Estudio de las funciones a través de la visualización gráfica

Roy Sánchez Gutiérrez*

Mariano González Ulloa*

Resumen

En este taller se tratarán conceptos básicos del Cálculo en una variable usando una computadora. Los temas a desarrollar son: gráfica de curvas en coordenadas polares y de funciones de una variable, resolución de ecuaciones no lineales y descripción de las funciones hiperbólicas a través de aplicaciones a algunos problemas físicos.

Palabras claves: Coordenadas polares, punto fijo, funciones hiperbólicas, sucesiones convergentes.

Introducción

En el presente taller desarrollaremos conceptos matemáticos con el apoyo de la tecnología informática. Formaremos un sistema de comunicación entre los docentes, los participantes al taller y los conceptos matemáticos seleccionados.

Relacionaremos desde un punto de vista gráfico los siguientes temas del análisis: curvas en coordenadas polares, solución de ecuaciones no lineales y funciones hiperbólicas.

Es complicado obtener la gráfica de algunas curvas en el plano si se trabajan con coordenadas cartesianas; sin embargo si convertimos la ecuación que representa dicha curva a coordenadas polares resultan más fáciles de graficar.

No existe una forma analítica para resolver ecuaciones no lineales que incluyan funciones trascendentes, sin embargo con

* Pontifícia Universidad Católica del Perú

el método de **Punto Fijo** podemos mostrar la existencia de una solución y luego obtener una aproximación a dicha solución.

Cada profesor participante en el taller contará con una computadora para corroborar los conceptos matemáticos desarrollados en la parte teórica.

Objetivos

Los principales objetivos del taller son:

- Representar gráficamente curvas en coordenadas polares, funciones hiperbólicas y las aproximaciones a un cero de una función.
- Aplicar los conceptos y resultados del análisis en una variable para resolver ecuaciones no lineales.
- Mostrar la utilidad de la computadora en el estudio de temas del cálculo en una sola variable.
- Representar los cables colgantes de los postes de electricidad como una curva conocida como La Catenaria.

1. Coordenadas Polares

El sistema de coordenadas polares está formado por un punto O denominado polo (u origen) y una semirrecta OL que parte del polo hacia la derecha denominado eje polar (Figura 1).

Figura 1

El polo O es el centro de referencia y la línea OL es el eje polar, a partir de la cual se miden los ángulos. Cada punto del plano (distinto al origen), de acuerdo a este sistema de referencia, corresponde a un par de coordenadas (r; θ) donde r es la distancia del punto al *polo* y θ es el ángulo positivo en sentido contrario a las agujas del reloj (anti-horario) medido a partir del eje polar. La distancia se conoce como la «coordenada radial»

mientras que el ángulo es la «coordenada angular» o «ángulo polar».
En el caso del origen, el valor de r es cero, pero el valor de θ es indefinido. En ocasiones se adopta la convención de representar el origen por (0; 0º).

Por ejemplo el punto (3; 60º) en el sistema de coordenadas polares está representado mediante el siguiente gráfico:

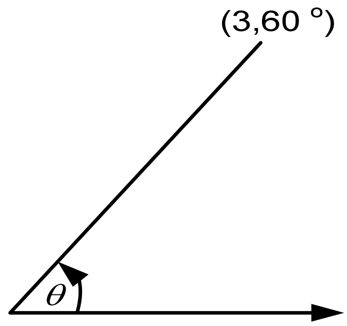


Figura 2

Para ubicar el punto (3; 60º) en este sistema, primero medimos el ángulo de 60º a partir del eje polar en sentido anti-horario, luego sobre el lado terminal de dicho ángulo a partir del polo medimos 3 unidades.

Notas:

1. Un aspecto importante del sistema de coordenadas polares, que no está presente en el sistema de coordenadas cartesianas, es que un punto del plano puede representarse de infinitas formas en coordenadas polares. En general, el punto $(r;\ \theta)$ se puede representar como $(r;\ \theta \pm n{\times}360°)$ o $(-r;\ \theta \pm (2n + 1)\ 180°)$, donde n es un número entero cualquiera.

2. Se puede decir entonces que en el sistema de coordenadas polares no se puede establecer una función biyectiva entre los puntos del plano y las coordenadas polares. Para obtener una única representación de un punto, se suele limitar r a

números no negativos $r \geq 0$ y θ al intervalo [0, 360°) o (−180°, 180°] (en radianes, [0, 2π) o (−π, π]).

