

PROBABILIDAD CONDICIONAL COMO HERRAMIENTA PARA LA TOMA DE DECISIONES: UNA SECUENCIA DIDÁCTICA

Conditional probability as a decision making tool: a didactic sequence

Elicer, R.^a y Carrasco, E.^b

^aUniversidad Austral de Chile, ^bUniversidad Metropolitana de Ciencias de la Educación; correos electrónicos: raimundo.elicer@uach.cl^a, ecarrasc@gmail.com^b

Resumen

La apuesta y la estrategia son las vías para tomar decisiones ante la incertidumbre, de la que ciertamente no se puede rehuir. En particular, la probabilidad condicional surge como herramienta de análisis de una estrategia que se amolda a las nuevas condiciones. En el marco de la ingeniería didáctica, se entregan los elementos del análisis a priori de una secuencia didáctica que intenciona este uso. Se propone una secuencia que utiliza el problema de Monty Hall como juego diacrónico, que pone en juego la probabilidad condicional. Se conjetura el uso de elementos socioemocionales y una incorrecta percepción del espacio muestral por parte de los estudiantes, y se espera que de múltiples simulaciones emerja la necesidad de calcular correctamente la probabilidad de éxito según cada decisión.

Palabras clave: *probabilidad, condicional, decisiones, ingeniería, didáctica*

Abstract

Bet and strategy are the paths for decision making under uncertainty, a reality that one cannot avoid. Particularly, conditional probability arises as a tool for analyzing a strategy that molds to new conditions. Under the framework of didactic engineering, elements of the a priori analysis of a didactic sequence which emphasizes this use are given. A sequence which utilizes the Monty Hall problem as a diachronic game, jeopardizing conditional probability, is proposed. One can conjecture that students will use socioemotional elements and a wrong perception of the sample space to make decisions. It is likely to expect that after several simulations of the game the need for a correct calculation of success probability under each possible decision will arise.

Keywords: *probability, conditional, decisions, engineering, didactic*

INTRODUCCIÓN

Actualmente se reconoce la importancia de ser competente en probabilidad y estadística debido a la necesidad de un actuar en situaciones de riesgo o incertidumbre, cada vez más incorporadas a distintos entornos laborales y de vida. Al decir de Morin: “lo nuevo brota sin cesar; nunca podemos predecir cómo se presentará, pero debemos contar con su llegada” (Morin, 1999, pág. 11), ante lo cual precisa el autor que “importa (...) comprender la incertidumbre de lo real, saber que hay un posible aún invisible en lo real”. Ignorar esta incertidumbre o intentar minimizarla nos puede llevar a tomar decisiones frágiles, que pueden generar un impacto negativo apenas el escenario cambie (Taleb, 2012).

Se entenderá que situaciones de incertidumbre son aquellas en las cuales se debe tomar una decisión sin conocer el estado o evolución de todos los aspectos involucrados. Podemos considerar que el cruzar una calle transitada, en la cual el comportamiento de los demás conductores o peatones no es necesariamente conocido, es una situación de incertidumbre. Más claro es cuando se debe invertir

en acciones de empresas a varios años y no podemos establecer de modo certero la evolución de cada variable económica. Esto amerita tener que optar por decisiones diferentes que claramente tendrían consecuencias diversas.

Lo anterior, en particular el segundo caso, implica tener que medir y controlar el nivel de incertidumbre para poder tomar una mejor decisión bajo riesgo. Esto ha sido estudiado desde los años 40, conformando una matemática en la cual la probabilidad y la estadística son elementos centrales para la toma de decisiones.

Sin embargo, es un área del saber matemático que muestra, en Latinoamérica, bajos resultados. En PISA 2012 se muestra que más del 80% de los estudiantes evaluados no supera el segundo nivel de logro en el área de datos y azar (OECD, 2014). Es decir, en el mejor de los casos entienden y usan conceptos de probabilidad básicos en situaciones familiares como lanzamientos de dados y de monedas, no evidenciando la capacidad de realizar razonamientos en contextos simples.

