

Instituto Tecnológico de Tlalnepantla- ITTLA

Tema. Investigaciones recientes sobre temas matemáticos.

Título de la ponencia. Una Nueva Alternativa Didáctica para la Resolución de determinantes a Través de los Teoremas JCE- 1 y 2 del Determinante Simétrico.

Nombre. Teodoro M. Ceballos

Domicilio. Retorno 803 # 19
Col. El Centinela
Delegación Coyoacán
México, D.F.
C.P. 04450

Teléfono. 56895964

Correo electrónico. Ceballos1492@yahoo.com.mx

Nombre. Rosalía Trujillo Sánchez

Domicilio. Mar Egeo # 68
Col. Lomas Lindas
Atizapan, Edo. de México.

Teléfono. 58254460

Correo electrónico. rosaliatrujillos@hotmail.com

Nombre. Jesús López Sánchez

Domicilio. Retorno 803 # 19
Col. El Centinela
Delegación Coyoacán
México, D.F.
C.P. 04450

Teléfono. 56895964

Correo electrónico. lsjesus@hotmail.com

Universidad Nacional Autónoma de México- UNAM

Nombre. Teodoro M. Ceballos

Nombre. Jesús López Sánchez

Una Nueva Alternativa Didáctica para la Resolución de determinantes a Través de los Teoremas JCE-1 y 2 del Determinante Simétrico.

Resumen

En este trabajo estamos abordando un problema del proceso enseñanza- aprendizaje para el cálculo de determinantes de orden- (2×2) , que tienen que apropiarse los aprendedores del cuarto o quinto semestre de Ingeniería, en la asignatura de Álgebra Lineal en el Instituto Tecnológico de Tlalnepantla y Facultad de Ingeniería- FI de la UNAM. El propósito fundamental que tiene esta propuesta; es que los que aprenden, conozcan y apliquen una nueva alternativa didáctica para la resolución de determinantes con este orden, a través de lo que nosotros hemos denominado, Teorema JCE-1 y 2 del Determinante Simétrico (TDS). Como consecuencia, la pregunta de investigación que nos planteamos de inicio fue: ¿contribuirá la aplicación de los TDS, para lograr un aprendizaje significativo para la solución de los mismos; contra la teoría acuñada por Leibniz, Cramer, definición de Cayley, y el método de Sarrus? Finalmente, y con el uso de estos teoremas, el objetivo es que los aprenden se apropien de un nuevo método para el cálculo de determinantes con orden (2×2) y todos los de orden superior que son reducibles a él.

Introducción

Nuestra propuesta está ubicada en el *área de investigaciones recientes sobre temas de matemáticas*. Aquí, analizamos un problema del proceso enseñanza- aprendizaje que se presenta cuando resolvemos un determinante orden básico (2×2) o de *Orden Superior* (OS), i.e., todos aquellos que convergen a orden (2×2) , o también, de $(3 \times 3), (4 \times 4), \dots, (n \times n); \forall n \in \mathbb{Z}^+$; los determinantes con orden básico (2×2) , son todos aquellos determinantes ya no pueden reducirse a otro determinante de menor orden, mientras que los determinantes de OS, son determinantes que son factibles de reducirse a orden (2×2) ; p.ej., el de orden (3×3) converge a tres de (2×2) , el de (4×4) se reduce a cuatro de (3×3) y cada uno de éstos, en tres de (2×2) ; por consiguiente, el de (4×4) converge en doce de (2×2) , la de (5×5) converge a 60 de (2×2) y así, sucesivamente. La teoría de determinantes es en realidad más antigua que la de matrices. Esta teoría fue descubierta por Cramer² durante sus trabajos orientados a la resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL), fue expuesta por primera vez en 1750, cien años antes de que Silvester y Cayley empezaran a hablar de matrices³. Así es que, cuando Gabriel Cramer introdujo su regla

