

NIVELES DE RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO BASADO EN LOS NIVELES DE VAN-HIELE. FONDECYT 1090617.

Aravena Díaz, María

Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Básicas.

Universidad Católica del Maule. Talca, Chile

Resumen

La investigación que se presenta fue financiada el Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico FONDECYT 1090617. Se realizó un experimento en el área de la geometría, basado en el modelo de Van Hiele, en alumnos de segundo año de secundaria de establecimientos públicos de estratos vulnerables donde la geometría es trabajada, salvo excepciones, en forma tradicional. La revisión teórica consideró los estudios y propuestas que han utilizado el modelo, dando cuenta de la importancia de éste para analizar los niveles de razonamiento de los alumnos en diversos temas geométricos. La metodología fue de corte cuantitativo, descriptivo interpretativo, de los niveles y grados de adquisición. Para la selección de la muestra se utilizó un muestreo por conglomerados con arranque aleatorio y probabilidad proporcional quedando constituida por 615 estudiantes. A nivel de resultados, se observa que al final de la experiencia el grupo experimental presenta diferencias significativas, con respecto al grupo control. El alumnado del grupo control alcanza un nivel 1 de razonamiento, que es el más básico en el modelo, reconociendo solo atributos físicos de las figuras geométricas, en contraste con el Grupo experimental donde los alumnos razonan en el nivel 2, reconociendo que las figuras geométricas están dotadas de propiedades matemáticas, utilizan y clasifican definiciones y procesos de demostración para validar sus afirmaciones. Se destaca además, que un grupo de estos alumnos llega a razonar en el nivel 3 del acuerdo al modelo.

Palabras clave: *razonamiento geométrico, niveles de razonamiento, educación secundaria.*

Abstract

The research presented was funded by the National Fund for Scientific and Technological FONDECYT 1090617. An experiment was conducted in the area of geometry, based on the Van Hiele model, on sophomores students in high school public institutions of vulnerable strata where the geometry is worked, except, in traditional form. The theoretical review considered studies and proposals that have used the model, realizing the importance of this to analyze reasoning levels of students in various geometric subjects. The methodology was quantitative, descriptive interpretative, of the levels and degrees of acquisition. The sample selection that's utilized was a cluster sampling with random starts and proportional probability leaving constituted for 615 students. In terms of results, it appears that at the end of the experiment the experimental group presented significant differences relative to the control group. Students in the control group reaches a level 1 of reasoning, which is the most basic model, recognizing only physical attributes of geometric figures, in contrast to the experimental group where students reasoning reach a level 2, recognizing that geometric figures are equipped with mathematical properties, use and classified definitions and demonstration process to validate his claims. It also stresses that a group of these students reach a level 3 of reasoning according to the model.

Keywords: *geometric reasoning, reasoning levels, secondary education*

Introducción

El problema del razonamiento en matemática, en la mayoría de los establecimientos tanto públicos como privados, es un punto de tope para obtener mayores logros en las pruebas de mediciones nacionales (SIMCE) e internacionales (PISA). En la prueba PISA (2009) y PISA (2012), Chile estuvo muy por debajo de la media internacional, presentando serias deficiencias en la resolución de problemas y en los procesos deductivos y argumentativos en geometría (Aravena & Caamaño, 2013), donde se puede observar, que sólo un 1% de los estudiantes chilenos alcanza el nivel 5 o 6 declarado por PISA. El problema de la calidad de la enseñanza de la matemática en Chile, desde hace décadas, está directamente relacionado con la segregación de los establecimientos municipalizados (públicos), donde asisten los estudiantes más vulnerables, lo que queda demostrado en diversos estudios que evidencian que este segmento de la población estudiantil presenta serias dificultades y obstáculos en la comprensión de los conceptos y procesos matemáticos, especialmente en el ámbito de la geometría (Aravena & Caamaño, 2013). El informe de OCDE (2009), ha hecho hincapié en esta problemática y puesto el énfasis en la severa segmentación que existe en la educación chilena y recomienda centrar la atención de forma urgente para corregir las desigualdades de tal manera de lograr la equidad y acceso a la educación superior de estos alumnos, considerando crucial una mejor preparación de profesores para trabajar con alumnos de muy diferentes ambientes y de habilidades mixtas. A pesar de todas las recomendaciones y críticas a la educación chilena, emitidas en dichos informes, la problemática aún no ha sido resuelta.

