

CÁLCULO, PENSAMIENTO VARIACIONAL Y EL GEOGEBRA



Natividad Nieto Saldaña, Luis Esteban Macías Gutiérrez
 nnieto@uacj.mx , lmacias@uacj.mx
 Universidad Autónoma de Ciudad Juárez
 Laboratorio Tecnológico
 Tecnologías y recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
 Medio Superior y Superior

Resumen

El Geogebra es un software de geometría dinámica muy amigable, con el cual es posible diseñar archivos, que acompañados de una buena actividad didáctica, ayude a los estudiantes que se inician en el estudio del cálculo al arribo de algunos objetos de esta disciplina de una forma significativa y natural, privilegiando actividades tendientes a desarrollar el pensamiento y el lenguaje variacional, mediante tratamientos y conversiones entre los diferentes registros de representación semiótica.

Palabras clave: *Geogebra, pensamiento variacional, cambio*

1. Propósitos y alcance

En este taller se pretende desarrollar algunos archivos en los que mediante manipulaciones de arrastre se logre relacionar la variación funcional de áreas de figuras que dependan de alguna de sus partes. La relación entre diferentes registros de representación en problemas que involucren la variación y su forma de interpretar ésta, según el registro. Se pretende que durante el diseño de los archivos se desarrollen las actividades didácticas significativas relacionadas con la variación y objetos del cálculo, tales como función, dominio contextual y general, límite y derivada de funciones, de tal forma que los estudiantes logren una condición académica suficiente para posteriormente incursionar en la obtención de algunas reglas de derivación con significado.

Las actividades están dirigidas a profesores y estudiantes de los niveles medio superior y superior interesados en el diseño de actividades tendientes a lograr que los objetos del cálculo sean concebidos de forma más natural y significativa, de tal forma de que no se privilegien exclusivamente actividades tendientes a obtener primitivas y derivadas tal como suele ocurrir en la práctica docente tradicional.

2. Marco teórico conceptual

Los archivos diseñados con el Geogebra se acompañan de actividades didácticas sustentadas en la Teoría de las Situaciones Didácticas de G. Brousseau (1997) en donde el medio lo constituye el problema que se pretende resolver con el software y del cual se intenta arribar al conocimiento de algunos objetos del cálculo que se desprenden del proceso de la solución.

Los registros de representación Semiótica de Duval (1998), en los que los tratamientos y las conversiones se logran de forma natural y además necesaria, ya que en el manejo de los archivos con frecuencia aparece:

- El lenguaje natural, que describe las condiciones del problema además de proporcionar los datos del mismo
- Las gráficas, que bajo la perspectiva del pensamiento variacional no son vistas como un objeto final de estudio, en éstas, es importante la lectura que se haga de observaciones

tales como la parte del plano en donde se encuentran, y con simples inspecciones podemos ver la dirección de la variación, y asociar la concavidad con la rapidez de la variación.

- Las tablas numéricas o los valores de magnitudes que aparecen en los archivos nos permiten las conversiones y tratamientos entre este registro numérico y los otros.
- Los registros de representación pictórica o figural también aparecen en la ambientación de problemas de movimiento y optimización, como en el caso de la cajita en el que se observa la forma que toma ésta cuando los valores del corte de los cuadrados de las esquinas de la pieza varían.

3. Metodología

Es deseable que cada participante tenga acceso a una computadora en la que se disponga del software Geogebra el cual es libre y se encuentra disponible en la internet. Las potencialidades del software serán mostradas con archivos previamente diseñados para luego iniciar en el reconocimiento de las herramientas más usuales de éste y finalmente los instructores del taller se abocarán al diseño de archivos en forma simultánea con los participantes a la vez que se discuten las formas idóneas de llevarlos al aula mediante diseños didácticos que privilegien el pensamiento variacional tratando de que los usuarios naveguen de manera congruente entre las diferentes formas de representación semiótica de los objetos matemáticos en juego.

Actividades (Construcción de la caja sin tapa)

De una pieza cuadrada de lámina de lado cinco se construye una caja abierta, cortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando adecuadamente las pestañas que quedan en los lados.