para resolver SEL de (2×2) y (3×3) ; paralelamente presentó su método para resolver los determinantes que se generan para el cálculo de las incógnitas x, y o z ; con entrada primaria (\searrow) y secundaria (\nearrow). Sin embargo, históricamente se sabe que la teoría de determinantes según Dirichlet, fue introducida y acuñada por primera vez en las matemáticas por Leibniz¹ en 1693, i.e., 57 años antes que Cramer; además, también existen pruebas de que el matemático japonés Seki Takakazu, ya lo utilizaba en 1683 (*diez años antes que Leibniz*). Finalmente, hasta la fecha, los principales aportadores en esta área del conocimiento han sido Laplace, Cauchy, Jacobi, Bezout, Sylvester y Arthur Cayley. Por otra parte, el campo de acción de la teoría de los determinantes es en toda la ingeniería y en las ciencias en general.

El objetivo de nuestro trabajo de investigación, es que los que aprenden, se apropien de un nuevo método alternativo para resolver determinantes de orden (2×2) y todos los de orden superior (OS) que convergen al mismo.

El planteamiento de la teoría de determinantes que estableció Leibniz, consiste en considerar entradas primarias (EP) y secundarias (ES) para resolver determinante que tuvieran orden dos y tres, p.ej.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{EP} & b \\ c & d \end{vmatrix} \searrow - \begin{vmatrix} a & b \\ c^{ES} & d \end{vmatrix} \nearrow,$$

de manera análoga sugirió una representación algebraica para un determinante de orden-3.

Mientras que, Cayley extendió la definición de los determinantes, respetando la idea de (EP) y (ES) de

Leibniz, de la siguiente forma

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11_{EP}} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \searrow - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}^{ES} & a_{22} \end{vmatrix} \nearrow = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \quad (*)$$

Un procedimiento parecido define Cayley para un determinante de orden- 3. Por otra parte, Sarrus en su método de columnas y renglones aumentados, considera también las (EP) y (ES) de Leibiniz; es decir

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xrightarrow{R} |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

de donde el

Entrada primaria de Leibniz (EPL).

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (2^*)$$

Entrada secundaria de Leibniz (ESL).

esto implica que; $|A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$.

Propuesta del Método del Determinante Simétrico (PMDS)

El método del determinante simétrico (MDS), es una nueva alternativa didáctica para calcular el valor de un determinante de orden- 2. Está basado en el siguiente proceso metodológico: paso (1), definimos a la segunda columna como columna de simetría (CS); paso (2), hacemos girar la primera columna alrededor de ésta y en el sentido contrario de como rota la tierra sobre su propio eje, dicho movimiento se considera con sentido negativo (SN); paso (3), después de mover la primer columna π -radianes, sus términos que tengan signos positivos, cambiarán a signo negativo por la teoría de la simetría de los números reales en la recta numérica; paso (4), considerando los tres pasos anteriores, construimos el determinante simétrico de A (DSA), con sentido derecho inyectivo directo o de entrada primaria de Leibniz (EPL), veamos

Sentido derecho inyectivo directo.

$$DSA = |A|_{\text{Simétrico}} = \begin{vmatrix} \xi & \beta & -\xi \\ \zeta & \lambda & -\zeta \end{vmatrix} \begin{matrix} \downarrow \\ \text{Columna de simetría.} \end{matrix} = \xi\lambda + (\beta)(-\zeta) = \xi\lambda + (-\beta\zeta).$$

Aquí, $\xi\lambda + (-\beta\zeta)$ es la definición desarrollada de la resta.