Cabe destacar que durante los últimos 20 años, en la mayoría de los niveles de enseñanza y también en la formación de profesores, el área de la geometría apenas se trabaja y en los casos que ésta es considerada, en el sistema educativo casi siempre se realiza al final de los cursos. En cuanto a los métodos de enseñanza, es enfocada en forma tradicional, colocando el centro en la memorización y la utilización de mecanismos de resolución, donde no se trabajan elementos que son considerados claves de la matemática como son: la visualización, el razonamiento y la construcción de los objetos geométricos, dejándose de lado las representaciones, la exploración, la modelización, la argumentación y la demostración (Jaime & Gutiérrez, 1996; Aravena et.al, 2011, Aravena & Caamaño, 2013; Ibañez & Ortega, 2004; Aravena, Gutiérrez & Jaime, 2015). Las pruebas nacionales SIMCE y de ingreso a la educación superior PSU, en las cuales los alumnos de establecimientos públicos obtienen los peores resultados, también están en esta línea tradicional, con lo cual no entregan evidencia sobre la real dimensión del problema.

Las investigaciones muestran que uno de los modelos que ha sido utilizado en varios estudios de enseñanza de la geometría, es el modelo de Van- Hiele, cuyas aportaciones muestran cómo medir, evaluar o describir el nivel de razonamiento de estudiantes (Usikin, 1982; Fuys, Geddes & Tischler, 1988; Burger & Shaughnessy, 1986); analizar la evolución del razonamiento de los estudiantes colocando en práctica secuencias experimentales de enseñanza (Jaime, 1993; Gutiérrez, Jaime & Fortuny, 1991; Guillén, 2004; Aravena y Caamaño, 2013; Cabello, 2013, Aravena, Gutiérrez y Jaime, 2015) y otros han permitido caracterizar el grado de adquisición de los niveles de razonamiento (Jaime, 1993; Guillén, 1996; Gutierrez, Pegg & Lawrie, 2004, Aravena & Caamaño, 2013, Aravena, Gutiérrez & Jaime, 2015). A partir de los trabajos descritos, nos interesamos por este modelo ya que nos permite caracterizar y jerarquizar los niveles de razonamiento de los alumnos de establecimientos públicos de la Región del Maule que presenta los peores resultados en matemática, en particular en geometría en comparación con los establecimientos privados y privados subvencionados (semipúblicos), de tal manera de generar estrategias de acción mediante propuestas de mejora para corregir las desigualdades, para lo cual nos planteamos el siguiente problema de investigación:

¿Cuál es el nivel de razonamiento adquirido por los alumnos de segundo año de secundaria cuando son formados en base al modelo de razonamiento de Van –Hiele?

Para dar respuesta a este problema nos planteamos el siguiente objetivo general: Caracterizar y jerarquizar los niveles de razonamiento de los alumnos de segundo año de secundaria en el contexto del modelo de los Van-Hiele.

Antecedentes.

Se ha considerado importante analizar, en los estudiantes, algunas habilidades que forman parte de los procesos de aprendizaje de contenidos geométricos, entre los que se encuentran los procesos de identificación de propiedades, clasificación, representación, argumentación y demostración (Gutiérrez & Jaime, 2006; Fortuny y Giménez, 1998, Guillén, 2004, Aravena, Gutiérrez & Jaime, 2015).

Para su identificación, evaluación y análisis, consideramos el modelo de Van Hiele que se describen detalle en los trabajos de Geddes, Lovett y Tischler (1988) y Gutiérrez & Jaime (1991, 1996). El modelo considera 5 niveles, que en términos generales corresponde a: Nivel 1. Identificación de atributos físicos de las figuras geométricas; Nivel 2. Identificación de propiedades matemáticas, demostraciones empíricas, uso de definiciones con estructura simple; Nivel 3. Demostraciones informales, uso de definiciones con estructura matemática compleja; Nivel 4. Uso y clasificación de definiciones equivalentes, demostraciones formales. Aunque el modelo considera cinco niveles de razonamiento, debido a las características de los estudiantes que hemos analizado, aquí tenemos en cuenta sólo los cuatro primeros niveles.

El modelo nos permite analizar el nivel de razonamiento en el trabajo geométrico, así como para organizar la enseñanza de la geometría mediante la elaboración de actividades según el modelo (Van Hiele, 1957; 1986; Gutiérrez & Jaime 1998; Battista, 2007; Fuys, Geddes y Tischler, 1988; Jaime y Gutiérrez, 1990; Jaime, 1993; Guillén, 1997; Guillén, 2004, Cabello, 2013). Así también, las investigaciones, en base al modelo, nos aportan evidencias sobre los tipos de problemas y las dificultades y errores presentados por los alumnos (Guillén, 2004, Cabello, 2013) y el grado de adquisición alcanzado en cada uno de los niveles (Jaime, 1993; Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991; Aravena, Gutiérrez & Jaime, 2015).