- Diseño del Archivo con el Geogebra
 1. Proceso de la construcción.
 2. Con la herramienta Nuevo Punto trazamos el punto A.
 3. En la parte de entrada ingresamos $(x(A)+5,y(A))$.
 4. Con la herramienta Rota objeto entorno a punto, el ángulo indicado trace la rotación del punto B alrededor del punto A con un ángulo de 90° .
 5. Con la herramienta Punto medio o centro trazamos el punto medio entre los puntos B y B'.
 6. Con la herramienta Refleja objeto por punto reflejamos el punto A en C.
 7. Con la herramienta Polígono trace el cuadrilátero ABA'B'.

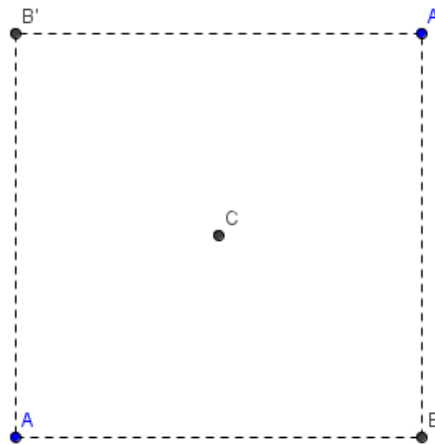


Figura 1. La pieza cuadrada

8. Trace el punto medio entre los puntos A y B.
9. Con la herramienta segmento trace el segmento AD.
10. Trace un punto sobre el segmento AD.1
11. Trace la rotación del punto E alrededor de A con un ángulo de 90° .
12. Trace la rotación del punto A alrededor de E' con un ángulo de 90° .

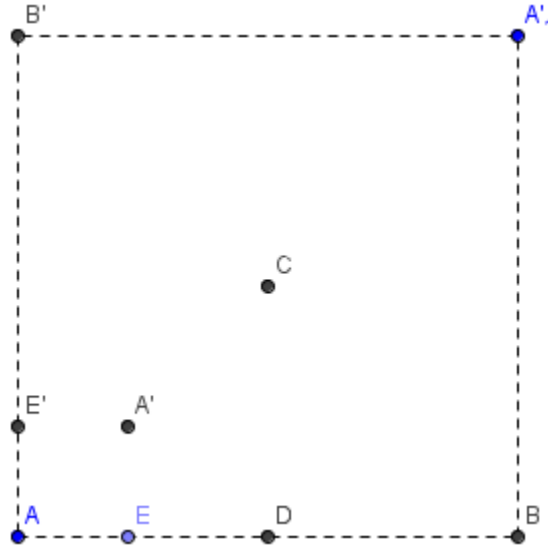


Figura 2. Corte en la primera esquina

13. Reflejamos el Punto E' con respecto al Punto C.
14. Reflejamos el Punto A' con respecto al Punto C.
15. Reflejamos el Punto E con respecto al Punto C.

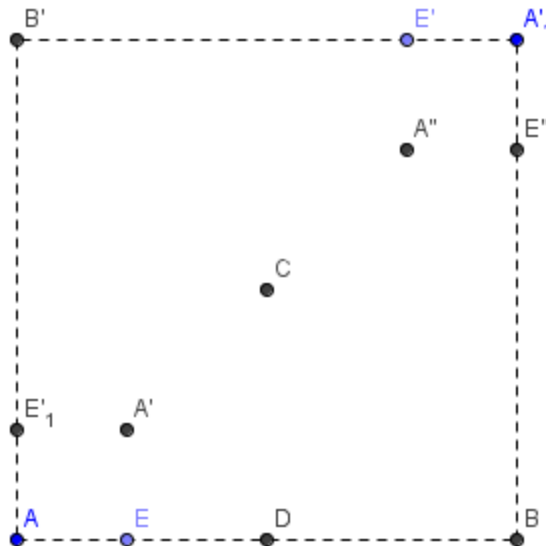


Figura 3. Corte en la esquina opuesta

16. Reflejamos el punto E con respecto al punto D.
17. Trace la rotación de B alrededor de E' con un ángulo de 90° .
18. Trace la rotación de E' alrededor de B' con un ángulo de 90° .

