

## EL APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Marco Aurelio Torres Bustos, Darly Alina Kú Euán

matematicas\_tareas@hotmail.com, ku.darly@gmail.com

Universidad Autónoma de Zacatecas

Avance de Investigación

Pensamiento numérico y algebraico

Nivel Básico

### RESUMEN

Una de las problemáticas que surge en torno a la enseñanza y aprendizaje del concepto ecuación de primer grado, está relacionada con el significado que puede tener la solución de una ecuación de primer grado en torno a la resolución de problemas, es decir, los estudiantes no comprenden su significado (Pochulu y Vargas, 2006, citados en Abrate, et, al. 2008). De acuerdo a ello, en esta investigación, se utilizará como sustento teórico la teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema) (Dubinsky et al., 2013) pues brindará al trabajo un marco de referencia sobre las construcciones mentales que un estudiante debe desarrollar sobre el concepto de ecuación de primer grado; y por otra parte incluiremos la teoría de Modelos y Modelación (Lesh, 2003) que proporcionará los elementos necesarios para el diseño de actividades, lo cual brindará información sobre la comprensión de la solución de una ecuación de primer grado.

**PALABRAS CLAVES:** ecuación de primer grado, construcciones mentales, concepto de ecuación de primer grado, álgebra, esquemas. APOE, Modelos y Modelación, descomposición genética.

### INTRODUCCIÓN

En matemáticas, se utiliza un lenguaje que facilita la resolución de problemas y operaciones. Con el podemos comunicarnos de tal forma que se pueden simbolizar y representar mensajes matemáticos. El lenguaje algebraico consta principalmente de las letras de alfabeto; la principal función de lenguaje algebraico es estructurar un idioma que ayude a generalizar las diferentes operaciones que se desarrollan dentro de la aritmética. Además también ayuda mantener relaciones generales para razonamiento de problemas a los que se puede enfrentar cualquier alumno en la vida cotidiana.

Uno de los contenidos matemáticos en donde el alumno presenta mayor dificultad con respecto a su aprendizaje es el álgebra. Según Palarea y Socas (1994) los conceptos matemáticos vinculados con el álgebra y su operatoria, muestran con frecuencia dificultades y conflictos para los estudiantes. Asimismo Tall (1989, citado en Palarea y Socas, 1994) argumenta que cuando se concibe una expresión algebraica como un objeto matemático, más que como un proceso, puede llegar a ser una fuente que genere conflicto; esto debido a la forma de abordarse y sobre todo a como la percibimos desde un enfoque lineal; tal y como señala Rivero (2000) la escuela elemental se basa en el aprendizaje mecánico de reglas para manejar los símbolos, carentes de significado y sin referentes concretos. Este tipo de enseñanza tradicional del álgebra, generalmente conduce al alumno a un simbolismo carente de significado, que no le permite acceder a la abstracción matemática, ni hacer explícita su relación con la aritmética. El álgebra

requiere un cambio en el pensamiento del estudiante de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones (Kieran y Filloy, 1989). La mayoría de los cursos de álgebra elemental comienzan con los términos literales, con el uso y tratamiento de expresiones algebraicas sencillas hasta llegar a formular ecuaciones o funciones para resolver problemas. De acuerdo a ello, nuestro interés recae en el estudio del concepto de ecuación de primer grado, puesto que son estudiadas durante prácticamente toda la vida escolar, desde primaria hasta la universidad. Además Maffey (2008) menciona que el aprendizaje de este tema se incrementa cuando se considera que los procesos mentales asociados a éste generan competencias tales como la capacidad de razonar de manera ordenada y sistemática y de manejar un lenguaje simbólico para encontrar soluciones, entre otras.

Por otra parte, en el trabajo de Velasco (2012) sobre la comprensión del concepto de ecuación de primer grado, se menciona que es necesario distinguir el proceso de búsqueda de la solución de una ecuación del proceso de comprobación de que el conjunto encontrado es solución, pues son conceptos matemáticos diferentes que suelen ser interpretados como iguales por los estudiantes y esto crea muchas dificultades en la construcción del esquema ecuación de primer grado. Asimismo, la autora realizó algunas sugerencias para investigaciones posteriores en la misma línea de investigación. En particular, sugirió realizar investigaciones sobre el concepto de ecuación de primer grado desde la perspectiva APOE, es decir, desarrollar una nueva descomposición genética en la que intervengan otras construcciones mentales diferentes a las que propuso en su investigación; y que se diseñen los instrumentos cuidando más la redacción para que permitan rastrear el uso de las construcciones en términos de acciones, procesos y objetos antes de usar esquemas como se hizo en su investigación. Además sugirió el uso de la perspectiva de modelos y modelación para el diseño de actividades.

De acuerdo a ello, y al interés por el aprendizaje del concepto ecuación de primer grado; este proyecto de investigación se enfocará en el estudio del aprendizaje y enseñanza del concepto ecuación de primer grado, e intentará dar evidencia de la construcción de este concepto a través de las actividades de modelación con estudiantes de secundaria.