Metodología

La metodología que se siguió en la investigación es de corte cuantitativo descriptiva-interpretativa con pre-prueba, post-prueba y grupo control. En el grupo experimental (GE) se trabajó la secuencia de problemas en base al modelo, donde se capacitó al grupo de docentes de matemática de los diferentes cursos. Por otro lado, en el grupo control (GC) se siguió la metodología tradicional expositiva del profesor y se tuvo la precaución que ninguno de los docentes hubiesen trabajado con el modelo de Van-Hiele.

Para el análisis de las respuestas de los estudiantes en los ítems del pre y postest, se consideraron los 4 niveles de Van- Hiele y los atributos distintivos en los procesos de razonamiento que corresponden a: reconocimiento y descripción, uso de definiciones, formulación de definiciones, clasificación y demostración (Gutiérrez & Jaime, 1998). Para la construcción de los instrumentos, se diseñó una matriz que articula los niveles que abarca cada ítem de los temas geométricos y los procesos evaluativos. Tanto la matriz de niveles como los instrumentos diseñados fueron validados mediante la triangulación de jueces expertos y para la fiabilidad del instrumento se utilizó el Alfa de Cronbach. Las temáticas del pretest fueron las que están en los planes de estudio desde sexto año de Educación General Básica hasta el segundo año de Educación Secundaria y para el postest, el tema de semejanza de figuras planas y espaciales que fue implementada en el experimento.

Para asegurar la equivalencia de los grupos en la partida se utilizó la prueba t-student para muestras independientes y un estudio comparativo de acuerdo al nivel que abarcaba cada ítem y del nivel en

que enmarcaban la respuesta tanto el GC como el GE. Finalmente, se realizó un estudio comparado que interrelaciona los niveles de Van Hiele y los atributos distintivos en los procesos de razonamiento por cada uno de los niveles (Gutiérrez & Jaime, 1998).

A modo de ejemplificación mostramos en la tabla 1, como se utilizó los criterios de evaluación en un ítem para los niveles de razonamiento de los alumnos, en los grados de adquisición altos.

Tabla 1. Codificación grado de adquisición alto o completo de acuerdo al nivel (Aravena & Caamaño, 2013)

ÍTEM 3: PROPIEDADES DEL ROMBO (niveles que abarca: N1-N2)					Grado adquisición niveles			
Descriptor (atributos)	Nivel	Tipo	Justificación	Idea de respuesta esperada	N1	N2	N3	N4
Reconocimiento Clasificación exclusiva basada en atributos físicos	1	6 o 7	Lista atributos físicos del rombo	(1) Cuadrilátero de lados iguales. (2) Tiene 4 ángulos iguales. (3) Tiene dos diagonales. (4) Lados opuestos paralelos.	100	0		
Reconocimiento Uso de definiciones Clasificación exclusiva basada en atributos matemático	2	6 o 7	Utiliza propiedades del rombo Una definición de los cuadriláteros con estructura simple: diagonales de distinta medida Definición de diagonal	(1) es un paralelogramo sus lados opuestos son paralelos (2) sus cuatro lados son de igual medida (3) la suma de los ángulos interiores es de 360. (4) ángulos opuestos congruentes. (5) ángulos adyacentes de distinta medida y suplementarios. (6) diagonales de distinta medida y perpendiculares. (7) diagonales son bisectrices y se bisectan.	100	100		

Población y muestra

La población para el estudio corresponde a los alumnos de segundo año de educación media (secundaria) de los establecimientos municipalizados (centros públicos de enseñanza) de la Región del Maule, pertenecientes al área científico humanista, de procedencia urbana y que se encuentran en los niveles socio-económico vulnerables. Para la selección de la muestra, se utilizó la técnica de muestreo por conglomerado y posteriormente, se hizo la selección con arranque aleatorio y probabilidad proporcional, quedando constituida por 18 cursos que corresponden a 625 alumnos distribuidos en 5 comunas, de los cuales 315 corresponden al GC y 310 al GE. El tamaño de la muestra se estimó considerando un nivel de confianza del 95% y un error de estimación del 5%.