Se suma a lo anterior que la probabilidad en las aulas se limite fuertemente al trabajo con juegos de azar y en particular al cálculo de la probabilidad de las diversas opciones de jugadas. Sin un enfoque hacia la toma de decisiones con información relevante. Esto se refleja en lo reportado por un estudio exploratorio respecto de estudiantes que prefieren mantener una decisión a pesar que la evidencia de probabilidad les muestra que es la con menor probabilidad de éxito. Al decir de algunos estudiantes: “me ha pasado que me cambio por dudar y pierdo”, “estaría más seguro quedándome con lo que elegí al principio, por el simple hecho de no arriesgar más”, “yo creo que ocurrió por azar solamente”. Esto supone la necesidad de innovar en situaciones de enseñanza y aprendizaje que permitan a los estudiantes constituir a las nociones de la probabilidad en una herramienta matemática para su actividad.

El presente reporte propone el diseño de una situación de enseñanza que involucra el estudio de la probabilidad en un contexto de toma de decisiones. En particular, se entregan los elementos del análisis preliminar y a priori, en el marco de la ingeniería didáctica.

Marco teórico y metodología

La probabilidad para la toma de decisiones

Entenderemos una situación de decisión bajo incertidumbre o riesgo como aquella en que no podemos tener toda la información respecto de las variables que impactarán en el desarrollo de los acontecimientos. Se suele separar una situación de riesgo (se conocen las probabilidades de todos los escenarios) de una situación bajo incertidumbre (no se conocen estas probabilidades) (Leitgeb y Hartmann, 2014). Pero utilizaremos indistintamente ambos conceptos, dado que en el contexto educativo intencionamos el uso de la probabilidad. Cruzar una calle transitada es una situación de incertidumbre en cuanto uno no conoce el comportamiento de todos quienes por ella circulan. Entonces la decisión respecto de que hacer se hace con la mejor información y conjeturando posibles comportamientos. En otro aspecto, los juegos de azar configuran situaciones de incertidumbre cuando, aun conociendo la probabilidad de los posibles sucesos, no es posible predecir los acontecimientos futuros. O en economía, una inversión ha de ser una apuesta en el corto o mediano plazo, pero conociendo no solo su rentabilidad esperada, sino además su variabilidad, esta apuesta cambia de valor.

Morin propone una salida para evitar el bloqueo ante estos escenarios. Lo primero es la conciencia del carácter de apuesta que tiene la acción. Le sigue la noción de estrategia, que debe prevalecer sobre el programa, puesto que se adapta a las nuevas condiciones y se diseña examinando las certezas e incertezas, las probabilidades e improbabilidades (Morin, 1999, pág. 48). De aquí se desprende la necesidad de contar con herramientas para modelar, medir y controlar la

incertidumbre, configurando así la probabilidad y la estadística como herramienta para la toma de decisiones.

Una estrategia se amolda a lo que va aconteciendo. En ese sentido, a medida que se adquiere nueva información sobre la situación en la cual se requiere tomar decisiones en escenarios inciertos, la noción de probabilidad condicional permite incorporar cambios en los grados de creencia sobre los posibles resultados, mejorando la toma de decisiones sobre la base de predicciones. De este modo se amplía el rango de experimentos a considerar en el aula. Esto mejora las oportunidades para una mayor comprensión y razonamiento sobre las nociones involucradas en el estudio de la inferencia estadística, así como de la asociación entre variables, la regresión y los modelos lineales (Batanero y Díaz, 2007).

Ingeniería didáctica

La ingeniería didáctica como método de investigación y diseño contempla cuatro fases: (1) análisis preliminar, (2) análisis a priori, (3) aplicación y (4) fase de contraste y rediseño (Ferrari, 2008). El análisis preliminar se construye desde una mirada socio-epistemológico en la cual se considera (a) la faceta histórico-epistemológica, que busca establecer una epistemología de la noción de probabilidad; (b) la faceta cognitiva, que se propone establecer aspectos propios del conocer de los estudiantes respecto de la probabilidad; (c) la faceta didáctica, que aborda el discurso matemático escolar presente en Chile respecto de la probabilidad; y (d) finalmente el aspecto sociocultural, que se imbrica en los tres anteriores, responde a considerar que la construcción de saber matemático, es un proceso sociocultural, normado por prácticas relacionadas con la probabilidad y la toma de decisiones. Esto permite avanzar en el desarrollo de una epistemología de prácticas en torno a la probabilidad.

