las prácticas matemáticas y didácticas, de las cuales se pueden inferir subcategorías de conocimientos didáctico-matemáticos. Así, por ejemplo, para las facetas epistémica y cognitiva se dispone de la herramienta “*configuración ontosemiótica*” (formada por los problemas, prácticas, objetos y procesos matemáticos) que aportan criterios para delimitar subcategorías de conocimientos didáctico-matemáticos (relativos a los problemas, lenguajes, conceptos, procedimientos, proposiciones, argumentos y las conexiones entre los mismos). Otros desarrollos del enfoque ontosemiótico que no habían sido contemplados en su totalidad en Godino (2009), es que para los análisis didácticos que propone el EOS se dispone –además de las “facetas” y “niveles de análisis”–, de las herramientas “*dimensión normativa*” (Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009), “*dimensión metadidáctica*” (D’Amore, Font y Godino, 2007), “*idoneidad didáctica*” (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, 2011). Por otra parte, las prácticas y configuraciones de objetos y procesos pueden ser de naturaleza matemática o didáctica.

Todo lo anterior nos lleva a una reorganización de las dimensiones, componentes y sus características del conocimiento del profesor de matemáticas, teniendo en cuenta tanto los aportes del MKT y de otros modelos del conocimiento del profesor descritos anteriormente, como los desarrollos del Enfoque Ontosemiótico y los resultados empíricos obtenidos en diversas investigaciones (Pino-Fan, Godino, Font y Castro, 2012, Pino-Fan, Godino, Font y Castro 2013, Pino-Fan, Godino y Font, 2013).

Así, el modelo del Conocimiento Didáctico–Matemático (CDM) interpreta y caracteriza los conocimientos del profesor a partir de tres dimensiones (Figura 2): dimensión matemática, dimensión didáctica y dimensión meta didáctico-matemática.

La dimensión matemática del CDM incluye dos subcategorías de conocimientos: conocimiento común del contenido y conocimiento ampliado del contenido. Atendiendo a la necesidad de concretar los conocimientos del profesorado de matemáticas en tópicos matemáticos específicos y en una etapa educativa determinada (en la cual se aborda el estudio de un tópico concreto), se tiene la necesidad de reinterpretar lo que se entenderá por conocimiento común y conocimiento en el horizonte matemático (nociones introducidas por Ball y colaboradores con el MKT). En términos del CDM el conocimiento común del contenido será aquel conocimiento, sobre un objeto matemático concreto (por ejemplo, la derivada), que se considera suficiente para resolver los problemas o tareas propuestas en el currículo de matemáticas (o planes de estudio) y en los libros de texto, de un nivel educativo determinado (por ejemplo, bachillerato). Se trata de un conocimiento que es compartido entre el profesor y los estudiantes. Por su parte, usaremos la expresión conocimiento ampliado del contenido, en lugar de conocimiento en el horizonte matemático, para referirnos a aquel conocimiento que debe tener el profesor sobre las nociones matemáticas que, tomando como referencia la noción matemática que se está estudiando en un momento puntual (por ejemplo, la derivada), están más adelante en el currículo del nivel educativo en cuestión, o en un nivel siguiente (por ejemplo, la integral en bachillerato, o el teorema fundamental del cálculo y ecuaciones diferenciales en universidad). El conocimiento ampliado del contenido es el que provee al profesor las bases matemáticas necesarias para plantear nuevos retos matemáticos en el aula, vincular el objeto matemático que se está estudiando con otras nociones matemáticas y encaminar a los alumnos al estudio de las nociones matemáticas subsecuentes a la noción que es centro de estudio. El significado, sobre un objeto matemático concreto, que moviliza el

profesor como parte de su conocimiento común y ampliado será una parte del significado holístico (Pino-Fan, Godino y Font, 2011) del objeto matemático en cuestión.