Resultados y análisis.

Sobre los niveles alcanzados por los estudiantes al final del tratamiento, hemos clasificado las respuestas de ambos grupos por cada nivel y luego se analizó el grado de adquisición (precisión matemática) en cada uno de los niveles. Para explicar cómo se analizaron los datos presentamos un ejemplo de uno de los ítems del postest (tabla 2). El ítem está referido a la asociación de las figuras geométrica con las propiedades matemáticas, siendo una de las habilidades cognitivas importantes a desarrollar en los alumnos y debe estar muy presente en el trabajo geométrico.

Tabla 2. Cantidad de estudiantes en el nivel 2 de razonamiento del ítem 5: reconocimiento de propiedades

		Grupo		Total
		Control	Experimental	
Nivel de razonamiento (Rec. No responde P5)	Receibto	184	99	283
	% de ítem de Grupo	78,0%	43,2%	60,9%
Análisis	Receibto	52	130	182
	% de ítem de Grupo	22,0%	56,8%	39,1%
Total	Receibto	236	229	465
	% de ítem de Grupo	100,0%	100,0%	100,0%

5) A continuación se presenta un listado de propiedades para polígonos semejantes:

(a) Son regulares.
 (b) Sus ángulos correspondientes son de igual medida.
 (c) Sus lados homólogos son paralelos.
 (d) Sus lados homólogos son proporcionales.

De acuerdo a ello:

(1) Dibuja dos polígonos semejantes que cumplan con 2 propiedades de la lista y que no tengan las otras 2. Explica cuáles son esas propiedades.
 Justifica por qué las tiene y por qué no se verifican las otras dos propiedades.
 Si es imposible encontrar dos polígonos con las condiciones pedidas, explica por qué no se puede.

(2) Dibuja dos polígonos semejantes que cumplan sólo con 3 de las propiedades entregadas en la lista. Explica cuáles son esas propiedades.
 Justifica por qué las tiene y por qué no tiene la otra propiedad.
 Si es imposible encontrar dos polígonos con las condiciones pedidas, explica por qué no se puede.

(3) Dibuja dos polígonos semejantes que tenga las 4 propiedades de la lista. Justifica por qué las tiene.
 Si es imposible encontrar el polígono con las condiciones pedidas explica por qué no se puede.

Se observa en la tabla anterior que al final de tratamiento, sólo un 22% del GC ubica su respuesta en el nivel 2, de análisis. Por el contrario en el GE, alrededor de un 57% se apoya en propiedades matemáticas para dibujar los polígonos que cumplen con las condiciones pedidas.

Como síntesis global, la enseñanza de la geometría basada en el modelo de Van Hiele ha producido, unos resultados claramente superiores que la enseñanza tradicional, puesto que un alto porcentaje

de alumnos del GE razona en el nivel 2 en contraste con el GC, que sigue razonando en el nivel 1. Sobre los grados de adquisición hay diferencias estadísticamente significativas a favor del GE en todos los niveles, ya que partiendo de grados de adquisición equivalentes, el GE ha mostrado un avance en su adquisición de los niveles de 1 a 3 significativamente superior al GC (Aravena, Gutiérrez & Jaime, 2015).

Conclusiones e implicaciones didácticas.

Para mejorar la enseñanza de la geometría, se debe incorporar metodologías de este tipo, en todos los niveles de enseñanza, en especial en la formación inicial y continua de profesores, de tal manera que ayuden a introducir a los alumnos, desde los primeros niveles de formación, en la resolución de problemas abiertos, en la formulación de conjeturas, hipótesis, generalización y en procesos de demostración empíricas, informales y formales de forma incremental. Resulta de interés generar espacios de reflexión y comunicación, orientando a los alumnos en la adquisición del lenguaje matemático, la argumentación y la discusión de sus procesos de resolución, permitiendo así la independencia del pensamiento reflexivo (Aravena, Gutiérrez & Jaime, 2015). Esto es de particular interés en establecimientos vulnerables, donde la educación ha sido por décadas deficitaria (OCDE, 2009). Por último, las universidades formadoras de profesores deben hacerse cargo del problema y cambiar los métodos tradicionales imperantes, en especial cuando estamos a las puertas de una nueva reforma educativa para nuestro país.

Bibliografía.