Teorema JCE-1 (del Determinante Simétrico con sentido derecho inyectivo, directo o con entrada primaria de Leibniz). Sea el

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \lambda \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad |B| = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \chi \\ \delta & \varepsilon & \phi \\ \varphi & \gamma & \eta \end{vmatrix}; \forall \alpha, \beta, \chi, \delta, \varepsilon, \phi, \varphi, \gamma, \eta \ \& \ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow |A|_{\text{Simétrico}} = \alpha\lambda - \beta\delta \therefore |A| = \alpha\lambda - \beta\delta;$$

$$\text{mientras que, el } |B|_{\text{Simétrico}} = (\alpha\eta\varepsilon + \beta\phi\varphi + \chi\delta\gamma) - (\alpha\phi\gamma + \beta\delta\eta + \chi\varepsilon\varphi) \Rightarrow |B| = (\alpha\eta\varepsilon + \beta\phi\varphi + \chi\delta\gamma) - (\alpha\phi\gamma + \beta\delta\eta + \chi\varepsilon\varphi).$$

Demostración. Como $|A| = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \lambda \end{vmatrix}$ y $|B| = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \chi \\ \delta & \varepsilon & \phi \\ \varphi & \gamma & \eta \end{vmatrix}$, entonces el simétrico del $|A|_{\text{simétrico}} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \lambda \end{vmatrix}$

$$-\alpha \begin{vmatrix} \varepsilon & \phi & -\varepsilon \\ \gamma & \eta & -\gamma \end{vmatrix} \text{ y el } |B|_{\text{Simétrico}} = \alpha \begin{vmatrix} \varepsilon & \phi & -\varepsilon \\ \gamma & \eta & -\gamma \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} \delta & \phi & -\delta \\ \varphi & \eta & -\varphi \end{vmatrix} + \chi \begin{vmatrix} \delta & \varepsilon & -\delta \\ \varphi & \gamma & -\varphi \end{vmatrix}, \text{ de donde se cumple que}$$

Primero

$$\begin{aligned} |A|_{\text{simétrico}} &= \begin{vmatrix} \alpha & \beta & -\alpha \\ \delta & \lambda & -\delta \end{vmatrix} = \alpha\lambda - \beta\delta \\ &= \begin{vmatrix} \alpha_{EP} & \beta_{EP} & -\alpha \\ \delta & \lambda & -\delta \end{vmatrix} = \alpha\lambda - \beta\delta \\ &= \alpha\lambda + \beta(-\delta) = \alpha\lambda - \beta\delta \\ &= \alpha\lambda + (-\beta\delta) = \alpha\lambda - \beta\delta \end{aligned}$$

$$\alpha\lambda - \beta\delta \equiv \alpha\lambda - \beta\delta$$

L.Q.D.

Como corolario de la demostración anterior, podemos afirmar que el determinante simétrico de A es $|A|_{\text{Simétrico}} = \alpha\lambda - \beta\delta \therefore |A| = \alpha\lambda - \beta\delta$.

Segundo. Como el

$$|B|_{\text{Simétrico}} = \alpha \begin{vmatrix} \varepsilon & \phi & -\varepsilon \\ \gamma & \eta & -\gamma \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} \delta & \phi & -\delta \\ \varphi & \eta & -\varphi \end{vmatrix} + \chi \begin{vmatrix} \delta & \varepsilon & -\delta \\ \varphi & \gamma & -\varphi \end{vmatrix} = (\alpha\eta\varepsilon + \beta\phi\varphi + \chi\delta\gamma) - (\alpha\phi\gamma + \beta\delta\eta + \chi\varepsilon\varphi), \text{ entonces}$$

$$\alpha \begin{vmatrix} \varepsilon_{EP} & \phi_{EP} & -\varepsilon \\ \gamma & \eta & -\gamma \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} \delta_{EP} & \phi_{EP} & -\delta \\ \varphi & \eta & -\varphi \end{vmatrix} + \chi \begin{vmatrix} \delta_{EP} & \varepsilon_{EP} & -\delta \\ \varphi & \gamma & -\varphi \end{vmatrix} = (\alpha\eta\varepsilon + \beta\phi\varphi + \chi\delta\gamma) - (\alpha\phi\gamma + \beta\delta\eta + \chi\varepsilon\varphi)$$

$$\alpha[\varepsilon\eta + \phi(-\gamma)] - \beta[\delta\eta + \phi(-\varphi)] + \chi[\delta\gamma + \varepsilon(-\varphi)] = (\alpha\eta\varepsilon + \beta\phi\varphi + \chi\delta\gamma) - (\alpha\phi\gamma + \beta\delta\eta + \chi\varepsilon\varphi)$$