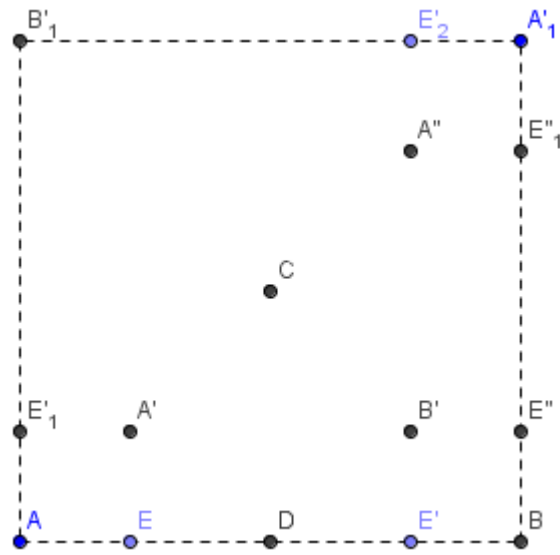


Figura 4. Corte en tres esquinas

19. Reflejamos el Punto E''' con respecto al Punto C.
20. Reflejamos el Punto B' con respecto al Punto C.
21. Reflejamos el Punto E' con respecto al Punto C.
22. Trace el polígono mostrado en la siguiente figura

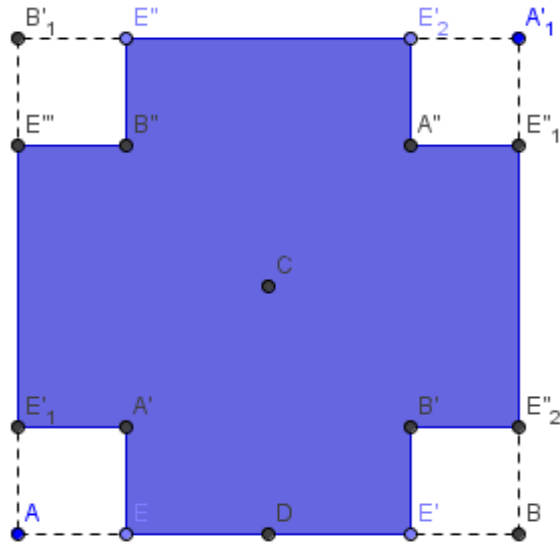


Figura 5. Pieza coloreada con el corte en todas las esquinas

23. Trace el polígono $A'B'A''B''$.
24. Trace la distancia AE y llámela Corte.
25. Con la herramienta vector trace los vectores u y v como se muestran en la siguiente figura.

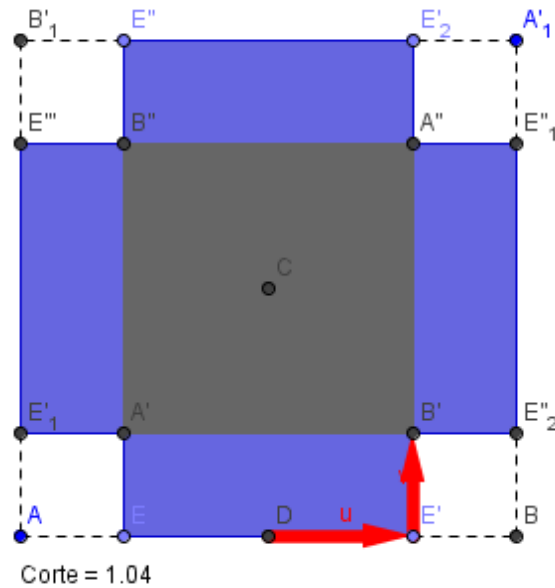
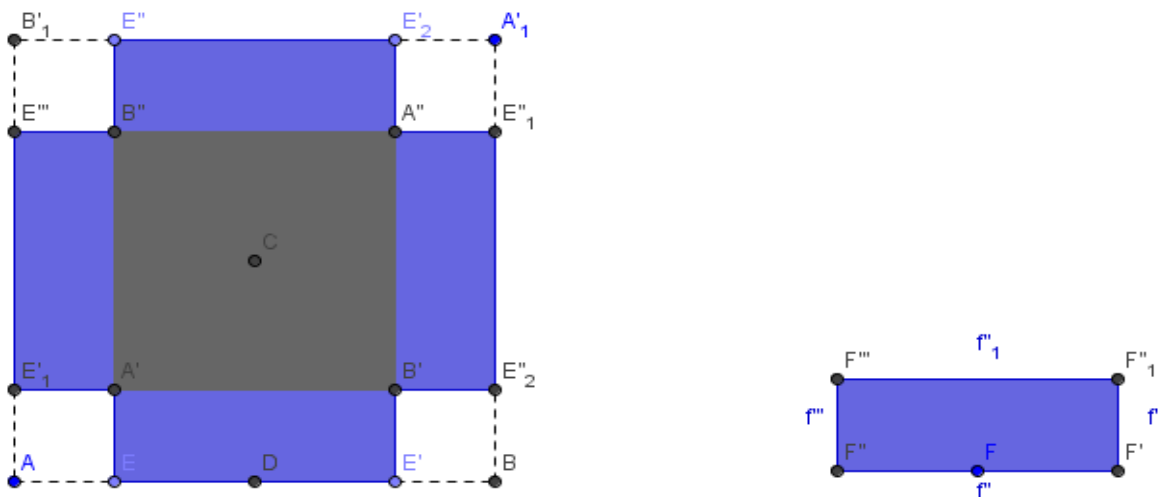