Los ángulos en notación polar se expresan normalmente en grados o en radianes, dependiendo del contexto. Por ejemplo, las aplicaciones de navegación marítima utilizan las medidas en grados, mientras que algunas aplicaciones físicas (especialmente la mecánica rotacional) y la mayor parte del cálculo matemático expresan las medidas en radianes.

Si θ está en radianes entonces (r; θ) es un par de números reales.

Existe una relación entre las coordenadas cartesianas y las coordenadas polares. Una ecuación en coordenadas cartesianas se puede expresar en coordenadas polares mediante las ecuaciones de conversión.

Conversión de coordenadas

Sea P un punto con coordenadas cartesianas ($x; y$) y coordenadas polares (r; θ) entonces estas coordenadas están relacionadas por

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\,sen(\theta) \end{aligned} \qquad (1)$$

La figura 3 muestra la relación entre coordenadas cartesianas y polares del punto P.

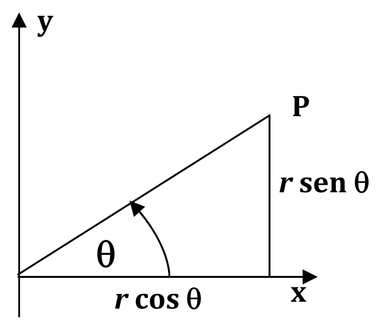


Figura 3

Para explicar esta relación superponemos el plano de coordenadas cartesianas con ejes XY y centro el punto O con el sistema de coordenadas polares constituido por el polo, el eje polar y la recta vertical eje a 90º.

Dado un punto P del plano en coordenadas polares (r; θ), θ medido a partir del eje X, y su distancia r al origen de coordenadas, se tiene las ecuaciones en (1).

Considerando el mismo punto P, ahora con sus coordenadas rectangulares (x,y), las coordenadas polares r y θ están dadas por

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right); x \neq 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Para determinar la coordenada angular θ, se debe distinguir dos casos

- Para r = 0, el ángulo θ puede tomar cualquier valor real.
- Para $r \neq 0$, el único valor de θ, debe limitarse a un intervalo de tamaño 2π. Por convención, uno de los intervalos utilizados es [0, 2π).

Para obtener θ en el intervalo [0, 2π), se debe considerar una de las siguientes expresiones:

$$\theta = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}), & x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \end{cases}$$

Ecuaciones polares

Ecuación polar es la ecuación que define una curva algebraica expresada en coordenadas polares. En muchos casos se puede especificar tal ecuación definiendo r como una función de θ. La curva resultante consiste en una serie de puntos en la forma (r(θ); θ) que se puede representar como la gráfica de una función r.

Simetría

Debido a la naturaleza circular del sistema de las coordenadas polares, muchas curvas se pueden describir aprovechando su simetría con una simple ecuación polar, mientras que en su forma cartesiana sería mucho más difícil de graficar.

Una gráfica es

1. Simétrica con respecto al eje polar si se obtiene una ecuación equivalente cuando se sustituye $(r;\,\theta)$ por $(r;-\theta)$ ó $(-r;\,\pi-\theta)$.
2. Simétrica con respecto al eje $\frac{\pi}{2}$ si se obtiene una ecuación equivalente cuando se sustituye $(r;\theta)$ por $(r;\,\pi-\theta)$ ó $(-r;-\theta)$.
3. Simétrica con respecto al polo si se obtiene una ecuación equivalente cuando se sustituye $(r;\theta)$ por $(-r;\theta)$ ó $(r;\pi+\theta)$.

Graficaremos algunas de las curvas más conocidas tales como circunferencia, rosa polar, espiral de Arquímedes, lemniscata, caracol de Pascal y caracoles.

Circunferencias

De la ecuación de la circunferencia con centro (0; 0) y radio 4, $x^2+y^2=16$, (figura 4) se deduce que su ecuación en coordenadas polares es r (θ) = 4 ó r (θ) = -4.

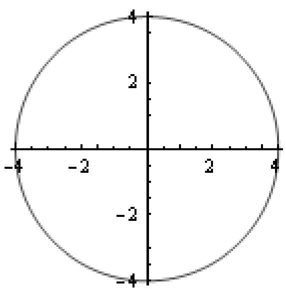


Figura 4

Ahora, sea C una circunferencia que pasa por el polo (origen de coordenadas) y tiene centro en $(a;b)$ entonces la ecuación cartesiana de C es $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2$.