$$\alpha[\varepsilon\eta + (-\phi\gamma)] - \beta[\delta\eta + (-\phi\varphi)] + \chi[\delta\gamma + (-\varepsilon\varphi)] = (\alpha\eta\varepsilon + \beta\phi\varphi + \chi\delta\gamma) - (\alpha\phi\gamma + \beta\delta\eta + \chi\varepsilon\varphi)$$

$$\alpha[\varepsilon\eta - \phi\gamma] - \beta[\delta\eta - \phi\varphi] + \chi[\delta\gamma - \varepsilon\varphi] = (\alpha\eta\varepsilon + \beta\phi\varphi + \chi\delta\gamma) - (\alpha\phi\gamma + \beta\delta\eta + \chi\varepsilon\varphi)$$

$$\alpha\varepsilon\eta - \alpha\phi\gamma - \beta\delta\eta + \beta\phi\varphi + \chi\delta\gamma - \chi\varepsilon\varphi = (\alpha\eta\varepsilon + \beta\phi\varphi + \chi\delta\gamma) - (\alpha\phi\gamma + \beta\delta\eta + \chi\varepsilon\varphi)$$

$$(\alpha\varepsilon\eta + \beta\phi\varphi + \chi\delta\gamma) - (\alpha\phi\gamma + \beta\delta\eta + \chi\varepsilon\varphi) = (\alpha\eta\varepsilon + \beta\phi\varphi + \chi\delta\gamma) - (\alpha\phi\gamma + \beta\delta\eta + \chi\varepsilon\varphi) \quad \text{L.Q.D.}$$

Como corolario de la demostración anterior, podemos afirmar que el determinante simétrico de B se define con $|B| \xrightarrow{R} |B|_{\text{Simétrico}} = (\alpha\eta\varepsilon + \beta\phi\varphi + \chi\delta\gamma) - (\alpha\phi\gamma + \beta\delta\eta + \chi\varepsilon\phi)$.

Teorema JCE-2 (del determinante simétrico con sentido izquierdo inyectivo o con entrada secundaria de Leibniz). Sea el

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \lambda \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad |B| = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \chi \\ \delta & \varepsilon & \phi \\ \varphi & \gamma & \eta \end{vmatrix}; \forall \alpha, \beta, \chi, \delta, \varepsilon, \phi, \varphi, \gamma, \eta \ \& \ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow |A| \xrightarrow{R} |A|_{\text{Simétrico (ES)}} = \alpha\lambda - \beta\delta;$$

mientras que el $|B| \xrightarrow{R} |B|_{\text{Simétrico}} = (\alpha\eta\varepsilon + \beta\phi\varphi + \chi\delta\gamma) - (\alpha\phi\gamma + \beta\delta\eta + \chi\varepsilon\phi)$.

Demostración. Este teorema, es un caso particular del primero, por tal razón; al determinante simétrico de A con orden (2×2) , i.e., $|A|_{S_{(2 \times 2) \text{ con (ESL)}}$, lo multiplicaremos por (-1) para que se cumpla que el valor numérico

del $|A|_{S_{(2 \times 2) \text{ con (ESL)}}} = |A|_{S_{(2 \times 2) \text{ con (EPL)}}$. Mientras que, para aplicar la teoría del DS del $|B|$, reducimos el

orden de este, a tres determinantes de (2×2) , digamos $|B_1|$, $|B_2|$ y $|B_3|$. Además, haremos la siguiente modificación; en vez de entrar con signo positivo para la reducción de orden

para el $|B|$, i.e., $|B| = \begin{vmatrix} + & - & + \\ \alpha & \beta & \chi \\ \delta & \varepsilon & \phi \\ \varphi & \gamma & \eta \end{vmatrix}$; entraremos con signo negativo, veamos, $|B| = \begin{vmatrix} - & + & - \\ \alpha & \beta & \chi \\ \delta & \varepsilon & \phi \\ \varphi & \gamma & \eta \end{vmatrix}$. Todo

esto, para que se cumpla que el $|B|_{S_{(2 \times 2) \text{ con (ESL)}}} = |B|_{S_{(2 \times 2) \text{ con (EPL)}}$.

