

2.3.8. Levantamiento bibliográfico: prueba y demostraciones en geometría espacial

Maritza Luna Valenzuela

Saddo Ag Almouloud

Pontificia Universidade Catolica de São Paulo, Brasil

Resumen

En este artículo se presentará una revisión bibliográfica con respecto a la enseñanza de la geometría espacial teniendo como objeto de estudio Vectores y sus operaciones, con enfoque en las concepciones de los alumnos acerca de las pruebas y demostraciones (en el sentido de Balacheff) de diversas proposiciones y parte de esos resultados se presentará en este artículo. Se utilizó la revisión bibliográfica en tesis de pós-graduação y en artículo de revistas. Para dicha búsqueda utilizamos los descriptores: Enseñanza de la geometría espacial, demostraciones en geometría, vectores, geometría vectorial.

Introducción

La geometría vectorial es una herramienta poderosa para resolver problemas de ingeniería y los fenómenos físicos, por ello en la formación profesional en el Perú algunas carreras de graduación, en especial las de ciencias e ingenierías, incluyen en el currículum el curso de AMGA (Álgebra Matricial y Geometría Analítica), que es requisito para los cursos de cálculo en varias variables, cálculo aplicado, cursos de mecánica y física. En el curso de AMGA se inicia el estudio de los Vectores y propiedades, donde para la resolución de problemas y en particular las demostraciones en Geometría ponen en juego la movilización de conceptos y propiedades que requieren ser de algún modo una representación gráfica con lápiz y papel y lograr el desarrollo de la percepción, intuición y sentido estético y poder desarrollar actividades que requieran el planteo de conjeturas. Por ello estamos interesados en investigar las concepciones de los alumnos en pruebas y demostraciones.

Revisión de la literatura

Iniciamos la revisión bibliográfica primero con pruebas y demostraciones en matemática, en particular demostraciones en geometría y finalmente en enseñanza de vectores tanto en tesis como en artículos. Presentaremos en esta oportunidad presentaremos la de revisión de algunos resultados cuatro artículos en diversas revistas y cuatro tesis de las cuales una es de maestría y las tres siguientes son de doctorado.

Artículos revisados

En su artículo Almouloud (2007) presenta los resultados de un proyecto realizado por el grupo de pesquisa Pensamiento Matemático (PEA-MAT) del Programa de los Estudios de Pós Graduación en Educación Matemática de la PUC-SP, cuyo objetivo fue investigar los factores que interfieren en el proceso de enseñanza y aprendizaje involucrando raciocinio deductivo en matemática. La investigación se aplicó a un grupo de profesores de Enseñanza Fundamental y Medio. Se enfatiza dos objetivos en la investigación: (1) Los modos de organización y los procedimientos teórico-metodológico relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las pruebas y demostraciones en matemática en las series finales de enseñanza fundamental y (2) las representaciones de los profesores de esas series finales en cuanto al papel del raciocinio deductivo en la formación del alumno. La conclusión a la que llegó el autor es que los profesores tenían dificultades en identificar hipótesis y tesis en las actividades propuestas y además confundían dichos términos; dificultad en reconocer las demostraciones en libros didácticos; para ellos una demostración en matemáticas era sinónimo de ilustración de conceptos por medio de representaciones gráficas.

Morales y Samper (2015) describen y ejemplifican dos tipos de dificultades identificadas en los estudiantes de un curso de geometría euclídea del primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas y Física, en la Universidad de la Amazonia. Para su fundamentación teórica se conceptualizó acerca de los siguientes tópicos: la demostración, tipos de demostración, dificultades en la construcción de demostraciones geométricas, el manejo y la comprensión del enunciado de un teorema, los autores indican que: En matemáticas, una demostración generalmente es el encadenamiento de afirmaciones. Se usa el esquema de razonamiento válido *Modus Ponendo Ponens*, en el que las afirmaciones se van deduciendo de postulados, definiciones y teoremas demostrados con anterioridad, a partir de unos datos dados y, mediante el empleo de esquemas de razonamiento válidos. Ello es lo que permite decidir la veracidad o no de una afirmación, dentro de un sistema teórico específico. Además, mencionan a Dreyfus, citado por Bernardis & Moriena (2015) y expresa que “es necesario que los estudiantes se enfrenten realmente a preguntas cuya naturaleza les pida que razonen, argumenten y justifiquen las afirmaciones matemáticas”. La conclusión a la que arribaron fue: (i) El uso de la geometría dinámica puede incidir en la comprensión de la necesidad de las condiciones establecidas en la hipótesis de un teorema o de un problema para que la tesis se cumpla. (ii) Se sugiere que antes de iniciar el proceso de demostración, el estudiante identifique y dé a conocer a los coequiperos y al profesor, los datos válidos