Simplificando se tiene $x^2-2ax+y^2-2by=0$.

Pasando a coordenadas polares, su ecuación polar es $r=0$ ó $r =$ $2a\cos\theta + 2b\,\text{sen}\,\theta$

Por ejemplo, si $a = 2$, $b=0$ entonces $r=4\cos\theta$ es una circunferencia con centro (2; 0) y radio 2, tangente al eje vertical. Figura 5.

Si $a=0, b=-3 \Rightarrow r=-6\,sen\theta$, tiene centro en (0,-3) y radio 3, tangente al eje horizontal.

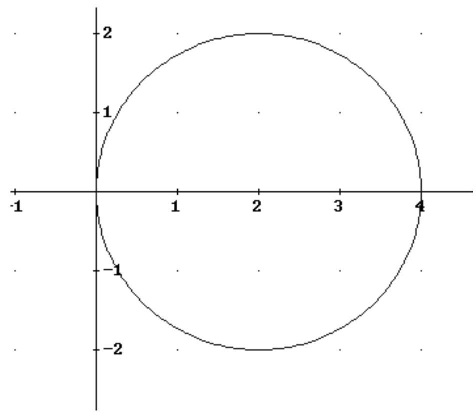


Figura 5

La ecuación general para una circunferencia con centro en (r_0, φ) y radio R está dado por

$$r^2-2rr_0\cos(\theta-\varphi)+r_0{}^2=R^2.$$

Rectas

Las rectas que pasan por el polo se representan mediante la ecuación

$$\theta=\varphi$$

donde φ es el ángulo de inclinación de la recta, esto es, $\varphi = arctan(m)$ siendo m la pendiente de la recta en el sistema de coordenadas cartesianas.

Sea L la recta con ecuación $\theta = \varphi$ que pasa por el polo y $A(r_0, \varphi)$ un punto de L. La ecuación de la recta perpendicular a L que pasa por el punto A es

$$r(\theta) = r_0 \sec(\theta - \varphi)$$

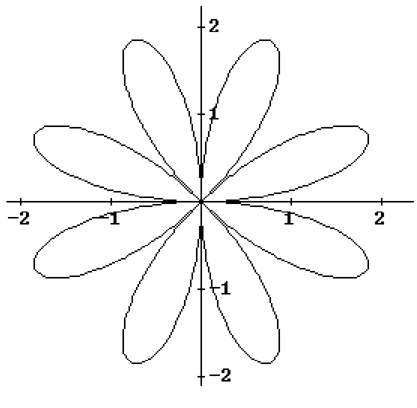
Rosa polar

La rosa polar es una famosa curva matemática que parece una flor con pétalos, y puede expresarse como una ecuación polar simple,

$$r(\theta) = a\cos(k\theta + \varphi_0)$$

donde φ_0 es una constante (incluyendo al 0), k determina el número de pétalos y a representa la longitud de los pétalos de la rosa.

Por ejemplo, en el caso $a = 2,\ k = 4,\ \varphi_0 = -\pi/2$ se tiene la siguiente figura 6.



r(θ)=2cos(4 θ-π/2)= 2sen4θ

Figura 6

Cuando k es un número entero se tienen dos casos

- Si k es impar estas ecuaciones producirán una rosa de k pétalos.
- Si k es par entonces produce una rosa de $2k$ pétalos.

Si k es racional pero no entero, se producirá una forma similar a una rosa pero con los pétalos solapados.

Por ejemplo, la gráfica de la curva $r(\theta) = 4\cos(3/2\theta)$ se muestra en la figura 7.

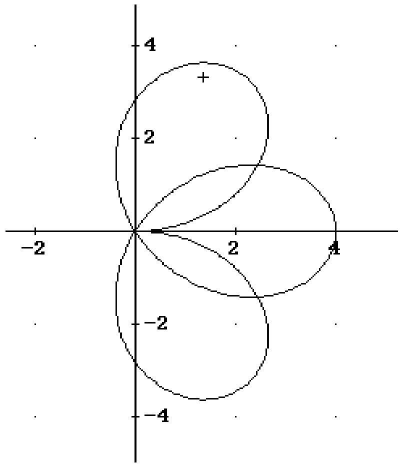


Figura 7

Espiral de Arquímedes

Es una de las primeras curvas, después de las secciones cónicas, en ser descrita en tratados matemáticos, descubierta por Arquímedes (siglo II a.c.), la cual puede expresarse también como una ecuación polar simple $r(\theta) = a + b\theta$

