

## ANÁLISIS DE LA MEDICIÓN ANGULAR EN LA OBRA INTRODUCTION IN ANALYSIN INFINITORUM DE EULER COMO UN REFERENTE PARA EL ESTUDIO DEL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO TRIGONOMÉTRICO

*Karen Sánchez Duarte, Gisela Montiel Espinosa*  
*Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN*  
*karen.sanchez@cinvestav.mx, gmontiele@cinvestav.mx*

La Astronomía ha tenido gran injerencia en el desarrollo científico y cultural de la humanidad, pues permitió la ubicación de las posiciones del Sol y las estrellas para la orientación en la navegación (actualmente la Aeronáutica utiliza sus aportaciones) y la determinación de comportamientos de estrellas asociados a los fenómenos naturales y cronológicos mediante cálculos matemáticos trigonométricos.

Investigadores como Matos (1990) y Bressoud (2010), citados por Moore (2013), mencionan que los babilonios usaron ángulos para clasificar oscilaciones de cuerpos celestes en estudios astronómicos, surgiendo un enfoque de trigonometría circular. La mayoría de las mediciones de los ángulos emergen en el contexto de la medición de arcos; por ejemplo, los babilonios midieron el movimiento circular de los cuerpos celestes usando 360 *partes* completas para el cielo.

Los griegos también contribuyeron al avance de la trigonometría, sin embargo, con otro enfoque: la trigonometría triangular. Según Bressoud (2010), citado por Mesa y Goldstein (2017), los griegos utilizaron una representación relacional de un ángulo, lo que implica una trigonometría basada en triángulos. Por ejemplo, se menciona el trabajo Hiparco, en el siglo II a.C., en el que empleó herramientas geométricas, principalmente triángulos, en trabajos trigonométricos. Además, en la investigación de Cruz-Márquez (2017) se analiza los trabajos de Ptolomeo (85-165 d.C) en el *Almagesto*, en el que se estableció una tabla que proporcionaba la longitud de las cuerdas en función de los arcos de la circunferencia que subtienden, construyendo las primeras tablas trigonométricas, en las que aparecían las razones trigonométricas de ángulos en grados sexagesimales, marcando un episodio relevante en la Astronomía y en la Trigonometría.

Recurriendo a la historia desde la Socioepistemología, se cuestiona el propio saber y su naturaleza para dar referencia de elementos que den cuenta del carácter social de su construcción. En esta dirección, Buendía y Montiel (2009) identifican tres momentos trascendentales en lo que denominan *la funcionalidad trigonométrica* (la naturaleza social de la función trigonométrica): 1. Los aspectos geométricos (cuerdas) del seno y coseno, utilizados para el estudio de fenómenos celestes. 2. Una transición de lo geométrico a lo analítico, ilustrado en la obra de Euler (s. XVIII), quien, por ejemplo, empleaba como unidad de medida angular tanto grados como  $\pi$ , al tratar con cantidades trigonométricas; y, finalmente, 3. El uso de cantidades analíticas en el estudio de fenómenos mecánicos de movimiento oscilatorio.

A pesar de esta rica contribución histórica donde se problematiza la Trigonometría, se percibe una desarticulación entre los aportes brindados a partir de los fenómenos celestes (de lo geométrico) a los modelos mecánicos (a lo funcional), probablemente vinculado a un cambio contextual-funcional, principalmente en el uso de la medición angular. Por lo cual, hace suponer que un análisis más puntual de la obra *Introduction in Analysin Infinitorum* de Euler en el año 1835, permitirá identificar o al menos comprender un poco más la relación entre las mediciones angulares grados-radianes empleadas en la transición de la trigonometría clásica a la funcional.

Buendía y Montiel (2009) nos dan un punto de partida para el análisis de este momento de transición, cuando señalan que: "la literatura actual señala con mucho énfasis los conflictos que desencadena el manejo ambiguo de la unidad de medida para función trigonométrica. Euler maneja y transita entre ambas unidades (grados y radianes) sin complejidad" (p.1292). Por otra parte, según Mesa y Goldstein (2017), se le atribuye el uso del círculo unitario a Euler en el siglo XVIII, herramienta que actualmente utilizamos en la escuela para transitar de los grados a los radianes.

Las aportaciones y métodos empleados por Euler, por sí solos tiene implicaciones inherentes al desarrollo del pensamiento Trigonométrico; asumimos que el estudio a profundidad de ellos nos permitirá construir referentes epistemológicos específicos relativos a la medición angular y el uso de una unidad de medida en particular.

Proponemos entonces, una historización de la obra Introduction in Analysis Infinitorum, centrada en la medición angular, desde sus usos y funcionalidad, al transitar de las nociones propias de la trigonometría clásica a las propias de la trigonometría analítica. Esto como parte de una problematización Socioepistemológica, que amplíe el planteamiento de Buendía y Montiel (2009), usando los referentes metodológicos de análisis socio-histórico de Montiel (2011) y Cruz-Márquez (2018) que nos permitan recuperar usos y significados propios del saber en su génesis histórica.

## REFERENCIAS

- Buendía, G., & Montiel, G. (2009). Acercamiento socioepistemológico a la historia de las funciones trigonométrica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 22(1), 1287–1296.
- Buendía, G., & Montiel, G. (2015). Desarrollo del pensamiento Funcional-Trigonométrico. In G. Buendía, M. Ferrari, & G. Martinez (Eds.), *Resignificación de funciones para profesores de matemáticas* (pp. 169–205). Madrid, España: Díaz de Santos.
- Cruz-Márquez, G. (2018). *De Sirio a Ptolomeo: una problematización de las nociones trigonométricas* (tesis de maestría). Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, Mexico). Recuperado de [https://www.researchgate.net/publication/323667681\\_De\\_Sirio\\_a\\_Ptolomeo\\_Una\\_Problematizacion\\_de\\_las\\_Nociones\\_Trigonometricas](https://www.researchgate.net/publication/323667681_De_Sirio_a_Ptolomeo_Una_Problematizacion_de_las_Nociones_Trigonometricas)
- Mesa, V., & Goldstein, B. (2016). Conceptions of Angles, Trigonometric Functions, and Inverse Trigonometric Functions in College Textbooks. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 3(2), 338–354
- Moore, K. (2009). *An investigation into precalculus students' conceptions of angle measure*. Documento presentado en Twelfth Annual Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education, North Carolina State University, Estados Unidos.

Moore, K. (2013). Making sense by measuring arcs: A teaching experiment in angle measure. *Educational Studies in Mathematics*, 83(2), 225–245.

Montiel, G. (2011). *Construcción del conocimiento trigonométrico. Un estudio Socioepistemológico*. Madrid, España: Díaz de Santos.