Ahora bien, como $|A| = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \lambda \end{vmatrix}$ y $|B| = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \chi \\ \delta & \varepsilon & \phi \\ \varphi & \gamma & \eta \end{vmatrix}$, entonces el simétrico del $|A| \xrightarrow{R}$

$(-1)|A|_{\text{simétrico con (ESL)}}$; es decir, $|A| \xrightarrow{R} (-1)|A|_{\text{simétrico con (ESL)}} = (-1) \begin{vmatrix} \alpha & \beta & -\alpha \\ \delta^{ES} & \lambda^{ES} & -\delta^{ES} \end{vmatrix}$; mientras que el

$$|B| \xrightarrow{R} |B|_{\text{Simétrico (ESL)}} = -\alpha \begin{vmatrix} \varepsilon & \phi & -\varepsilon \\ \gamma & \eta & -\gamma \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} \delta & \phi & -\delta \\ \varphi & \eta & -\varphi \end{vmatrix} - \chi \begin{vmatrix} \delta & \varepsilon & -\delta \\ \varphi & \gamma & -\varphi \end{vmatrix}; \text{ de donde,}$$

Primero

$$|A| \rightarrow (-1)|A|_{\text{Simétrico (ES)}} = (-1) \begin{vmatrix} \alpha & \beta & -\alpha \\ \delta & \lambda & -\delta \end{vmatrix} = \delta\beta - \lambda\alpha.$$

$$(-1) \begin{vmatrix} \alpha & \beta & -\alpha \\ \delta^{ES} & \lambda^{ES} & -\delta \end{vmatrix} = \delta\beta - \lambda\alpha$$

$$(-1) \{ \delta\beta + \lambda(-\alpha) \} = \delta\beta - \lambda\alpha$$

$$(-1) \{ \delta\beta + (-\lambda\alpha) \} = \delta\beta - \lambda\alpha$$

$$\lambda\alpha - \delta\beta \equiv \delta\beta - \lambda\alpha$$

L.Q.D.

Como corolario de la demostración anterior, podemos afirmar que el determinante simétrico de A es $|A| \xrightarrow{R} (-1)|A|_{\text{Simétrico con (ESL)}} = \delta\beta - \lambda\alpha$.

Segundo.

$$|B| \xrightarrow{R} |B|_{\text{Simétrico con (ESL)}} = -\alpha \begin{vmatrix} \varepsilon & \phi & -\varepsilon \\ \gamma & \eta & -\gamma \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} \delta & \phi & -\delta \\ \varphi & \eta & -\varphi \end{vmatrix} - \chi \begin{vmatrix} \delta & \varepsilon & -\delta \\ \varphi & \gamma & -\varphi \end{vmatrix} = (\alpha\eta\varepsilon + \beta\phi\phi + \chi\gamma\delta) - (\alpha\gamma\phi + \beta\eta\delta + \chi\phi\varepsilon)$$

$$-\alpha \begin{vmatrix} \varepsilon & \phi & -\varepsilon \\ \gamma^{ES} & \eta^{ES} & -\gamma \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} \delta & \phi & -\delta \\ \varphi^{ES} & \eta^{ES} & -\varphi \end{vmatrix} - \chi \begin{vmatrix} \delta & \varepsilon & -\delta \\ \varphi^{ES} & \gamma^{ES} & -\varphi \end{vmatrix} = (\alpha\eta\varepsilon + \beta\phi\phi + \chi\gamma\delta) - (\alpha\gamma\phi + \beta\eta\delta + \chi\phi\varepsilon)$$