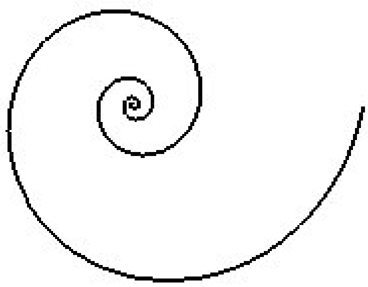


Figura 8

La espiral de Arquímedes tiene dos brazos, uno para $\theta > 0$ y otro para $\theta < 0$. En la figura 8 se muestra uno de ellos cuya ecuación es $r(\theta)=\theta$ para $0 < \theta < 6\pi$.

Un cambio en el parámetro a producirá un desplazamiento horizontal en la espiral, mientras que b controla la distancia entre los brazos, la cual es constante para una espiral dada. Los dos brazos parten del polo.

Otros ejemplos de espirales son la espiral logarítmica y la espiral de Fermat.

Caracoles

Un caracol es la gráfica de una ecuación en coordenadas polares de la forma

$$r(\theta) = a \pm b\cos\theta \text{ ó } r(\theta) = a \pm b\,sen\theta$$

donde a y b son constantes reales positivas.

Existen cuatro tipos de caracoles que dependen de la razón a/b .

1. Si 0< a/b <1 se tiene un caracol con lazo.
2. Si a/b =1, cardioide (corazón).
3. 1< a/b <2, caracol con hendidura.
4. $2 \le a/b$, caracol sin hendidura.

Por ejemplo, la gráfica de $r(\theta) = 2 - 2\cos\theta$ se muestra en la figura 9.

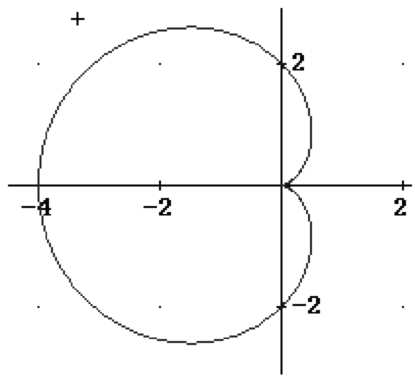


Figura 9

2. Método de Punto Fijo

El problema de encontrar una raíz de una ecuación es un problema muy antiguo, 1700 a.c. aproximadamente. En la actualidad, con el apoyo de las computadoras y los métodos numéricos se obtienen raíces con una precisión de varias cifras decimales de aproximación.

Dada una ecuación *f(x)=0*, al número *r* que satisface la ecuación se llama raíz de la ecuación o cero de la función *f*.

Un punto fijo de una función *g*, es un número *p* tal que *g(p)=p*.

El problema de encontrar las soluciones de una ecuación *f(x)=0* y el de encontrar los puntos fijos de una función *g(x)* son equivalentes en el siguiente sentido: dado el problema de encontrar las soluciones de una ecuación *f(x)=0*, a partir de *f(x)=0* se puede encontrar una función *g* con un punto fijo *p*.

Existen muchas formas para hallar *g*, por ejemplo, de la ecuación *f(x)=0* se despeja *x=g(x)*.

Recíprocamente, si la función *g* tiene un punto fijo en *p*, entonces la función definida por *f(x)=x-g(x)* posee un cero en *p*.

Expliquemos estos conceptos y procedimientos con las siguientes funciones

$$f(x) = x - x^2 + 2 \text{ y } g(x) = x^2 - 2\text{, donde } f(x) = x - g(x)$$

El objetivo es hallar las raíces de la ecuación *f(x)=0*.

A partir de *f(x)=0,* despejando *x* se tiene *x=g(x)*.

La función *g* tiene dos puntos fijos *x=-1* y *x=2*, pues *g(-1)=-1* y *g(2)=2*.

Estos puntos fijos de *g* se ve en la intersección de las gráficas de *y=g(x)* y de *y=x*, Figura 10.