A partir de esta epistemología se construye la secuencia didáctica que busca involucrar a los estudiantes en situaciones didácticas que promuevan las prácticas identificadas en la etapa anterior y las conjeturas respecto de los efectos didácticos de la secuencia (etapa que se reporta en esta ponencia). Para cada fase de la secuencia diseñada, se presuponen actuaciones estudiantiles identificando posibles estrategias que emergen en cada tarea y como los diversos momentos de la secuencia promueven la emergencia de lo proyectado.

Finalmente la aplicación y posterior contraste posibilita el rediseño de la secuencia, como la construcción de saber didáctico respecto de la construcción de las herramientas de probabilidad para la toma de decisiones.

En el análisis preliminar, los elementos histórico-epistemológicos se obtienen mediante la selección de autores y sus obras significativas en el desarrollo de la probabilidad, en particular, Pascal y Huygens. El análisis de la obra de cada autor se hace a partir de la construcción de una crónica del autor, de su contexto sociocultural y de su obra. Sobre ellos se sistematizan las prácticas que dan necesidad y sentido a la noción de azar y toma de decisiones. Respecto del análisis cognitivo, se recurre a tests exploratorios respecto de las concepciones de probabilidad de grupos de estudiantes, y su intuición para la toma de decisiones en el juego de Monty Hall (Batanero, Fernandez y Díaz, 2009). El análisis didáctico se realiza sobre los textos de enseñanza que entrega el gobierno de Chile a la Educación Pública y Particular Subvencionada, que cubre el 80% de su matrícula.

Para el análisis a priori, se asume una aproximación al problema de estudio en una espiral creciente de profundidad. Sobre esta base se han establecido dos etapas. En la primera, las conjeturas surgen de la sensibilidad teórica de los autores, mediada por el análisis preliminar construido. La segunda etapa es la aplicación a un grupo reducido de estudiantes y realización de un primer contraste entre las conjeturas iniciales y las actuaciones del grupo.

Estas actividades, si bien implican una primera vuelta a las facetas de la ingeniería didáctica, no abordan una situación de enseñanza en escenario escolar, sino a nivel experimental de grupo reducido. Esto posibilita una adecuación tanto de la secuencia, como de las conjeturas levantadas con miras a su aplicación en escenario escolar.

Para la aplicación a un grupo reducido se seleccionan al azar seis estudiantes de segundo semestre de bachillerato en ingeniería civil, conformando dos grupos de tres estudiantes. La secuencia se aplica en horario alterno a su jornada escolar. Para el registro de datos se usan grabadoras de audio en cada grupo, la filmación de su trabajo y la recopilación de todas las producciones estudiantiles.

Se transcriben los diálogos estudiantiles conformando el primer insumo de análisis. Luego se describen, de modo sintético, las actuaciones de los estudiantes para cada fase de la secuencia identificando aspectos relevantes de la actividad según los propósitos indagativos.

Finalmente partir del contraste entre la actividad identificada y las conjeturas, se ajusta tanto la secuencia, como las conjeturas levantadas en el primer momento.

RESULTADOS

Análisis preliminar

El análisis preliminar, reportado en Elicer y Carrasco (2015), establece a la noción de lo probable como algo que puede ocurrir y en la decisión del juego, cualquier alternativa posibilita el éxito. Con miras al diseño a priori, destacamos los siguientes elementos:

- **Histórico-epistemológicos.**

El análisis de la probabilidad, surge en la toma de decisiones proyectivas, es decir, en la necesidad de prever un reparto justo, o de dar una estrategia al jugador para apostar con ventaja. Este juego justo emerge antes de la noción de apostar con ventaja. El análisis de casos favorables v/s totales se constituye a partir de conocer todos los casos posibles. Luego la asociación de Huygens (Basulto, Camuñez, Ortega, y Pérez, 2004) entre situaciones de predicción, como el pronóstico de vida, con el juego de azar, permite resignificar la idea de probabilidad en el juego a la probabilidad a posteriori. Así los casos posibles se constituyen en los casos conocidos desde estadísticas.