$$-\alpha[\gamma\phi + \eta(-\varepsilon)] + \beta[\phi\phi + \eta(-\delta)] - \chi[\phi\varepsilon + \gamma(-\delta)] = (\alpha\eta\varepsilon + \beta\phi\phi + \chi\gamma\delta) - (\alpha\gamma\phi + \beta\eta\delta + \chi\phi\varepsilon)$$

$$-\alpha[\gamma\phi + (-\eta\varepsilon)] + \beta[\phi\phi + (-\eta\delta)] - \chi[\phi\varepsilon + (-\gamma\delta)] = (\alpha\eta\varepsilon + \beta\phi\phi + \chi\gamma\delta) - (\alpha\gamma\phi + \beta\eta\delta + \chi\phi\varepsilon)$$

$$-\alpha[\gamma\phi - \eta\varepsilon] + \beta[\phi\phi - \eta\delta] - \chi[\phi\varepsilon - \gamma\delta] = (\alpha\eta\varepsilon + \beta\phi\phi + \chi\gamma\delta) - (\alpha\gamma\phi + \beta\eta\delta + \chi\phi\varepsilon)$$

$$-\alpha\gamma\phi + \alpha\eta\varepsilon + \beta\phi\phi - \beta\eta\delta - \chi\phi\varepsilon + \chi\gamma\delta = (\alpha\eta\varepsilon + \beta\phi\phi + \chi\gamma\delta) - (\alpha\gamma\phi + \beta\eta\delta + \chi\phi\varepsilon)$$

$$(\alpha\eta\varepsilon + \beta\phi\phi + \chi\gamma\delta) - (\alpha\gamma\phi + \beta\eta\delta + \chi\phi\varepsilon) = (\alpha\eta\varepsilon + \beta\phi\phi + \chi\gamma\delta) - (\alpha\gamma\phi + \beta\eta\delta + \chi\phi\varepsilon)$$

$$(\alpha\eta\varepsilon + \beta\phi\phi + \chi\gamma\delta) - (\gamma\phi\alpha + \beta\delta\eta + \chi\varepsilon\phi) \equiv (\alpha\eta\varepsilon + \beta\phi\phi + \chi\gamma\delta) - (\alpha\gamma\phi + \beta\eta\delta + \chi\phi\varepsilon)$$

L.Q.D.

Como corolario de la demostración anterior, podemos afirmar que el determinante simétrico de B se define con $|B| \xrightarrow{R} |B|_{\text{Simétrico con (ESL)}} = (\alpha\eta\varepsilon + \beta\phi\phi + \chi\gamma\delta) - (\alpha\gamma\phi + \beta\eta\delta + \chi\phi\varepsilon)$.

Presentación de resultados

Ejercicio. Calcular el valor de los determinantes de A y B, si estos están por

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \text{ y } |B| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & 7 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix}. \text{ Utilizando los métodos de: (a) Cramer, (b) Cayley, (c) Sarrus e}$$

(d) el determinante simétrico definido por los Teoremas JCE-1 con EPL y finalmente, (e) el determinante simétrico definido por el Teorema JCE-2 con ESL.

Solución (a). Como el

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -2_{EP} & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 3_{ES} \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (-2)(5) - (3)(4) = -10 - 12 = -22 \therefore |A| = -22.$$

$$\text{y como el } |B| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & 7 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} 6_{EP_1} & 3_{EP_2} & 2_{EP_3} \\ 2_{EP_3} & -5_{EP_1} & 7_{EP_2} \\ 4_{EP_2} & -1_{EP_3} & 8_{EP_1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 6_{ES_3} & 3_{ES_2} & 2_{ES_1} \\ 2_{ES_2} & -5_{ES_1} & 7_{ES_3} \\ 4_{ES_1} & -1_{ES_3} & 8_{ES_2} \end{vmatrix}$$

$$|B| = \{[\text{Productos de } EP_1] + [\text{Productos de } EP_2] + [\text{Productos de } EP_3]\} - \{[\text{Productos de } ES_1] + [\text{Productos de } ES_2] + [\text{Productos de } ES_3]\}, \text{ de donde se implica que}$$