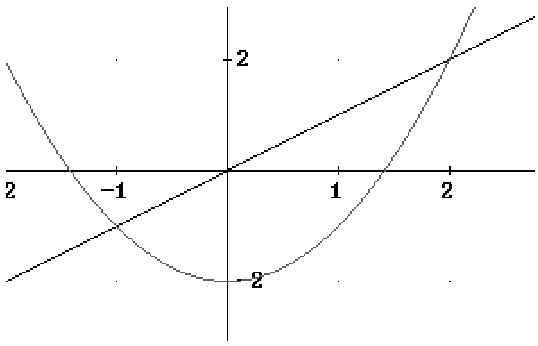


Figura 10

La ecuación $f(x) = x - g(x) = (x + 1)(x - 2) = 0$ tiene dos raíces, precisamente los puntos fijos de g, r_1=-1 y r_2=2.

Estas raíces son los puntos de intersección de la gráfica de f con el eje X, figura 11.

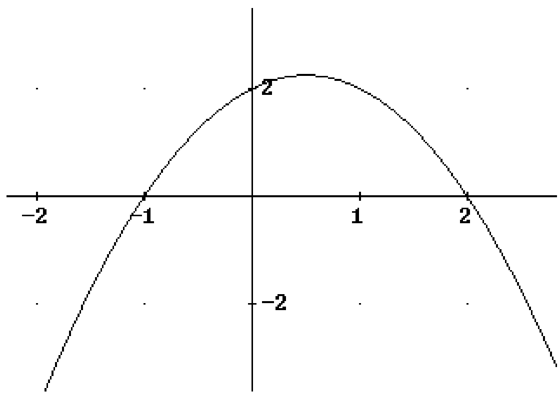


Figura 11

Si al despejar x de $f(x) = x - x^2 + 2$ se obtiene $x = g_1(x) = \sqrt{x+2}$, entonces x=-1 no es punto fijo de g_1. Esto muestra que no toda función g obtenida de f sirve para hallar las raíces de la ecuación $f(x)=0$.

Para poder aproximar al punto fijo de g, p, es recomendable fijar un intervalo, de longitud menor que 1, alrededor de p.

El método de punto fijo genera una sucesión $\{x_n\}$ que puede ser convergente al punto fijo de g.

La sucesión se genera con la ecuación, denominada ecuación de iteración de punto fijo,

$$x_{i+1} = g(x_i);\ i=0, 1, \ldots, N.$$

a partir de una aproximación inicial x_0 en el intervalo I.

A la función g se le conoce con el nombre de función de iteración.

La sucesión $\{x_n\}$ converge siempre y cuando $|g'(x)| < 1$ para todo x en I.

Ejemplo

La ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ tiene una raíz en el intervalo [1,2]. Para comprobar gráficamente, sea $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, figura 12.

Para probar analíticamente, aplicamos a f el teorema del Valor Intermedio en el intervalo [1,2].

La función f es continua en el intervalo [1,2] y se tiene $f(1)\ f(2)<0$ entonces existe un número real (raíz) r en [1,2] tal que $f(r)=0$.

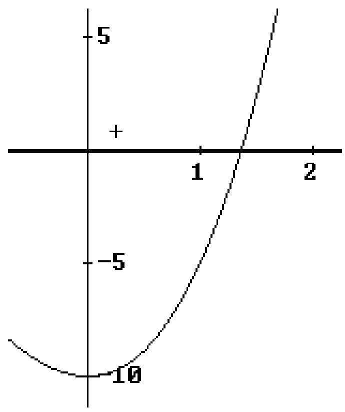


Figura 12

Esta raíz se encuentra “más cerca” a 1 que a 2.

Buscamos una función $g(x)$ que cumple con las condiciones mencionadas anteriormente, esta puede ser $x = g(x) = \sqrt{\dfrac{10}{x+4}}$.

En las gráficas de las curvas $y=x$ y $y=g(x)$ en un mismo sistema de coordenadas, figura 13, aparece p en la intersección de las gráficas. La abscisa de este punto se encuentra entre 1 y 2.

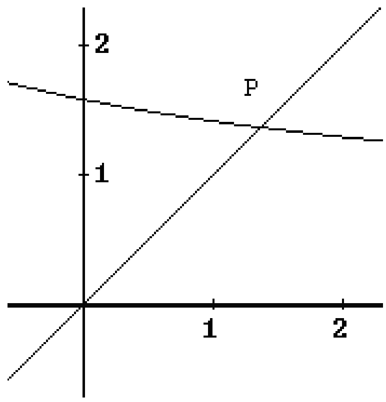


Figura 13

Esta función g tiene una gráfica "suave" (no tiene cambios abruptos) y $|g'(x)| < 1$ en el intervalo indicado, condiciones que garantizan la convergencia de la sucesión a construir en dicho intervalo.