La tesis de Velasco (2012) da un panorama sobre la problemática que surge a nivel bachillerato con respecto al aprendizaje del concepto de ecuación de primer grado. Sin embargo, en esta investigación, nos interesa indagar sobre el aprendizaje del concepto de ecuación de primer grado a nivel secundaria. De acuerdo a la tesis de Velasco (2012) el aprendizaje del concepto de ecuación de primer grado en secundaria, se percibe que existe una problemática en ambos niveles (secundaria y bachillerato) que es constante. Es decir, se sigue reflejando la dificultad con respecto al papel que juega el signo de igual en una ecuación de primer grado. Y por otra parte, Abrate, Pochulu y Vargas (2006, citados en Abrate, Font, y Pochulu. 2008) mencionan que la resolución de ecuaciones de primer grado desencadena una gran cantidad de errores que se reflejan en las producciones y formas en que dan solución; las dificultades que estos autores encuentran se insertan dentro de los problemas generales de enseñanza y aprendizaje del álgebra, en la escuela secundaria.

Dado que nos interesa indagar sobre la comprensión del concepto de ecuación de primer grado a nivel secundaria a través de la modelación, surge la siguiente pregunta:

*¿Cómo los estudiantes del nivel secundaria llegan a comprender el concepto de ecuación de primer grado a través de las actividades de modelación?*

De acuerdo a ello, se desprende el siguiente objetivo general: Analizar las construcciones mentales que realizan los estudiantes de secundaria sobre el concepto de ecuación de primer grado al resolver actividades de modelación.

Los objetivos específicos que ayudarán a llevar a cabo el objetivo general y responder a la pregunta de investigación, son los siguientes:

- Adaptar la descomposición genética del concepto ecuación de primer grado de la tesis de Velasco (2012) para implementarla en secundaria.
- Diseñar actividades de modelación basadas en la descomposición genética del concepto de ecuación de primer grado.
- Identificar las construcciones y mecanismos mentales que realizan los estudiantes de secundaria sobre el concepto de ecuación de primer grado al resolver actividades de modelación.
- Analizar las estrategias que utiliza el alumno de secundaria al resolver actividades de modelación que involucran ecuaciones de primer grado.

Mediante estos objetivos pretendemos que nuestro trabajo de cuenta de las construcciones mentales que realiza el alumno de secundaria al tratar de resolver ecuaciones de primer grado mediante la reflexión que implica el modelar y resolver situaciones reales.

### MARCO DE REFERENCIA

En esta investigación hemos empleado como marco de referencia a la teoría APOE (Dubinsky et al., 2013) y la teoría de Modelos y Modelación (Lesh y Doerr, 2003).

- La Teoría APOE

La Teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Eschema), nos permitirá ver los procesos que realiza un estudiante para comprender conceptos matemáticos que resultan de la construcción o reconstrucción de acciones, procesos y objetos que se organizan en esquemas a fin de usarlos en situaciones de resolución de problemas (Velazco, 2012)..

Dubinsky (citado en Kú, 2012) aclara qué es lo que se entiende por conocimiento matemático y su desarrollo en un estudiante según este enfoque teórico:

“El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones procesos y objetos matemáticos y organizando en esquemas con el fin de manejar las situaciones” (Dubinsky, 1996, p.32-33)

De acuerdo a ello, se describirán las construcciones mentales (acción, proceso, objeto y esquema) mencionadas anteriormente:

*Acción:* Una acción consiste en una transformación de un objeto que es percibida por el individuo como externa y se realiza como una reacción a sugerencias que proporcionan detalles de los pasos a seguir (Asiala *et al.*, 1996).

*Proceso:* Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso. Es decir se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción en la mente del individuo, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo

externo. Un individuo que tiene una concepción de proceso de una transformación puede reflexionar sobre, describir, o incluso invertir los pasos de la transformación sin realizar dichos pasos (Asiala *et al.*, 1996).

*Objeto*: Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto. En este caso, decimos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto (Asiala *et al.*, 1996).

*Esquema*: Se puede decir que un esquema es una colección coherente de acciones, procesos y objetos y otros esquemas que se tienen para un concepto en particular (Asiala *et al.*, 1996).

Por otra parte, Trigueros y Oktaç (2005, citados en Velazco, 2012) mencionan que en la teoría APOE la construcción del conocimiento matemático pasa por tres etapas principales: acciones, procesos y objetos. El paso por esas tres etapas no es necesariamente lineal. Un individuo puede permanecer mucho tiempo en etapas intermedias o incluso estar en una etapa de construcción para cierta parte de un concepto, y en otra para otros. Lo que es realmente lineal es que la forma de trabajo que un individuo pone de manifiesto frente a diversas situaciones problemáticas es diferente cuando responde de una manera que puede caracterizarse en la teoría como un proceso, un objeto o bien una acción (p.159).

En la teoría APOE la herramienta que permite estudiar la manera en que se construye el conocimiento matemático es llamada descomposición genética. En ella se describen los aspectos cognitivos de una porción del conocimiento matemático y por tanto las relaciones que se identifican entre las construcciones mentales involucradas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos por parte del individuo. Una descomposición genética es una descripción detallada de las construcciones y mecanismos mentales que un individuo puede hacer para trabajar con éxito con un concepto matemático en concreto (Dubinsky *et al.*, 2013).

