

LOS SISTEMAS DE REPRESENTACION EN LA SOLUCION DE PROBLEMAS DE ALGEBRA ELEMENTAL

Dra. María Elisa Espinosa Valdés
Instituto Tecnológico de Minatitlán
elisaesva @ yahoo.es

RESUMEN

En este estudio se pretende identificar las diferentes formas de resolver un problema de álgebra elemental. La muestra elegida para el trabajo de campo ha estado formada por estudiantes de los últimos cursos de las Licenciaturas de Pedagogía y de Psicopedagogía, así como de las Diplomaturas de Magisterio, de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada.

Para llevar a cabo el trabajo hemos proporcionado a los sujetos de la muestra un problema verbales de álgebra elemental, y les hemos solicitado que lo resuelvan según sus propias preferencias y criterios. Para identificar el sistema de representación con el que los sujetos resuelven el problema hemos analizado las respuestas en función del planteamiento, ejecución y resultado. También hemos utilizado los criterios previamente establecidos por Fernández (1997) para identificar los sistemas de representación utilizadas para resolver el problema.

1.- DESCRIPCION GENERAL

Se trata de un estudio exploratorio en el que se utiliza la técnica de encuesta por medio de un cuestionario (con 1 problema). Este trabajo forma parte de una investigación más amplia: *“Tipologías de resolutores de problemas de álgebra elemental y creencias sobre evaluación con profesores*

en formación inicial” (Espinosa, 2005), tesis doctoral recientemente defendida, donde se establece el contexto, marco conceptual y la línea general de investigación de la que se deriva este informe. El estudio se ha realizado en la Universidad de Granada durante los años 2001 al 2005.

2.- OBJETIVO

Identificar los sistemas de representación que utilizan los estudiantes para resolver un problema de álgebra elemental.

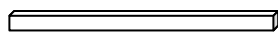
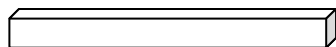
3.- MUESTRA

Trabajamos con 304 estudiantes de los últimos cursos de las Licenciaturas de Pedagogía y de Psicopedagogía, así como de las Diplomaturas de Magisterio, de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada.

4.- INSTRUMENTO

El instrumento consta de un problema de álgebra elemental, que tiene la característica de que se puede resolver con aritmética o con álgebra, el problema dice: *“En una carpintería hay dos tipos de tiras de madera, unas largas y otras cortas. Si ponemos en línea una tira de madera larga junto con dos tiras cortas, miden en total 210 cm. La tira de madera larga mide 30 cm más que la corta*

¿Cuánto mide la tira de madera larga? ¿Cuánto mide la tira de madera corta?”



Es un problema que tiene la característica que se resuelve con una ecuación algebraica y que los números que maneja el problema son sencillos (no tienen decimales y los cocientes que se realizan dan como resultado números enteros menores de 100).

5.- REVISIÓN DE LA LITERATURA

El reconocimiento del papel fundamental que la representación juega en la enseñanza- aprendizaje de las matemáticas ha sido objeto de estudio y reflexión intensa en los últimos 40 años. Esto ha hecho que en los últimos tiempos se incrementen las publicaciones e investigaciones sobre representación en matemáticas. Esto lo podemos evidenciar con los trabajos de: Carpenter y Hiebert (1992), Castro Enc. (1995), Cifarelli (1998), Duval (1998), Fernández (1997), Filloy y Rubio (1999), Goldin (1998), Hitt (2001), Janvier (1987), Kaput (1989, 1992), Rico (2000), Ruiz (2000), Stacey y Mac Gregor (2000).

5.1.- Concepto de representación

El término *representación* es complejo y encierra múltiples significados ya que puede ser aplicado a una gran cantidad de ámbitos, por lo que trataremos definir el concepto de representación que se está utilizando en el área de Didáctica de la Matemática y que será el que utilizaremos en este trabajo.

Por lo que, a lo largo de este trabajo, entenderemos por *representación* el conjunto de herramientas (acciones, signos o gráficos) que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con los que los sujetos abordan e interactúan con el conocimiento matemático.

Hay que destacar, también, la idea de que las representaciones no están aisladas, sino que se articulan en sistemas estructurados (Rico, 2000). Además, sabemos que el uso de la representación facilita el proceso de aprendizaje (Boulton, 1998). Las representaciones mentales han sido usadas por Cifarelli (1998), “para describir el proceso de resolución de

problemas en matemáticas, ya que la investigación sugiere que si un alumno es capaz de resolver problemas, tal vez se debe en gran parte a su habilidad de construir representaciones que le ayudan a entender la información y la relación de la situación problemática” (p. 239), por lo que compartimos la utilización de la diversidad de los sistemas de representación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Por otro lado, existen dos tipos de representaciones: las internas y las externas (Cucoo, 2001). Para este trabajo entendemos por cada una de ellas lo siguiente:

Representaciones externas: son las representaciones que comunicamos fácilmente a otras personas. Estas se hacen escribiendo en papel, dibujando, haciendo representaciones geométricas o ecuaciones.