Programa del Método de Punto Fijo en MATLAB, (ver página 54 de Mathews, J.).

% Datos de entrada: $g(x)$, $p0$ es el punto inicial, n es el número de iteraciones y delta es la cota del error relativo.

% Salida: Vector de iteraciones p y k el número de iteraciones.

```
function [p,k]=punto_fijo( g,p0,n,delta)

k=1;

relerr=1;

p(1)=p0;

while (k <=n) & (relerr>delta)

p(k+1)=feval(g,p(k));

err(k)=abs(p(k+1)-p(k));

relerr(k)=err(k)/(abs(p(k+1))+eps);
```

```
k=k+1;
end
disp('Las iteraciones obtenidas son')
p=p';
```

Usando este programa, las seis primeras iteraciones empezando de 1.5 son

1.5000,

1.3484,

1.3674,

1.3650,

1.3653,

1.3652.

Si consideramos 4 cifras decimales, el número 1.3652 sería el punto fijo de *g*,

$$1.3652=g(1.3652)$$

que es a su vez, raíz de la ecuación *f(x)=0*.

Estas iteraciones constituyen los primeros seis términos de la sucesión $\{x_n\}$ cuyo límite es

$$p=\lim_{n\to+\infty} x_n=\lim_{n\to+\infty} g(x_{n-1})=g(\lim_{n\to+\infty} x_n)=g(p)\,.$$

Para hallar las raíces de ecuaciones donde aparecen funciones trascendentes tales como

$$f(x)=3x^2+\cos(x-2)-e^x=0$$

se sigue el mismo procedimiento.

En la figura 14, gráfica de *f*, se puede ver tres raíces

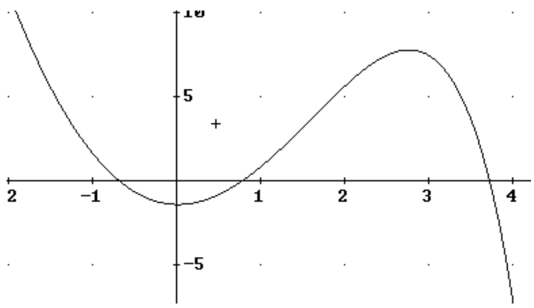


Figura 14

3. Funciones Hiperbólicas

Al definir las funciones trigonométricas se considera la circunferencia trigonométrica y el ángulo central α medido desde la parte positiva del eje x en sentido contrario a las agujas del reloj. Si X representa el área de la porción de círculo de ángulo 2 α entonces se prueba que $X = \alpha$ (Figura 15).

Luego, todas las funciones trigonométricas se pueden expresar en función X.

Para definir las funciones hiperbólicas consideraremos la hipérbola unitaria, H, con ecuación $x^2 - y^2 = 1$ mostrada en la figura 16.

Si $\left|\overline{DC}\right| = t$, $\left|\overline{OA}\right| = c$ y $\left|\overline{AB}\right| = s$ entonces las coordenadas de B son (c, s).

Como B está en H entonces $c^2 - s^2 = 1$.

De la semejanza de los triángulos OCD y OAB, se tiene $t = s/c$.

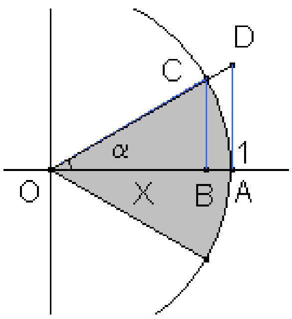


Figura 15

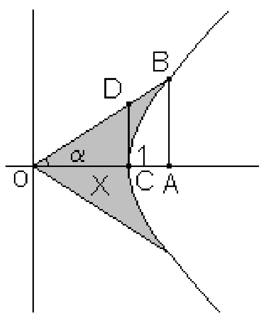


Figura 16

De la figura 16 se tiene

X=2(área Δ OAB - la región no sombreada del Δ OAB).

Por otro lado, usando cálculo integral, el valor X es

$$X = sc - 2\int_1^c \sqrt{x^2-1}\,dx \text{ , integrando } X = Ln\left|c+\sqrt{c^2-1}\right| .$$

Despejando *c* se obtiene, $c = \dfrac{e^X + e^{-X}}{2}$.