- **Cognitivos.**

Los estudiantes recurren a razones no matemáticas para tomar su decisión, en que no suelen calcular una probabilidad, los casos obtenidos son los casos posibles, y no se ponderan. Reconocen que su decisión sería distinta en el escenario del juego, en el cual no se pide una decisión a priori, sino una in situ.

- **Didácticos.**

La principal actividad propuesta en el programa de estudio y los textos escolares, refiere a cálculos de probabilidad, no a la toma de decisiones ni a la predicción con “ventaja” de resultados de un juego.

Análisis a priori: diseño de la secuencia

De este modo, para el diseño de la secuencia se adoptan como central lo siguiente:

- **Apuesta con ventaja.**

Poder valorar comparativamente (ojalá cuantitativamente), cuál de las diversas opciones que se tienen lleva al éxito con mayor probabilidad o, eventualmente, certeza.

- **Juego justo.**

Identificar si un juego o reparto es justo, ponderando no solo la probabilidad de ocurrencia de un evento, sino además su beneficio o costo para cada parte. Se puede intencionar en casos en que los distintos escenarios son equiprobables.

- **Juego diacrónico.**

Diferenciar entre la toma de decisión instantánea, condicionada a la realización de una primera etapa, de la decisión estratégica prospectiva a los eventos que pueden ocurrir posteriormente.

- **Espacio muestral.**

Resignificar el espacio muestral a priori, de modo que no sean los estados finales de las variables los casos posibles, sino cada trayectoria o rama que lleva a ellos.

El primer momento busca que los estudiantes vivan situaciones de juegos de azar, creciendo en el nivel de complejidad del espacio muestral. Como devolución de la situación, el desafío inicial debe ser definir si el juego es o no justo, y posteriormente definir una estrategia que lo haga injusto a favor, es decir, para apostar con ventaja. Estos juegos serán:

1. Lanzamiento de 1, 2 y 3 monedas, en que cada jugador gana según cada cara o sello obtenido. Se busca definir en cada caso y en cada etapa, si el juego es justo con determinado pago. Posteriormente, se pide identificar el valor justo de la apuesta si el juego es interrumpido.
2. Juego de Monty Hall. El propósito no es buscar el juego justo, sino identificar las posibles ventajas, desventajas o indiferencia de la opción de cambio de puerta.

En el segundo momento, se les pedirá que argumenten el tipo de decisiones que tomaron los equipos de trabajo para que establecer estrategias y actuaciones en el juego que fueron más ventajosas. Para ello se usará una simulación del problema de Monty Hall. Los estudiantes deben decidir si se cambian de la puerta escogida en un principio cuando el animador lo ofrece. Deben señalar qué elementos los ayudaron a decidir. Se recurre a una planilla electrónica para la simulación y registro de los resultados del concurso. Posteriormente se usarán videograbaciones del concurso en versiones ocurridas en televisión, para situarlos de modo más realista.

Análisis a priori: conjeturas

Se presentan las conjeturas generales de la secuencia. Se espera que las decisiones tomadas por los estudiantes incorporen variables sociales y de empatía respecto del animador. Como argumentos principales para la mantención o cambio de puerta surgirán las tonalidades emocionales del animador del juego, así como su propia percepción respecto del posible fracaso en el juego. Los cálculos y análisis de probabilidades no emergerán naturalmente al ser enfrentado, pues considerarán que cada una de las dos puertas restantes tiene la misma probabilidad de ser exitosa, como al inicio del juego.

En la segunda etapa, a través de una simulación con planilla electrónica, las variables empáticas y emocionales respecto del juego no emergen. Los estudiantes construirán una estrategia basada en las probabilidades a posteriori del juego. Sin embargo, se espera que en las recomendaciones finales emerjan, en menor medida, algunos aspectos socioemocionales como parte de la estrategia.