que se infieren de la hipótesis dada en el enunciado. (iii) En el proceso de producción de demostraciones deductivas formales en geometría euclídea, es necesario usar propiedades de los números reales, las cuales se supone fueron estudiadas en la educación básica y/o media. Su desconocimiento es causa de dificultad. Se recomienda analizar éstas con los estudiantes, cada vez que se vayan a usar, para que identifiquen los errores en los que pueden estar incurriendo. (iv) De la misma manera, se recomienda hacer un repaso acerca de algunos elementos fundamentales de la teoría de conjuntos, de manera específica: conjuntos, clases, operaciones y su relación con la lógica matemática. (v) El uso incorrecto del lenguaje propio de la geometría afecta la comunicación clara, concisa y, posiblemente, la comprensión. Como estrategia que ayudará a obviar este tipo de dificultad, se recomienda que tanto el estudiante como el profesor que socializan por escrito en el tablero la producción de demostraciones, se esfuercen por utilizar y exigirse mutuamente el uso de la sintaxis y el lenguaje icónico propio de la geometría.

Como indica Balacheff (2010), en la mayoría de las veces, el problema de la enseñanza de la prueba matemática se ha abordado casi independientemente de la enseñanza del "contenido" matemático mismo. Además, el autor indica que algunos planes de estudio han expuesto a los estudiantes a una cantidad significativa de matemáticas sin aprender acerca de la prueba matemática como tal (Herbst, 2002, p.288); otros enseñando la demostración matemática como una materia en sí misma sin relacionarla significativamente con ejemplos prácticos concretos (véase Usiskin, 2007, p.75). La tradición didáctica más común elige introducir pruebas en el contexto de la geometría, generalmente al final del octavo grado, esto en el sistema escolar de Francia, mientras que las ignora por completo en álgebra o aritmética, donde las cosas parecen reducirse a "meras" cuentas. Esta orientación ha cambiado ligeramente en la última década con un énfasis creciente en la enseñanza de la prueba. Sin embargo, una distinción implícita entre forma y contenido ha llevado a referencias a la enseñanza de "razonamiento matemático" (por ejemplo, normas NCTM) o "razonamiento deductivo" (por ejemplo, programas nacionales franceses) en lugar de una prueba matemática que habría cambiado de "forma" mucho más a la vanguardia de la escena didáctica.

Existen investigaciones donde utilizan vectores y parte de sus tareas realizan demostraciones pero no analizan concepciones de los alumnos, como muestra Lacués (2014) quien desarrolla una investigación utilizando temas de vectores y matrices como parte de una investigación que muestra en el reporte donde presenta los efectos sobre los

aprendizajes de un diseño didáctico, con la finalidad de enseñar Sistemas Matemáticos de Símbolos (SMS) en un primer curso universitario de Álgebra Lineal, basado en la retroalimentación a los estudiantes a partir de su desempeño en tareas de resolución de ejercicios. Se reporta complementariamente el estudio de la incidencia de esta intervención en los desempeños de los alumnos en un curso de Cálculo. Se utilizó un diseño experimental con un grupo experimental (GE) y uno de control (GC), con un test inicial y otro final para evaluar desempeños. Se clasificó a los estudiantes mediante el test inicial en dos categorías (calificación alta- calificación baja) y se estableció que los de calificación alta de GE consiguieron desempeños en el test final significativamente mayores que los correspondientes de GC (se utilizó una prueba de Mann-Whitney). No se detectaron diferencias entre los subgrupos de estudiantes de calificación baja. Los integrantes de GE tuvieron desempeño significativamente mayor que los de GC en la tarea de Cálculo (se utilizó un Student's t-text). Estos resultados permiten utilizar este diseño en grupos de estudiantes con alta calificación inicial, y desafía a buscar estrategias alternativas para enseñar a los de menor calificación.