- Teoría de Modelos y Modelación

La teoría de Modelos y Modelación (Lesh y Doerr, 2003) proporcionará los elementos necesarios para el diseño de actividades que involucran al concepto de ecuación de primer grado. Por tanto entendemos por modelación como un contexto de aprendizaje, donde hay una intencionalidad de generar aprendizaje matemático, podemos decir entonces que *modelación* o su sinónimo *construcción de modelos* es todo el proceso que lleva desde comprender el problema real, identificar sus elementos, convertirlo en un *modelo matemático* y resolver la situación dentro del lenguaje propio de la matemática, hasta la interpretación de la solución en la realidad, además de la verificación de que la respuesta obtenida realmente satisfaga las condiciones de aquello que se desea resolver (Blum & Niss, 1991, p.40, citado en Velasco 2012).

El objetivo que se persigue en el marco de Modelos y Modelación es preparar a los estudiantes en la solución de problemas que enfrentan fuera de la escuela, es decir, toman problemas extraídos de contextos fuera del ámbito escolar en la realidad más próxima al estudiante y tratan de relacionar este tipo de problemas con los temas que se estudian en las matemáticas escolares (Lesh y Doerr, 2003, citado en Velasco 2012). Por tanto, este marco de referencia brinda los elementos teóricos que permitirán el análisis de los procesos que realizan el alumno al convertir situaciones del mundo real a situaciones meramente matemáticas. Lo cual permitirá ver la manera

de cómo los estudiantes tratan de dar solución a dichas situaciones y sobre todo tratar de entender el razonamiento empleado para dicho fin.

### MÉTODO

Para analizar las construcciones mentales que realizan los estudiantes de secundaria al modelar situaciones que involucran el concepto de ecuaciones de primer grado, se tomará la descomposición genética utilizada por Velasco (2012) con el objetivo de realizar una adaptación para estudiantes de secundaria. Además se diseñarán diversas actividades que orienten al alumno a utilizar la modelación como una herramienta para su aprendizaje. Posteriormente, se aplicarán las actividades a un grupo de alumnos de secundaria, y finalmente se analizarán los resultados obtenidos de la aplicación. Por otra parte procederemos a realizar un análisis de las estrategias que utilizan el alumno de secundaria al resolver ecuaciones de primer grado, cuando modelan.

### REFLEXIONES/CONCLUSIONES

A manera de conclusión podemos mencionar que el trabajo de investigación que presentamos se encuentra en su etapa inicial, en la cual se han elaborado los antecedentes que han permitido reflexionar sobre la enseñanza y aprendizaje acerca de la solución de una ecuación de primer grado. Con respecto a ello, hemos encontrado que los alumnos presentan dificultades, que no les permiten construir y reafirmar el concepto de ecuación de primer grado con respecto a su solución. Por tal motivo, consideramos importante la realización de este trabajo para rescatar las diferentes construcciones mentales que realizan los estudiantes al comprender el concepto de ecuación lineal. Además creemos que la escasez de trabajos apoyados en las teorías APOE y Modelación en el nivel secundaria resalta la importancia del trabajo que se pretende realizar.

### BIBLIOGRAFÍA

- Abrate, R.; Font, V. y Pochulu, M. (2008). Obstáculos y dificultades que ocasionan algunos modelos y métodos de resolución de ecuaciones. *Proyecciones* 6 (2), 49-56.
- Asiala, M., Brown, A., Devries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A.H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education*, 2, 1-32. Providence, RI: American Mathematical Society.
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. & Weller, K., (2013). APOS theory—a framework for research and curriculum development in mathematics education. New York: Springer.
- Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 26(3), 327.
- Kieran, C., & Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), 229-240.
- Kú, D. (2012). Análisis sobre la comprensión de los conceptos conjunto generador y espacio generado desde la mirada de la teoría APOE. Tesis de doctorado no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México.
- Lesh, R. and Doerr, H. M. (Eds.). (2003). Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

- Maffey G. S. G. (2008). Estudio sobre la Meta Cognición y Competencia de Profesores y Estudiantes con relación al tema de las Ecuaciones Lineales. Tesis inédita de Doctorado I. P. N. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. México, D. F.
- Rivero, F. (2000) Resolviendo las ecuaciones lineales con el uso de modelos. Notas de Matemática. *Revista del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias*. Universidad de Los Andes, Mérida – Venezuela. Vol. 1, N°. 201.
- Socas, M. M. R., & Palarea, M. M. M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (16), 91-98.
- Socas, M. M. R. (1999). Perspectivas de investigación en pensamiento algebraico. In Actas del III SEIEM: Valladolid, 1999 (pp. 261-282). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Socas, M. M. R. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria: Aportaciones de la investigación. *Números*, (77), 5-34.
- Velasco, K. (2012). Modelación de situaciones reales con ecuaciones de primer grado desde la perspectiva APOE: un estudio a nivel bachillerato. Tesis de Maestría CINVESTAV-IPN. México. D.F. México