Representaciones internas: son las imágenes que creamos en la mente para representar procesos u objetos matemáticos. Este tipo de representaciones son más difíciles de describir.

Estos dos tipos de representación ya fueron mencionados por Goldin y Kaput desde 1996, ya que utilizan el término representación interna para las configuraciones que no son directamente observables, pero mencionan que se pueden inferir a través de lo que dicen y hacen los estudiantes, desde su forma de comportarse, mientras que para la representación externa consideran las configuraciones observables tales como las palabras, gráficos, dibujos, ecuaciones, etc., que representan cuestiones que son accesibles a la observación. Como podemos ver las posiciones de Cucoo y las de Goldin y Kaput no se contradicen.

En este trabajo nos interesan las representaciones externas de la forma en que las define Cucoo, ya que solamente trabajaremos con las representaciones que los sujetos, a través de lápiz y papel, nos quieran proporcionar al resolver el problema que les fue administrado o cuando evalúan el problema o cuando nos contestan un cuestionario. Consideramos que entre las representaciones internas y las externas de los estudiantes debe existir congruencia y que, por lo tanto, estarán

íntimamente relacionadas, ya que, de acuerdo con Duval (1998), las representaciones externas son un medio para exteriorizar las representaciones mentales internas.

Teniendo en cuenta la importancia de las representaciones en la educación matemática, el desarrollo eficaz de sistemas de representaciones internas en los estudiantes deberá tener correspondencia coherente y una buena comunicación con el sistema matemático establecido, es decir, lo que serían las representaciones externas (Goldin y Shteingold, 2001).

Además, expresamos la necesidad de emplear diferentes representaciones, ya que cada modo, significativamente distinto, de entender un concepto necesita de un sistema de simbolización propio. Por lo que pensamos que cuando un estudiante utiliza una representación acompañada de ciertas operaciones suele emplear distintas formas para conceptos diferentes. Esto nos indica que hay que emplear diversas representaciones para captarlo en su totalidad. Por ejemplo, Friedlander (2001) menciona que el alumno será mejor resolutor de problemas algebraicos si desde temprana edad se mueve fácilmente de una representación a otra. En un estudio que realizó encontró como resultado *“que elegir una representación puede ser resultado de una tarea natural como son las preferencias personales, el estilo de pensamiento del resolutor de problemas o el intento de vencer las dificultades para resolver el problema cuando se estaba utilizando otra representación”* (p. 184).

A nosotros nos interesan las representaciones externas de los estudiantes porque, en base a las manifestaciones externas producidas por los estudiantes, se pueden hacer inferencias a cerca de su comprensión de un tema (Fernández, 1997). Sin embargo hay que tener en cuenta que la fase de la traducción de esas representaciones juegan un papel muy importante en el aprendizaje y la resolución de problemas (Lesh, Post y Behr, 1987).

5.2.- Sistemas de representación

Para nuestro trabajo tomaremos la definición que utilizó Fernández (1997), descrita por Castro y Castro la cual no se contrapone con ninguna de las anteriores y que señala que *los sistemas de representación son un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, con reglas y convenios, que nos permiten expresar aspectos y propiedades de un concepto, teniendo presente que ningún sistema de representación agota por sí solo un concepto.*

Los cinco sistemas de representación que utilizan los estudiantes para resolver problemas de álgebra elemental, mencionados por Fernández (1997), y que se utilizarán en este trabajo, a reserva de que se encuentre algún otro cuando se efectúe el análisis de los protocolos, son los siguientes:

Sistema de representación Ensayo-Error. Se considera como un sistema numérico, ya que se utiliza la notación numérica y símbolos aritméticos para establecer relaciones entre los datos conocidos y los desconocidos. El uso de este sistema de representación requiere de tiempo y de una metódica organización en el trabajo de conjetura y prueba.

Sistema de representación Parte- Todo. Las relaciones existentes en el problema se plantean mediante estrategias que relacionan los datos. Se consideran los datos desconocidos como parte del resultado de operar los datos conocidos, comparando el total con las partes.

Sistema de representación Gráfico. Se dice que se está usando este sistema de representación cuando se usan códigos gráficos para resolver el problema, como son: representaciones físicas, geométricas o diagramas. Las relaciones entre los datos y las incógnitas del problema se establecen a partir del gráfico. Para resolver las operaciones se utilizan generalmente los sistemas numéricos, más específicamente el Parte-Todo, o relaciones de proporcionalidad.

Sistema de representación Gráfico-Simbólico. Este sistema de representación se puede considerar como una mezcla entre el Gráfico, descrito antes, y el Simbólico, ya que las relaciones entre los datos y las

incógnitas se obtienen a partir del uso de un gráfico, con apoyo de una representación gráfica, pero mediante un lenguaje simbólico.