Disertaciones y Tesis revisadas

En la tesis de Ordem (2015) el objetivo fue analizar las concepciones de prueba y demostración en geometría plana de estudiantes de Licenciatura en matemáticas de la Universidad Pedagógica de Mozambique. Los resultados a los que arribó el autor sobre los estudiantes del grupo de investigación fueron: (i) no mostraban estrategias consistentes de elaboración de demostraciones, ni justificaban con base matemática plausible - sus estrategias parecen más influenciadas por el abordaje de la geometría en los libros didácticos adoptados en la enseñanza fundamental. (ii) tratan con pruebas y demostraciones como otro tema de aprendizaje en matemáticas y no como medio de comunicación y de validación en matemáticas. (iii) no utilizan criterios consistentes para evaluar pruebas y demostraciones. (iv) la concepción de que pruebas y demostraciones son simples rituales disociados de una de sus funciones principales, la de validar propiedades y conjeturas verdaderas, o de refutar conjeturas falsas. Finalmente, el estudio revela que, entre los estudiantes de la investigación, reina la concepción de que existen métodos empíricos que validan propiedades geométricas, aunque no sean demostraciones, y métodos empíricos que no validan propiedades geométricas, según el tipo de instrumento utilizado.

Mientras que la tesis de Brito (2016) investiga una propuesta didáctica cuyas tareas articulan pruebas y demostraciones como estrategia metodológica de enseñanza para minimizar las dificultades relacionadas al tópico "cuadriláteros" en un curso de licenciatura en matemáticas. Las tareas involucran construcciones geométricas en un ambiente de papel y lápiz en el que los alumnos son solicitados a construir figuras geométricas y justificar matemáticamente las técnicas utilizadas. En la ejecución de las tareas los alumnos efectúan conversiones de registros y movilizan las diferentes aprehensiones de una figura geométrica (secuencial, perceptiva, operatoria y discursiva). Los resultados a lo que arribo la autora evidenció dificultades conceptuales relativas a la caracterización de cuadriláteros notables y las relaciones entre ellas. Donde algunas de esas dificultades están relacionadas con las justificaciones propuestas por los alumnos. La autora menciona que ese hecho es reforzado por Duval (2009a, b) cuando afirma que la limitación de la representación de un objeto matemático a un único registro puede provocar confusión entre el objeto y su representación. Además de eso, la aprehensión perceptiva es la primera visión del alumno sobre la figura y puede bloquear las otras aprehensiones. Constató también la experiencia de los alumnos con la geometría se restringe a la intuición (conocimientos basados en experiencias empíricas) y la característica de una geometría científica (evidenciada en

momento en que se afirma que mejor manera de dar inicio a la geometría es por las nociones primitivas). Por lo cual afirma la autora que el análisis del perfil de los alumnos y de sus concepciones sobre la enseñanza de la geometría da indicios de que los alumnos no experimentaron en su formación momentos favorables a la construcción de conocimientos/saberes geométricos.

Saldariaga (2012) presenta algunos aspectos de la evolución conceptual de la noción de vector. Los resultados fueron obtenidos a partir de revisiones con trasfondo histórico-epistemológico. El autor establece dos líneas de desarrollo histórico: la línea matemática y la línea física. También indica que, aunque se analizan algunos aspectos de la línea física, en especial en lo concerniente a la modelación de algunos fenómenos naturales, nos centramos en la línea matemática. Mostró que la evolución del álgebra genera el ambiente propicio para acoger estructuralmente a estos nuevos objetos de naturaleza no necesariamente numérica. La construcción histórica de la noción de vector se fue manifestando en la medida que se iban identificando elementos de causalidad de la triada: magnitud, dirección y número. En este proceso contribuyeron matemáticos de diferentes entornos geográficos, entre los que sobresalen Euclides, Descartes, Galileo, Newton, Hamilton, Grassmann y Maxwell, entre otros. Dedicó una parte de la tesis al libro *Elementary Treatise on Quaternions* del matemático y físico escocés Peter Tait porque es un texto clave para entender la instauración del moderno análisis vectorial.