- ARAVENA, M. y CAAMAÑO, C. (2013). Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la Región del Maule. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(2), 139-178.
- ARAVENA, M.; GUTIÉRREZ, A.; JAIME, A. (2015). Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de centros de enseñanza vulnerables de Educación Media en Chile. *Revista Enseñanza de las Ciencias*. En prensa.
- BATTISTA, M. T. (2007). The development of geometrical and spatial thinking. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Reston, EE.UU.: NCTM.
- BURGER, W. F., y SHAUGHNESSY, J. M. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17(1), 31-48.
- CABELLO, A. B. (2013). *La modelización de Van Hiele en el aprendizaje constructivo de la geometría en primero de la educación secundaria obligatoria a partir de Cabri* (tesis doctoral). Salamanca, España: Universidad de Salamanca.
- FUYS, D., GEDDES, D. y TISCHLER, R. (1988). *The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents* (Journal for Research in Mathematics Education monograph 3). Reston, EE.UU.: NCTM.
- GUILLÉN, G. (1996). Identification of Van Hiele levels of reasoning in three-dimensional geometry. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th International Conference for the P.M.E.* (vol. 3, pp. 43-50). Valencia, España: Universidad de Valencia.
- GUTIÉRREZ, A. y JAIME, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20(2/3), 27-46.
- GUTIÉRREZ, A., JAIME, A. y FORTUNY, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), 237-251.
- GUTIÉRREZ, A., PEGG, J. y LAWRIE, C. (2004). Characterization of students' reasoning and proof abilities in 3-dimensional geometry. *Proceedings of the 28th International Conference for the P.M.E.* (vol. 2, pp. 511-518). Bergen, Noruega: Bergen University College.
- HAREL, G. y SOWDER, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En E. Dubinski, A. Schoenfeld y J. Kaput (Eds.), *Research on Collegiate Mathematics Education* (vol. 7, pp. 234-283). Providence, EE.UU.: American Mathematical Society.

- IBAÑES, M. y ORTEGA, T. (2004). Origen, nudo y desenlace de una investigación sobre los esquemas de prueba. Aspectos cognitivos. En R. Luengo (Ed.), *Líneas de investigación en educación matemática* (pp. 21-57). Badajoz: Sociedad Extremeña de Educación Matemática.
- JAIME, A. (1993): *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento* (tesis doctoral). Valencia, España: Universidad de Valencia. Recuperado de <http://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/Jai93.pdf>
- JAIME, A. y GUTIÉRREZ, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. En S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Sevilla: Alfar. Recuperado de <http://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf>
- JAIME, A. y GUTIÉRREZ, A. (1996). *El grupo de las isometrías del plano*. Madrid: Síntesis.
- MAYBERRY, J. (1983). The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14(1), 58-69.
- OCDE (2004). *Informe Chile 2004*. Recuperado de <http://www.scribd.com/doc/19341515/OCDE-Informe-Chile-2004>
- OCDE (2009). *La educación superior en Chile. Revisión de políticas nacionales de educación*. Recuperado de http://www.oecd-ilibrary.org/education/la-educacion-superior-en-chile_9789264054189-es
- OWENS, K., y OUTHRED, L. (2006). The complexity of learning geometry and measurement. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 83-115). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.
- PERDIKARIS, S. C. (2004). The problem of transition across levels in the van Hiele theory of geometric reasoning. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 18 (revista electrónica sin paginación).
- PISA (2009). *Resumen de resultados*. Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación. Ministerio de Educación de Chile. Recuperado de http://www.educacion2020.cl/sites/default/files/resumen_resultados_pisa_2009_chile.pdf
- PISA (2012). *Programa internacional de evaluación de estudiantes. Resultados de Chile*. Santiago de Chile: Gobierno de Chile. Recuperado de <http://www.agenciaeducacion.cl/wp-content/uploads/2013/04/PISA-Programa-Internacional-de-Evaluación-de-Estudiantes.pdf>
- SAADS, S., y DAVIS, G. (1997). Spatial abilities, Van Hiele levels, & language use in three dimensional geometry. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st International Conference for the P.M.E.* (vol. 4, pp. 104-111). Lathi, Finlandia: University of Helsinki.
- USISKIN, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry* (ERIC Document Reproduction Service N° ED 220 288). Columbus, EE.UU.: ERIC.
- VAN HIELE, P.M. (1957). *El problema de la comprensión en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría* (tesis doctoral). Utrecht, Holanda: Universidad de Utrecht. Recuperado de <http://www.uv.es/angel.gutierrez/aprenggeom/archivos2/VanHiele57.pdf>
- VAN HIELE, P.M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. Nueva York: Academic Press.