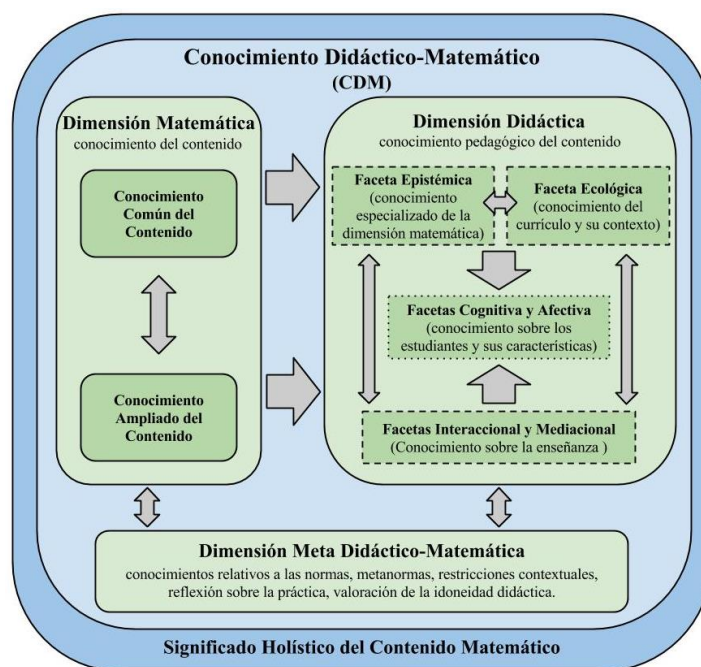


Figura 2. Dimensiones y componentes del CDM y sus relaciones con otros modelos

Es claro que la dimensión matemática del CDM, que posibilita al profesor resolver problemas y tareas matemáticas, no es suficiente para la práctica de enseñanza. Los autores de los diversos modelos descritos en la segunda sección, coinciden en que además del contenido matemático, el profesor debe tener conocimiento sobre los diversos factores que influyen cuando se planifica e implementa la enseñanza de dicho contenido matemático.

En este sentido, la dimensión didáctica del CDM incluye las siguientes subcategorías del conocimiento:

- 1) conocimiento especializado de la dimensión matemática (faceta epistémica);
- 2) conocimiento sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes (faceta cognitiva);
- 3) conocimiento sobre los aspectos afectivos, emocionales y actitudinales de los estudiantes (faceta afectiva);
- 4) conocimiento sobre las interacciones que se suscitan en el aula (faceta interaccional);

- 5) conocimiento sobre los recursos y medios que pueden potenciar los aprendizajes de los estudiantes (faceta mediacional); y
- 6) conocimiento sobre los aspectos curriculares, contextuales, sociales, políticos, económicos..., que influyen en la gestión de los aprendizajes de los estudiantes (faceta ecológica).

Un aspecto que hay que destacar aquí, es que los componentes de esta dimensión instruccional son de una naturaleza didáctico-matemática, puesto que los conocimientos de los profesores sobre aspectos cognitivos y afectivos de los estudiantes, las interacciones y los recursos, etc., siempre van estrechamente vinculados a las matemáticas que son objeto de enseñanza-aprendizaje.

La *faceta epistémica* del CDM, incluye entonces tanto las concepciones planteadas en el modelo de la proficiencia de Schoenfeld y Kilpatrick (2008, p. 322) sobre conocer las matemáticas escolares con profundidad y con amplitud, como la concepción de Hill, Ball y Schilling (2008, p. 377-378) sobre el conocimiento especializado del contenido. El profesor, además de las matemáticas que le permiten resolver problemas en las que movilice su conocimiento común y ampliado, debe tener cierta dosis de conocimiento matemático “perfilado” para la enseñanza; es decir, el profesor debe ser capaz de movilizar diversas representaciones de un objeto matemático, resolver la tarea mediante distintos procedimientos, vincular el objeto matemático con otros objetos matemáticos del nivel educativo en el que se enseña o de niveles anteriores y posteriores, comprender y movilizar la diversidad de significados parciales para un mismo objeto matemático (que integran el significado holístico para dicho objeto), proporcionar diversas justificaciones y argumentaciones, e identificar los conocimientos puestos en juego durante la resolución de una tarea matemática. En síntesis, la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático permitirá a los profesores, o futuros profesores, responder preguntas del tipo:

- ¿Además de tu solución, existe otra forma de resolver la tarea?
- ¿Cómo explicarías la solución de la tarea a un estudiante que no ha podido resolverla por los procedimientos vistos en clase?
- ¿Qué conocimientos se ponen en juego al resolver la tarea?