Sistema de representación Simbólico. Se dice que se está usando el sistema de representación Simbólico cuando se utiliza el lenguaje algebraico puro. Se presenta cuando se utiliza un lenguaje exclusivamente abstracto, usualmente alfabético. Se identifican las incógnitas con letras o composición de ellas u otros símbolos, incluso gráficos, y se expresan las relaciones mediante ecuaciones. No se hace uso de objetos concretos para establecer las relaciones.

6.- RESULTADOS

Encontramos que los estudiantes que participaron solamente usaron los cinco sistemas de representación mencionados por Fernández (1997), obteniendo los siguientes resultados:

Abordan el problema		No abordan el problema	
297	97.7 %	7	2.3 %

En cuanto a la solución encontramos lo siguiente:

Planteamiento		Ejecución		Resultados	
225	74 %	220	72.3 %	202	66.04 %

De los sistemas de representación que utilizan los estudiantes para resolver el problema tenemos:

Ensayo- Error		Parte - Todo		Gráfico		Gráfico - Simbólico		Simbólico	
12	3.9 %	39	12.8 %	5	1.6 %	50	16.4 %	168	55.3 %

Conclusiones:

De las tablas anteriores podemos concluir que:

- Que la mayoría de estudiantes (97.7 %) intentan resolver el problema.
- Que muchos plantean, ejecutan y resuelven el problema bien.
- Se identifican en las diferentes soluciones solamente los cinco sistema de representación mencionados por Fernández (1997)
- El sistema de representación mas utilizado para encontrar la solución del problema es el simbólico, por lo que podemos decir que no hace uso de objetos concretos para establecer las relaciones y si produce una abstracción del contenido del problema y llega a la generalización.
- Un numero significativo de estudiantes utilizan los sistemas de representación Gráfico - Simbólico y el Parte - Todo.
- Muy pocos estudiantes utilizaron los sistemas de representación Ensayo - Error y Gráfico para hallar la solución del problema.

REFERENCIAS

- Carpenter, T. y Hiebert, J. (1992).** Learning and teaching with understanding. En Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* , pp. 65- 97. New York: Macmillan Publishing Company.
- Castro, Enc. (1995).** *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12- 14 años)*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Cifarelli. (1998).** The Development of Mental Representations as a Problem Solving Activity. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (1), pp. 239–263.
- Cuoco, A. y Curcio, F. (2001).** *The Roles of Representation in School Mathematics* . Reston, VA: NCTM.

- Duval, R. (1998).** Registros de Representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigación en Matemáticas Educativa II.*, pp. 173- 202. México. CINVESTAV.
- Espinosa, ME. (2005).** *Tipologías de resolutores de problemas de álgebra elemental y creencias sobre evaluación con profesores en formación inicial.* Tesis doctoral leída en la Universidad de Granada.
- Fernández, F (1997).** *Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales.* Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada,
- Filloy, E y Rubio, G. (1999).** La resolución de problemas Aritméticos-Algebraicos. En E. Filloy y col., *Aspectos Teóricos del Algebra Educativa* , pp. 127- 152. México: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Friedlander, A. y Tabach, M. (2001).** Promoting Multiple Representations in Algebra. En Cuoco (Ed.), *The Roles of Representation in School Mathematics* . Holanda: NCTM. - Prefacio
- Goldin, G. (1998).** Representational Systems, Learning, and Problem Solving in Mathematics. *Journal of Mathematical Behavior* , 17 (1), pp. 137- 163.
- Goldin, G. y Kaput, J. (1996).** A join perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. En L. Steffen, P. Nessler, P. Cobb, G. Goldin y B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* , pp. 397- 430. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Goldin,.G. y Shteingold, M. (2001).** Systems of Representations and the Development of Mathematical Concepts. En Cuoco y Curcio (Eds.), *The Roles of Representation in School Mathematics* , pp. 1 – 21. Reston, VA: NCTM.
- Hitt, F. (2001).** El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un Proyecto de Investigación en Educación Matemáticas. En P. Gómez y L. Rico

(Eds.), *Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática*, pp. 165–178. Universidad de Granada.

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, pp. 27–32. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J.J. (1989). Linking representation in the symbol system of algebra. En S. Wagner y C. Kieran. (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra*, pp. 167- 194. Reston, VA.: NCTM.- Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics Education. En D.Grows (Ed.), *Handbook of Research on mathematics teaching and learning*. New York: Mac Millan.

Lesh, R. Post, T. y Berh, M. (1987). Dienes revisited: Multiple embodiments in computer environments. En I. Wirszup y R. Streit (Eds.), *Developments in school Mathematics education around the world*, pp. 647- 680. Reston, VA: NCTM.

Rico, L. (2000). Sobre la Noción de Representación y comprensión en la investigación en educación matemáticas. *Actas del IV Simposio de la SEIEM*, pp. 1- 14. Huelva (paper).

Ruiz, F. (2000). *La tabla- 100. Representaciones geométricas de relaciones numéricas. Un estudio de profesores de primaria en formación.* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Stacey, K. y Mac Gregor, M. (2000). Learning the Algebraic Method of Solving Problems. *Journal of Mathematical Behavior* 18 (2), pp. 149- 167.