Reemplazando c en $c^2 - s^2 = 1$ y despejando *s* se tiene $s = \dfrac{e^X - e^{-X}}{2}$.

Luego, $t = \dfrac{e^X - e^{-X}}{e^X + e^{-X}}$

Definiciones y gráficas

Usando las funciones trascendentes e^x, e^{-x} y las deducciones previas se definen las funciones hiperbólicas en los números reales.

1. Seno hiperbólico.

   Senh(x)= $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

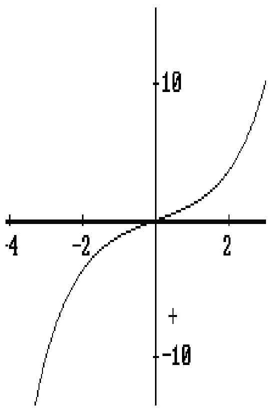


Figura 17

2. Coseno hiperbólico.

Cosh(x)= $\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$.

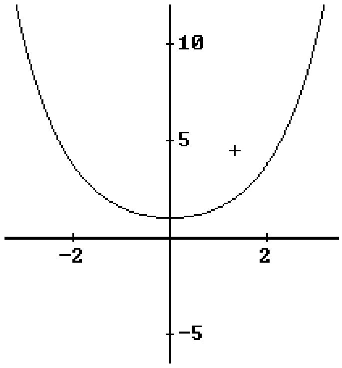


Figura 18

3. Tangente hiperbólica.

Tanh(x)= $\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$.

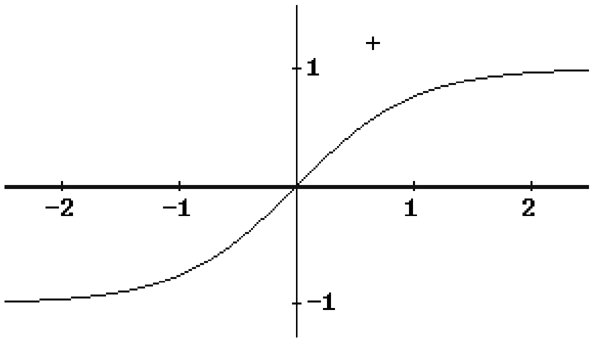


Figura 19

Observación

1. Las funciones hiperbólicas *senh(x), tgh(x), cotgh(x)* y *csch(x)*, son funciones impares mientras que *cosh(x)*; *sech(x)* son funciones pares.

Catenaria

La curva que representa a una cadena "uniforme" suspendida por sus extremos entre dos puntos situados a la misma altura se denomina catenaria.

Por ejemplo, la porción de un cable de tendido eléctrico sujetado, a la misma altura, entre dos postes determina una catenaria.

La curva que forma uno de los cables del puente de la figura 20 también es una catenaria y no como erróneamente se dice que es una parábola.

Figura 20

La ecuación de una catenaria es $y = cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Comparemos las gráficas de las funciones

$$f(x)=cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad h(x) = x^2 + 1,$$

figura 21, donde la catenaria crece mucho más rápido que la parábola cuando $|x|$ crece, lo cual se debe a la presencia del término exponencial.

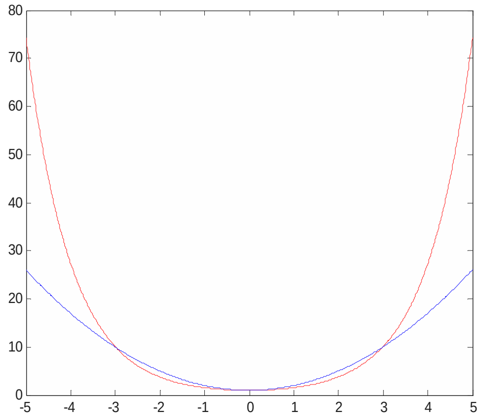


Figura 21

Si definimos la función *F* mediante $F(x)=f(x)-h(x)=0$ entonces *F* tiene tres ceros, figura 21.

Bibliografía

Leithold, L. (1984). El Cálculo, sétima edición, México.

Mathews, J. (2000). Métodos Numéricos, España.

Bell, E. T. (1999). Historia de las Matemáticas. Fondo de Cultura Económica, México.