En la revisión del juego en el escenario televisivo real, se espera que aumente la cantidad de estudiantes que deciden cambiarse de puerta respecto a su primera decisión, buscando algún modelo

o representación de la situación que calce con los resultados. Esto puede ser un diagrama de árbol, cálculo de probabilidades totales o análisis de qué significa ganar en cada decisión.

A partir del contraste de estas conjeturas con lo obtenido, se evidenciará el rol que toma el saber probabilístico en la toma de decisiones de los estudiantes, incluyendo la redefinición del espacio muestral que sugiere un juego diacrónico, bajo el concepto de probabilidad condicional. Adicionalmente, se intenciona la relación entre la probabilidad calculada a priori o teórica, que establece un espacio muestral finito, y la probabilidad a posteriori estimada según los resultados de los ensayos realizados.

CONCLUSIÓN

Lo avanzado en la metodología de la ingeniería didáctica ha posibilitado una mirada compleja a la constitución de la probabilidad como herramienta para la toma de decisiones.

En particular, podemos destacar cómo el diferenciar una decisión en una situación específica, es decir en el caso, de una decisión proyectiva que posiciona al estudiante en el fenómeno, muestra necesario trabajar situaciones didácticas que localiza a los estudiantes en escenarios de toma de decisión. Vivir el caso involucra mayores variables que cuando el fenómeno es analizado. Este último, ha vivido una constantificación de variables para su análisis (los mensajes corporales del animador en un concurso, los sentimientos respecto de una mala decisión, entre otros), que posibilita su modelación probabilística. Marca una diferencia además el que la decisión no se toma, solo se aconseja.

La probabilidad como herramienta para la toma de decisiones impacta principalmente en el análisis proyectivo de la ocurrencia de sucesos, y resta entonces indagar cómo este tipo de análisis en futuros profesionales, puede modificar sus actuaciones en la toma de decisiones específicas.

Referencias

- Batanero, C., y Díaz, C. (2007). *Probabilidad, grado de creencia y proceso de aprendizaje. XIII Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Granada.*
- Batanero, C., Fernandes, J. A., y Contreras, J. M. (2009). *Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicancias didácticas. Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas(62), 11-18.*
- Basulto, J., Camuñez, J., Ortega, F., y Pérez, M. (2015) *La correspondencia entre los hermanos Huygens en 1669: vida media frente a vida mediana. En Historia de la probabilidad y la estadística (II). Delta Publicaciones, 57-69. España.*
- Elicer, R., y Carrasco, E. (2014). *Juegos de azar diacrónicos: un espacio para el encuentro entre las creencias subjetivas y las probabilidades condicionales. XVIII Jornadas Nacionales de Educación Matemática (pág. 86). Santiago: Sociedad Chilena de Educación Matemática.*
- Elicer, R., y Carrasco, E. (2015). *La probabilidad condicional como herramienta para la toma de decisiones. Comunicación presentada en la Vigésima Novena Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 29). Ciudad de Panamá: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME).*
- Ferrari, M. (2008). *Un acercamiento socioepistemológico a lo logarítmico de multiplicar sumando a una primitiva. Tesis doctoral no pulicada.*
- Leitgeb, H., y Hartmann, S. (19 de Mayo de 2014). *Introduction to Mathematical Philosophy. Chapter 6: Decision. München, Alemania: Ludwig-Maximilians-Universität.*

Morin, E. (1999). Los siete saberes necesarios para la educación del futuro. París: UNESCO.

OECD. (2014). PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do - Student Performance in Mathematics, Reading and Science (Volume I, Revised edition, February 2014). PISA: OECD Publishing.

Pascal, B (1983) Cartas de Pascal a Fermat. En Blaise Pascal obras escogidas. Ed. Alfaguara 657-673. Madrid.

Taleb, N. N. (2012). Antifragile: Things that gain from disorder (Vol. 3). Random House Incorporated.