En Coelho (2015), se realiza una investigación para analizar como los autores de libros didácticos organizaron las actividades propuestas en lo que se refiere al estudio de la Recta y del Plano para la enseñanza de la Geometría Analítica en el Espacio. La autora analiza los libros didácticos basándose esencialmente en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Los resultados del análisis de los libros investigados indican que, a pesar de una diversidad de las tareas, con base en la TAD, propuestas por los autores, pocos manuales contemplan las sugerencias de abordaje para la Recta y para el Plano en el Espacio indicadas por Lebeau (2009). Además, se encontró que es posible inferir que los autores privilegian una modelización algébrica de los objetos matemáticos, así como las técnicas adoptadas por los mismos encontrándose situadas en el campo del Álgebra Lineal y de la Geometría Analítica.

Conclusiones

Muchas de las investigaciones nos muestran las dificultades de los estudiantes en relación con las demostraciones en cursos de graduación de Universidades. Los autores advierten que la aplicación de conceptos y propiedades, traen consigo algunas dificultades en términos de comprensión principalmente, cuando se apoyan esbozos gráficos errados. Por ello algunos autores insisten, también, en la importancia de la interacción entre diferentes representaciones para generalizar los principales aspectos de la geometría. Hasta el momento hemos encontrado en esta revisión bibliográfica pesquisas que tratan de demostraciones en geometría en el plano es decir dos dimensiones y ninguna en demostraciones con vectores en dos y tres variables reales. Este resultado está nos conduce a profundizar nuestra revisión y buscar caminos para ampliar la enseñanza de vectores en la geometría espacial y propiciar la construcción de conocimientos más significativos para los alumnos porque se apoyaría en demostración y verificación problemas reales.

Referencias

- Almouloud, S. A. (2007). Provas e Demonstrações em Matemática. Problemática de seus processos de ensino e aprendizagem. GT Mathematics Education / n.19 <http://www.anped.org.br/sites/default/files/gt19-2957-int.pdf>
- Balacheff, N. (2010). Bridging knowing and proving in mathematics An essay from a didactical perspective. In: Hanna G., Jahnke H. N., Pulte H. (eds.) *Explanation and Proof in Mathematics* (pp. 115-135). Heidelberg: Springer.
- Brito, M. (2016). *Uma Organização Didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas*. Disertación publicada en el Doctorado de Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo-Brasil.
- Coelho (2015). Geometria Analítica no Espaço: Análise das Organizações Matemática e Didática em Materiais Didáticos. Disertación publicada en el Doctorado de

Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo-Brasil.

Duval, R. (2009a) Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. Campinas, SP: Papyrus, 2009a. p. 11-33.

Duval, R., (2009b). **Semiósis e Pensamento Humano: Registros Semióticos e Aprendizagens Intelectuais**. Coleção Contexto da Ciência. São Paulo: Livraria Editora da Física.

Gutiérrez, A. (2001). Estrategias de investigación cuando los marcos teóricos existentes no son útiles. Actas del 5º Simposio de la SEIEM. Almería.

Lacué, E. M. (2014). Aprendizaje de Sistemas Matemáticos de Símbolos en Álgebra Lineal y Cálculo. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p. 299-318.

Lebeau, C. (2009) Etude d'une genèse d'un modèle algébrique du système formé par les points, droites et plans de l'espace usuel. 2009. 390 f. Thèse de doctorat. Université de Liège.

Morales, S. & Samper, C (2015). Dificultades en el aprendizaje de la demostración deductiva formal en geometría euclídea. *Amazonia Investiga*. Florencia, Colombia, Vol. 4 Núm.6. 55-68.

Ordem, J. (2015). *Prova e demonstração em Geometria Plana: concepções de estudantes da licenciatura em ensino de Matemática em Moçambique*. Disertación publicada en el Doctorado de Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo-Brasil.

Saldariaga, C. (2012) *La instauración histórica de la noción de vector como concepto matemático*. Disertación publicada en la maestría de Universidad del Valle facultad de Educación y Pedagogía Programa Académico Maestría en Educación con Énfasis en Educación Matemática. Santiago de Cali. Colombia.

[Volver al índice de autores](#)