$$|B| = [(6)(-5)(8) + (3)(7)(4) + (2)(-1)(2)] - [(2)(-5)(4) + (3)(2)(8) + (6)(-1)(7)] = [-240 + 84 - 4] - [-40 + 48 - 42]$$

$$|B| = -160 - (-34) = -160 + 34 = -126 \Rightarrow |B| = -126.$$

$$\text{solución (b). } |A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -2_{EP} & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4_{ES} & 5 \end{vmatrix} = (-2)(5) - (4)(3) = -10 - 12 = -22 \therefore |A| = -22$$

$$\text{y como el } |B| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & 7 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} 6_{EP_1} & 3_{EP_2} & 2_{EP_3} \\ 2_{EP_3} & -5_{EP_1} & 7_{EP_2} \\ 4_{EP_2} & -1_{EP_3} & 8_{EP_1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 6_{ES_2} & 3_{ES_3} & 2_{ES_1} \\ 2_{ES_3} & -5_{ES_1} & 7_{ES_2} \\ 4_{ES_1} & -1_{ES_2} & 8_{ES_3} \end{vmatrix}$$

$$|B| = \{[\text{Productos de } EP_1] + [\text{Productos de } EP_2] + [\text{Productos de } EP_3]\} - \{[\text{Productos de } ES_1] + [\text{Productos de } ES_2] + [\text{Productos de } ES_3]\}, \text{ de donde se implica que}$$

$$|B| = [(6)(-5)(8) + (3)(7)(4) + (2)(-1)(2)] - [(4)(-5)(2) + (-1)(7)(6) + (8)(3)(2)] = [-240 + 84 - 4] - [-40 - 42 + 48]$$

$$|B| = -160 - (-34) = -160 + 34 = -126 \Rightarrow |B| = -126.$$

Solución (c). Como todos sabemos, este método únicamente es aplicable para resolver determinante de orden (3×3) . Además, sólo calcularemos para el caso de columnas aumentadas, veamos

$$\text{Con el } |B| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & 7 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} 6_{EP_1} & 3_{EP_2} & 2_{EP_3} & 6_{EP_1} & 3_{EP_2} \\ 2_{EP_3} & -5_{EP_1} & 7_{EP_2} & 2_{EP_3} & -5_{EP_1} \\ 4_{EP_2} & -1_{EP_3} & 8_{EP_1} & 4_{EP_2} & -1_{EP_3} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 6_{ES_2} & 3_{ES_3} & 2_{ES_1} & 6_{ES_2} & 3_{ES_3} \\ 2_{ES_3} & -5_{ES_1} & 7_{ES_2} & 2_{ES_3} & -5_{ES_1} \\ 4_{ES_1} & -1_{ES_2} & 8_{ES_3} & 4_{ES_1} & -1_{ES_2} \end{vmatrix}; \text{ de donde se desprende}$$

que el

$$|B| = [(6)(-5)(8) + (3)(7)(4) + (2)(2)(-1)] - [(4)(-5)(2) + (-1)(7)(6) + (8)(2)(3)] = [-240 + 84 - 4] - [-40 - 42 + 48]$$

$$|B| = -160 - (-34) = -160 + 34 = -126 \Rightarrow |B| = -126.$$

Solución (d). Teorema JCE-1 del Determinante Simétrico con EPL, con el

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow |A|_{\text{Simétrico}} = \begin{vmatrix} -2_{EP} & 3_{EP} & 2 \\ 4 & 5 & -4 \end{vmatrix} = (-2)(5) + (3)(-4) = (-10) + (-12) = -22 \Rightarrow |A| = -22.$$