En Pino-Fan, Godino y Font (2013) y Pino-Fan (2014), puede encontrarse a manera de ejemplo, un estudio sobre la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de profesores de bachillerato sobre la derivada.

Las facetas *cognitiva* y *afectiva*, tal como se definen dentro del enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2009), juntas proporcionan una mejor aproximación y entendimiento de los conocimientos que deberían tener los profesores de matemáticas sobre las características y aspectos que están relacionados con la forma de pensar, conocer, actuar y sentirse, de los estudiantes dentro de la clase y a propósito de un problema matemático. *La faceta cognitiva del CDM*, por un lado, proporciona a los profesores los conocimientos necesarios para “reflexionar y evaluar” la proximidad o grado de ajuste de los significados personales (conocimientos de los estudiantes) respecto de los significados institucionales (conocimiento desde el punto de vista del centro educativo). Para ello, el profesor debe ser capaz de prever (durante la etapa de planificación o diseño) y tratar (durante la etapa de implementación), a partir de las producciones de los estudiantes, o producciones esperadas, posibles respuestas a un problema determinado, concepciones erróneas, conflictos o errores que surjan a propósito de la solución, vínculos (matemáticamente correctos o no) entre el objeto matemático centro de estudio y otros objetos matemáticos requeridos para resolver el problema. *La faceta afectiva del CDM*, por otro lado, versa sobre los conocimientos que son necesarios para comprender y tratar los estados de ánimo de los estudiantes, los aspectos que los motivan o no a resolver un problema determinado, etc. En general, se trata de conocimientos que ayudan a describir las experiencias y sensaciones de los estudiantes dentro de una clase concreta o con un problema matemático determinado, en un nivel educativo específico, teniendo en cuenta los aspectos que se vinculan con la faceta ecológica.

Estas dos facetas (cognitiva y afectiva) integran y expanden las ideas de Shulman (1987, p. 8) –conocimiento sobre los estudiantes y sus características–, Schoenfeld y Kilpatrick (2008) –sobre conocer a los estudiantes como personas que piensan y aprenden–, Grossman (1990, p. 8) –sobre la comprensión de los estudiantes, sus concepciones y concepciones erróneas de tópicos particulares–, y de Hill, Ball y Schilling (2008, p. 375) –sobre el conocimiento del contenido y los estudiantes–. Los conocimientos adquiridos por los

profesores como parte de estas dos facetas, contribuyen a responder idóneamente a preguntas del tipo:

- ¿Qué tipo de respuestas se esperan por parte de los estudiantes?
- ¿Cuáles son las principales dificultades que podrían tener los estudiantes al resolver el problema?
- ¿Qué tipo de errores podrían cometer los estudiantes al resolver el problema?
- ¿Qué medidas implementarías para motivar a los estudiantes en la solución del problema?

El estudio de los aspectos necesarios para gestionar idóneamente los aprendizajes de los estudiantes sobre tópicos concretos de matemáticas, han catalogado a las *interacciones* como un componente fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Coll y Sánchez, 2008; Planas e Iranzo, 2009). En este sentido, y teniendo en cuenta las ideas de Schoenfeld y Kilpatrick (2008) sobre construir relaciones que apoyen el aprendizaje, la *faceta interaccional del CDM* involucra los conocimientos necesarios para prever, implementar y evaluar secuencias de interacciones, entre los agentes que participan en el proceso de enseñanza y aprendizaje, orientadas a la fijación y negociación de significados (aprendizajes) de los estudiantes. Estas interacciones no sólo se establecen entre el profesor y los alumnos (profesor–alumno), sino también puede establecerse entre los alumnos (alumno–alumno), alumnos–recursos, y profesor–recursos–alumnos. El estudio de las normas y metanormas, que tienen un rol importante en la gestión de los aprendizajes de los estudiantes, tiene gran énfasis en esta faceta interaccional. Sin embargo, el estudio de dichas normas y metanormas no se restringe a esta faceta.