Figura 6. Pieza con vectores para traslaciones

26. Trace un punto en cualquier parte del plano cartesiano.
27. Con la herramienta Traslada objeto por un vector, traslade el punto F con respecto al vector u.
28. Traslade el punto F' con respecto al vector v.
29. Refleje el punto F' con respecto al punto F.
30. Traslade el punto F'' con respecto al vector v.
31. Trace el polígono que se muestra en la figura y oculte los vectores u y v.



Figuras 7. La pieza con los cortes y el frente de la cajita

32. Trace la rotación de F' alrededor de F'' con un ángulo de 30 °.
33. Trace la rotación de F'' alrededor de F' con un ángulo de 150 ° pero con sentido horario.
34. Trace la rotación de F''' alrededor de F''1 con un ángulo de 150 ° pero con sentido horario.
35. Trace la rotación de F''' alrededor de F''1 con un ángulo de 30 °.
36. Trace los siguientes polígonos de tal forma que se construya la caja sin tapa.

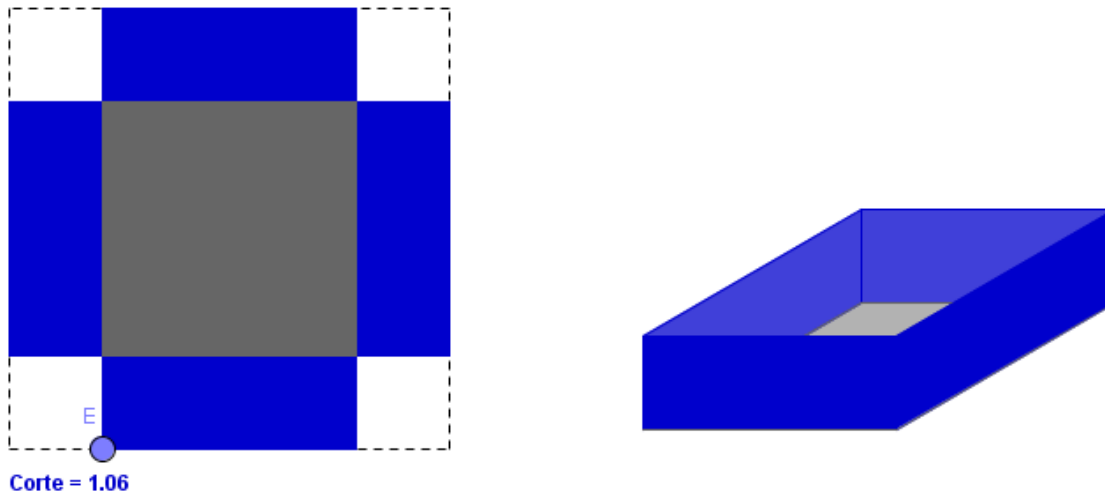


Figura 9. Simulación de la cajita dependiendo de la variable corte

37. En la parte de entrada ingrese el punto $(\text{Corte}, 4\text{Corte}^3 - 20\text{Corte}^2 + 25\text{Corte})$.
 38. Trace el lugar Geométrico del punto J al mover el punto E.