$$\text{con el } |B| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & 7 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix} \Rightarrow |B|_{\text{Con reducción de orden}} = 6 \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|B| \xrightarrow{R} |B|_{\text{Simétrico (EPL)}} = 6 \begin{vmatrix} -5_{EP} & 7_{EP} & 5 \\ -1 & 8 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2_{EP} & 7_{EP} & -2 \\ 4 & 8 & -4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2_{EP} & -5_{EP} & -2 \\ 4 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$|B|_{\text{Simétrico}} = 6[(-5)(8) + (7)(1)] - 3[(2)(8) + (7)(-4)] + 2[(2)(-1) + (-5)(-4)]$$

$$|B|_{\text{Simétrico}} = 6[-40 + 7] - 3[16 + (-28)] + 2[(-2) + 20] = 6[-33] - 3[-12] + 2[18] = -198 + 36 + 36 = -198 + 72$$

$$|B|_{\text{Simétrico}} = -126 \Rightarrow |B| = -126.$$

Solución (e). Como el

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = (-1)|A|_{\text{Simétrico con (ESL)}} = (-1) \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 4^{ES} & 5^{ES} & -4 \end{vmatrix}; \text{ por consiguiente, el}$$

$$|A| = (-1)[(4)(3) + (5)(2)] = (-1)[12 + 10] = (-1)[22] = -22. \Rightarrow |A| = -22.$$

Solución (1.4.2- Teorema JCE-2 del Determinante Simétrico con entrada secundaria de Leibniz). Como el

$$|B| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & 7 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix} \Rightarrow |B|_{\text{Con reducción de orden}} = 6 \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{de donde, } |B| \xrightarrow{R} |B|_{\text{Simétrico reducido en orden ; es con entrada de signo negativa}}$$

decir el

Entrada con signo negativo.

↓

$$|B| = -6 \begin{vmatrix} -5 & 7 & 5 \\ -1^{ES} & 8^{ES} & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 7 & -2 \\ 4^{ES} & 8^{ES} & -4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -5 & -2 \\ 4^{ES} & -1^{ES} & -4 \end{vmatrix}$$

$$|B| = -6[(-1)(7) + (8)(5)] + 3[(4)(7) + (8)(-2)] - 2[(4)(-5) + (-1)(-2)] = -6[-7 + 40] + 3[28 - 16] - 2[-20 + 2]$$

$$|B| = -6[33] + 3[12] - 2[-18] = -198 + 36 + 36 = -198 + 72 = -126 \Rightarrow |B| = -126.$$

Comentarios finales

1. Los Teoremas JCE-1 y 2 del determinante simétrico con entradas primaria y secundaria de Leibniz, sólo pueden ser aplicados a determinantes de orden (2×2) que son la última reducción de orden a la que converge un determinante de orden superior (DOS), i.e.,

determinantes de orden $(3 \times 3), (4 \times 4), \dots, (n \times n): n \in \mathbb{Z}^+$. Por ejemplo, el determinante de orden superior (3×3) , se transforma en tres de orden base (2×2) al pivotar en los elementos $+a_{11}$, $-a_{12}$ y $+a_{13}$ para la (EPL), y $-a_{11}$, $+a_{12}$ y $-a_{13}$ para la (ESL). Recordar el método de reducción de orden o de los cofactores para la solución de un (DOS).

2. Se obtienen resultados idénticos por cualquiera de los métodos, i.e., la Regla de Cramer, Cayley, Sarrus o de los Teoremas JCE-1 y 2 del determinante simétrico.
3. Por los Teoremas JCE-1 y 2 del determinante simétrico, se obtienen más rápidamente los resultados. El nuevo paradigma que en este trabajo estamos presentando, evita el conflicto que provocan los otros métodos con respecto a la multiplicación por (-1).

Referencias

- [1] Nakos, G. & Joyner, D. 2006. Álgebra lineal con aplicaciones. Ed. Thomson, pp.: 382-387.
- [2] Baldor, A., 1993. *Álgebra*. Publicaciones Culturales. Décima reimpresión, pp.: 333-347.
- [3] Solar, G. E. y Speziale, de G. L., 1985. Álgebra lineal. Ed. Limusa: Grupo Noriega Editores. 2da. Edición, p.:419. México.