Con relación a los recursos y medios utilizados para la gestión de los aprendizajes, los modelos propuestos por Shulman (1987) y Grossman (1990) consideran los materiales como parte del conocimiento curricular. Sin embargo, desde nuestro punto de vista, dada las tendencias actuales de los currículos de matemáticas, estos adquieren un rol importante en la organización y gestión de los aprendizajes. Por esta razón, la *faceta mediacional del CDM* refiere a los conocimientos que debería tener un profesor para usar y evaluar la pertinencia del uso de materiales y recursos tecnológicos para potenciar el aprendizaje de un objeto matemático específico, así como la asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos de aprendizaje. Como puede observarse, la vinculación de las facetas interaccional y

mediacional desarrollan y enriquecen la noción de “conocimiento del contenido y la enseñanza” planteado por Ball, Thames y Phelps, (2008, p. 401).

Finalmente, la *faceta ecológica* del conocimiento didáctico-matemático, refiere a los conocimientos sobre el currículo de matemáticas del nivel educativo en el que se contempla el estudio del objeto matemático, sus relaciones con otros currículos, y las relaciones que dicho currículo tiene con los aspectos sociales, políticos y económicos, que soportan y condicionan el proceso de enseñanza y aprendizaje. Los aspectos que se contemplan dentro de esta faceta del conocimiento toman en cuenta las concepciones de Shulman (1987, p. 8) –sobre el conocimiento curricular, de los contextos educativos y de los fines, propósitos y valores de la educación– y Grossman (1990, p. 9) –conocimiento sobre el currículo horizontal y vertical para un tema, y conocimiento del contexto–.

Las seis facetas que componen la dimensión didáctica del conocimiento didáctico-matemático, pueden contemplarse para analizar, describir y desarrollar el conocimiento de los profesores –o futuros profesores– involucrado en las diversas fases de los procesos de enseñanza y aprendizaje de tópicos concretos de matemáticas: *estudio preliminar*, *planificación o diseño*, *implementación* y *evaluación* (Figura 3). Además, como parte de sus conocimientos didáctico-matemáticos, los profesores deben conocer y comprender los aspectos involucrados en cada una de dichas fases del diseño didáctico.



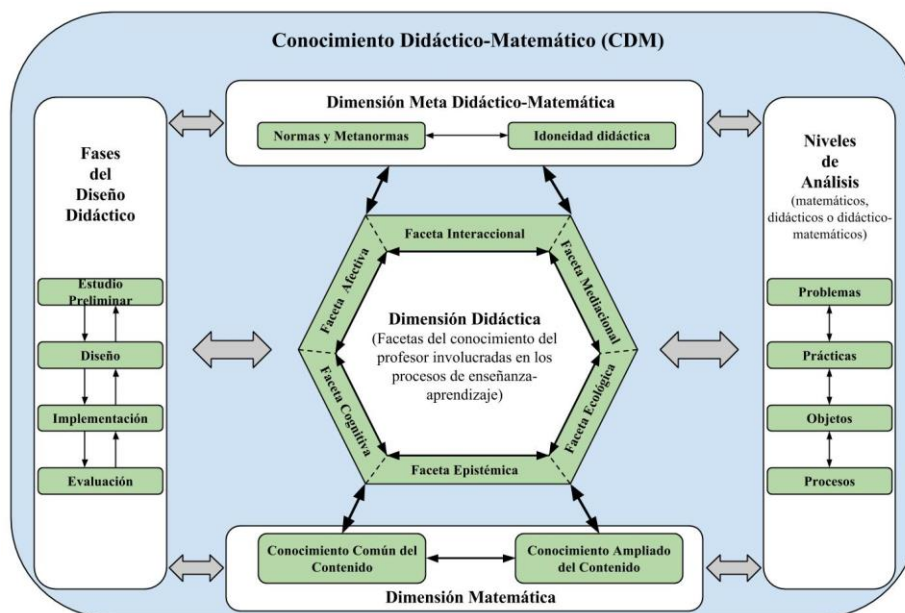


Figura 3. Dimensiones y componentes del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM)