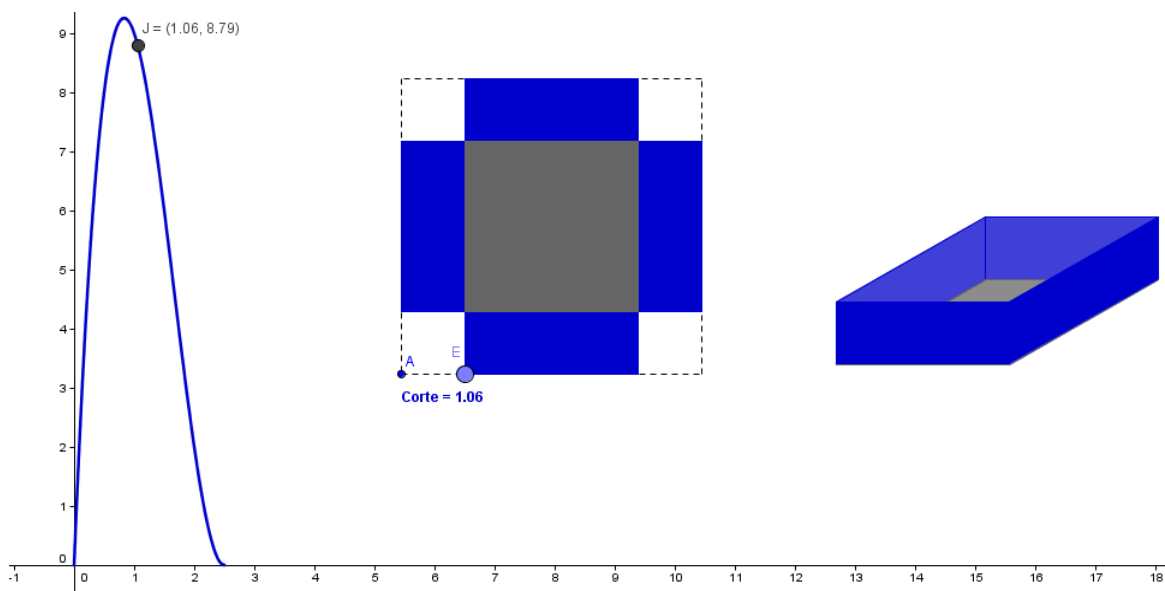


Figura 10. Pieza, cajita y gráfica de la función volumen

El archivo construido para el problema de la cajita deberá estar acompañado de actividades didácticas que se producirán como consecuencia de la manipulación del mismo. Se espera generar preguntas e instrucciones que lleven a la manipulación de objetos matemáticos tales como el domino contextual de la función que nos modela simbólicamente el problema de calcular el volumen de la cajita. El insinuar valores de la longitud del corte de los cuadrados de las esquinas para los cuales el problema carece de sentido, ayuda a reflexionar acerca del significado del domino contextual. Además de proponer preguntas relacionadas con la forma en que se da la variación del volumen cuando la variable independiente cambia, que en este caso es la longitud del corte de los cuadrados.

Las preguntas acerca de la variación tendrán relación con la dirección de ésta y con la rapidez con la que ocurre, además se pedirá a los usuarios del archivo que calculen los valores del volumen correspondientes a algunos valores del corte y que los grafiquen, para posteriormente realizar la gráfica suave de la función con la finalidad de que puedan concluir que si se debe obtener el máximo volumen, éste se encuentra en la ordenada del punto más alto de la gráfica y en todos los casos de estos cuestionamientos están presentes diferentes registros de representación de los objetos matemáticos que aparecen en escena.

Por supuesto que en este taller se diseñarán más construcciones que ambienten problemas de variación, relacionados con la optimización y razones relacionadas en donde la derivada es vista como el cuantificador de la variación instantánea.

4. Consideraciones finales

La propuesta pretende acercar significados que estén en la realidad y al alcance de los estudiantes de cálculo, de tal forma que con un adecuado manejo de los archivos y actividades didácticas por los docentes, se arribe a los objetos de la disciplina de una forma significativa y se deje de privilegiar actividades que abusan de los algoritmos para obtener primitivas y derivadas carentes de significado para los estudiantes.

5. Referencias

- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher. Edited and translated by Nicolas Balachef, Martin Cooper, Rosamund Sutherland and Virginia Warfield.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Edita: Universidad del Valle y Peter Lang S.A. Cali. Colombia.