Somos conscientes de que el profesor es un sujeto *reflexivo*, racional, que toma decisiones, emite juicios, tiene creencias y genera rutinas propias de su desarrollo profesional (Schön, 1983), y que los pensamientos del profesor influyen sustancialmente en su conducta e incluso la determinan (Schön, 1987). En síntesis, que el profesor debe tener las bases necesarias para reflexionar sobre su propia práctica. De acuerdo con Schoenfeld y Kilpatrick (2008, p. 348), “Una vez hecha habitual la reflexión puede llegar a ser el principal mecanismo para mejorar la propia práctica”. Por esta razón, para cada una de las facetas contempladas en la dimensión didáctica del CDM, como parte de los desarrollos del marco teórico al que nos apegamos (EOS), se han previsto *criterios de idoneidad* que permiten al profesor reflexionar sobre su propia práctica y determinar mejoras potenciales de la misma. El desarrollo de los criterios de idoneidad, para cada uno de los componentes del CDM, puede encontrarse en los trabajos de Godino (2011) y Godino, Batanero, Rivas y Arteaga (2013). Tanto la reflexión como la valoración y detección de las mejoras potenciales de la práctica, están inmersas dentro de la fase de *evaluación* de los procesos de enseñanza-aprendizaje. El conocimiento sobre los criterios de idoneidad didáctica son parte de la *dimensión meta didáctico-matemática* del CDM. Otros aspectos del CDM que forman parte de esta dimensión “meta”, son el conocimientos sobre las normas y metanormas (epistémicas, ecológicas, cognitivas, interaccionales, mediacionales, afectivas), las condiciones y restricciones contextuales.

### *Herramientas teórico-metodológicas para el análisis y desarrollo del CDM*

Para cada uno de los componentes del conocimiento didáctico-matemático, el marco teórico al que nos hemos apegado (EOS), cuenta con herramientas “teórico-metodológicas” que han sido descritas y utilizadas en diversos trabajos (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino 2009; Godino 2012). Estas herramientas pueden utilizarse dependiendo del nivel de análisis en el que estemos situados (Figura 3): *problemas*, *prácticas* (matemáticas y didácticas), *objetos* y *procesos* (matemáticos y didácticos). Desarrollos y ejemplos de uso de las herramientas de análisis específicas para cada uno de los cuatro niveles de análisis de cada una de las facetas, se pueden encontrar en las páginas web: <http://www.ugr.es/local/jgodino>, <http://www.webpersonal.net/vfont/>.

Por ejemplo, para el desarrollo de instrumentos que permitan evaluar, y analizar sistemáticamente los conocimientos de los profesores referentes a la dimensión matemática (conocimiento común y ampliado) y a la faceta epistémica del CDM, se cuenta con la herramienta “*configuración ontosemiótica*”. Esta herramienta permite la descripción y caracterización de los objetos matemáticos primarios (situaciones/ problema, elementos lingüísticos, conceptos/ definiciones, proposiciones/ propiedades, procedimientos y argumentos) y procesos (argumentación, particularización, generalización, idealización, materialización, representación, reificación, descomposición, personalización, institucionalización, comunicación, significación, enunciación, definición, problematización, algoritmización que son activados en las *prácticas matemáticas* que desarrollan los profesores a propósito de un problema, o como parte de la planificación de un problema (o secuencia de problemas) para el aula, sobre una noción matemática concreta. Esta herramienta permite analizar el grado de acoplamiento entre los significados personales (conocimientos de los profesores; configuraciones cognitivas) y los significados institucionales (conocimiento institucional; configuraciones epistémicas). En Pino-Fan (2014), se muestra el uso de esta herramienta para el análisis, descripción y caracterización de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada, de futuros profesores de bachillerato.

### **Reflexiones Finales**

En este trabajo hemos realizado una revisión de los diversos modelos sobre el conocimiento del profesor de matemáticas, con los que se cuenta en la actualidad en el campo

de investigación sobre Didáctica de las Matemáticas. En un intento por consolidar una conceptualización del término *conocimiento*, es posible inferir que en la investigación didáctica se recoge una aproximación al conocimiento del profesor como una integración cognitiva del conocimiento científico y conocimiento práctico, procedentes de diferentes dominios científicos y prácticos.

La dificultad de conceptualizar el término *conocimiento* del profesor ha dado paso a diferentes intentos por delimitarlo a través de sus diversos componentes, tal y como ha quedado evidenciado en el segundo apartado de este documento: “Modelos del conocimiento del profesor de matemáticas”. Investigaciones posteriores a los trabajos de Shulman han puesto de manifiesto que el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido, más que considerarse como dos componentes separados, se tienen que considerar integrados (Linares, 1996).

Sin embargo, en la literatura no se encuentra una definición operativa del término “conocimiento”, lo que se observa es una aproximación extensional; es decir, se intenta especificar los componentes de dicho conocimiento (tal como la propuesta de Ball y colegas).

En este sentido, se presenta un modelo que integra y amplía los desarrollos y avances de los diversos modelos sobre el conocimiento del profesor de matemáticas. Dicho modelo del “conocimiento didáctico-matemático (CDM)”, tal como se ilustra con la Figura 3, está compuesto por tres dimensiones (matemática, didáctica y meta didáctico-matemática), mismos que involucran seis facetas (implicadas en los procesos de enseñanza-aprendizaje de tópicos concretos de matemáticas) para cada una de las cuales se contemplan diversos niveles de análisis. Así mismo, el modelo CDM considera cuatro “*fases del proceso metodológico*” (estudio preliminar, diseño, implementación y evaluación) propias de las investigaciones orientadas al diseño instruccional (ingeniería didáctica en sentido generalizado), en las que intervienen tanto las *dimensiones* como las *facetas* y los *niveles de análisis*.

Es claro que se trata de un *sistema interconectado de herramientas* cuyo uso no es lineal sino complejo, y por tanto, dialógico, recursivo y hologramático (Morin, 2003). El análisis de un proceso de instrucción sobre un tópico específico, por ejemplo “resolución de problemas en educación primaria”, pondrá en juego, en primer lugar el “estudio preliminar” del foco de atención FASES; seguirá con la DIMENSIÓN matemática, la FACETA

epistémica (institucional), para entrar seguidamente en el bucle analítico de los NIVELES (problemas, prácticas, objetos y procesos). En las siguientes fases del proceso metodológico se volverá a transitar de nuevo por las dimensiones, facetas y niveles, y por la reflexión metadidáctica (reconocimiento de condicionamientos y restricciones contextuales), poniendo en juego y produciendo conocimientos personales e institucionales. Toda esta actividad analítico-reflexiva pone en juego el sistema de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la resolución de problemas que el profesor de matemáticas debe conocer, comprender, saber aplicar y apreciar para una enseñanza de las matemáticas con alta idoneidad didáctica.

Así, los componentes del CDM, y sus respectivas herramientas de análisis, son útiles para describir y caracterizar minuciosamente los conocimientos iniciales de los profesores durante las fases de estudio preliminar, planificación, implementación y evaluación, de procesos de instrucción sobre objetos matemáticos específicos; y elaborar, posteriormente, ciclos formativos para potenciar y desarrollar los conocimientos contemplados con cada una de las componentes del CDM. Por otra parte, el estudio y adaptación de los criterios de idoneidad (que posibilitan la reflexión de los profesores sobre su propia práctica) a la complejidad intrínseca de objetos matemáticos concretos, es una línea de investigación abierta.

#### **Reconocimiento:**

**Este trabajo fue realizado en el marco de los Proyectos de Investigación R02/15 (Universidad de Los Lagos) y EDU2012-31869, Ministerio de Economía y Competitividad. Gobierno de España.**

#### **Referencias**

- Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51, 241-247.
- Ball, D. L., & Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. Paper presented at the 43<sup>Rd</sup> Jahrestagung Für Didaktik Der Mathematik Held in Oldenburg, Germany.
- Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29, 14-22.
- Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Bishop, A., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., & Leung, F. (Eds.). (2003). *Second International handbook of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer A. P.
- Coll, C. & Sanchez, E. (2008). Presentación. El análisis de la interacción alumno-profesor: líneas de investigación. *Revista de Educación*, 346, 15-32.
- D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma*, XXVIII(2), 49-77.
- English, L. D., Bartolini-Busi, M., Jones, G. A., Lesh, R., & Tirosh, D. (2002). *Handbook of International research in mathematics education*. London: Lawrence Erlbaum Ass.
- Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Understanding teaching and classroom practice in mathematics. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 225-256). Charlotte, N.C: NCTM and IAP.
- Godino, J.D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas [Categories for analysing the knowledge of mathematics teachers]. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Godino, J.D. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Conferencia presentada en la XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.
- Godino, J.D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en didáctica de la matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), pp. 325-355.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1), 127-135.
- Godino, J. D., Batanero, C., Rivas, H., & Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *REVEMAT*, 8(1), 46-74.
- Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V., & Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, XXVII (2), 221-252.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., y Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 59-76.
- Godino, J. D. & Pino-Fan, L. (2013). The mathematical knowledge for teaching. A view from onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. In B. Ubuz, Ç. Haser & M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3325–3326). Antalya, Turkey: CERME.
- Grossman, P. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York and London: Teachers College Press.

- Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.
- Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M., & Ball, D. L. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge: What knowledge matters. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 111-156). Charlotte, N.C: NCTM and IAP.
- Hill, H. C., Schilling, S., & Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *The Elementary School Journal*, 105(1), 11-30.
- Llinares, S. (1996). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. En J. Ponte (Coord.), *Desenvolvimento profissional dos professores de Matemática. ¿Qué formação?* (pp. 47-82). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.
- Llinares, S. (1998). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *UNO*, 17, 51-63.
- Llinares, S., & Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 429-459). Rotterdam: Sense Publishers.
- Morin, E. (2003). *Introducción al pensamiento complejo*. Barcelona, Gedisa.
- Pino-Fan, L. (2014). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada*. Granada: Universidad de Granada.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1), 141-178.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D. & Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (primera parte). *REVEMAT*, 8(2), 1 – 49.
- Pino-Fan, L., Font, V. & Godino, J. D. (2014). El conocimiento didáctico-matemático de los profesores: pautas y criterios para su evaluación y desarrollo. En C. Dolores, M. García, J. Hernández, y L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 137 – 151). México, D. F.: Ediciones D. D. S. y Universidad Autónoma de Guerrero.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., Font, V., & Castro, W. F. (2012). Key Epistemic Features of Mathematical Knowledge for Teaching the Derivative. In Tso, T.Y. (Ed). *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 297-304). Taipei, Taiwan: PME.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., Font, V., & Castro, W. F (2013). Prospective teacher's specialized content knowledge on derivative. In B. Ubuz, Ç. Haser & M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3195–3205). Antalya, Turkey: CERME.
- Planas, N. & Iranzo, N. (2009). Consideraciones metodológicas para el análisis de procesos de interacción en el aula de matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12(2), 179-213.

- Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(3), 255-281.
- Rowland, T., & Ruthven, K. (Eds.) (2011). *Mathematical Knowledge in Teaching, Mathematics Education Library 50*. London: Springer.
- Schoenfeld, A., & Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh, & T. L. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354) Rotterdam: Sense Publishers.
- Schön, D. (1983). *The reflective practitioner*. New York: Basic Books.
- Schön, D. (1987). *Educating the reflective practitioner. Toward a new desing for teaching and learning in the professions*. San Francisco: Jossey-Bass Publishers.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Silverman, J., & Thompson, P. W. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(6), 499-511.
- Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 157-223). Charlotte, N.C: NCTM and IAP.
- Turner, F., & Rowland, T. (2011). The knowledge quartet as an organising framework for developing and deepening teachers' mathematics knowledge. En T. Rowland, y K. Ruthven (Eds.), *Mathematical knowledge in teaching* (pp. 195-212). London and New York: Springer.

**Autores**

**Luis R. Pino-Fan, Ph.D.**

Departamento de Ciencias Exactas  
Universidad de Los Lagos - Campus Santiago  
Av. República 517, Santiago, Chile

Fono: (56) - 26 75 3080

E-mail: [luis.pino@ulagos.cl](mailto:luis.pino@ulagos.cl)

[www.lrpino.blogspot.com](http://www.lrpino.blogspot.com) (Personal Web)

**Juan D. Godino**

Catedrático de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (España)  
Facultad de Ciencias de la Educación  
18071 Granada (España)

E-mail: [jgodino@ugr.es](mailto:jgodino@ugr.es)

<http://www.ugr.es/local/jgodino>