EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y EL TRIÁNGULO DE PASCAL

Verónica Scorza
Consejo de Enseñanza Secundaria, Anep.
verosco@sanfelipe.edu.uy

Nivel: 2do año Secundaria.

> *El tratamiento de lo general, la exploración, formulación y validación de conjeturas sobre propiedades aritméticas, la posibilidad de resolver problemas geométricos vía un tratamiento algebraico, la puesta en juego de una coordinación entre diferentes registros de representación semiótica, son rasgos esenciales de la práctica algebraica que la colocan en el corazón de la actividad matemática.* (Sessa, 2005)

Resumen

El pasaje de lo aritmético a lo algebraico requiere un salto en el grado de abstracción por parte de los alumnos, y para los docentes representa un desafío desde el punto de vista didáctico.
El trabajo que presentamos refiere a una experiencia de clase con un grupo de segundo año al que se propuso una tarea de exploración, búsqueda de regularidades o patrones, y manipulación de las operaciones con expresiones algebraicas en un contexto nuevo para los alumnos.
Se trata de una investigación guiada en la que los alumnos irán relacionando los desarrollos de las potencias del binomio $(a+b)$ con los coeficientes del Triángulo de Pascal., procurando una generalización de sus hallazgos y su aplicación a nuevas situaciones.

Descripción de la tarea y exposición de resultados.[7]

La primera parte de la tarea pedía a los alumnos que verificaran que eran ciertas las siguientes igualdades:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Como las únicas herramientas que poseían los alumnos hasta el momento era haber trabajado con sumas, restas y multiplicaciones de expresiones algebraicas, en particular con polinomios de una variable, para verificar las igualdades, calcularon en primer lugar $(a+b)(a+b)$ el resultaron lo multiplicaron por $(a+b)$ y éste, una vez más por $(a+b)$.

[7] Se adjunta la tarea en el ANEXO 1

Luego se les presentaba la siguiente secuencia:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Interpelados sobre la posibilidad de tener que calcular $(a+b)^6$ se plantea la necesidad de encontrar una forma alternativa para obtener el desarrollo de esa potencia. Así surge el objetivo de la tarea:

Nuestra tarea consistirá en lograr completar los segundos miembros de la secuencia sin realizar las operaciones que requiere el desarrollo de las potencias.

Se les presenta entonces lo siguiente:

Considera ahora los siguientes números.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Estos números están dispuestos en una forma conocida con el nombre de ***TRIÁNGULO DE PASCAL***.

Compara *estos números con los coeficientes de las expresiones algebraicas de los segundos miembros de cada paso de la secuencia planteada.*

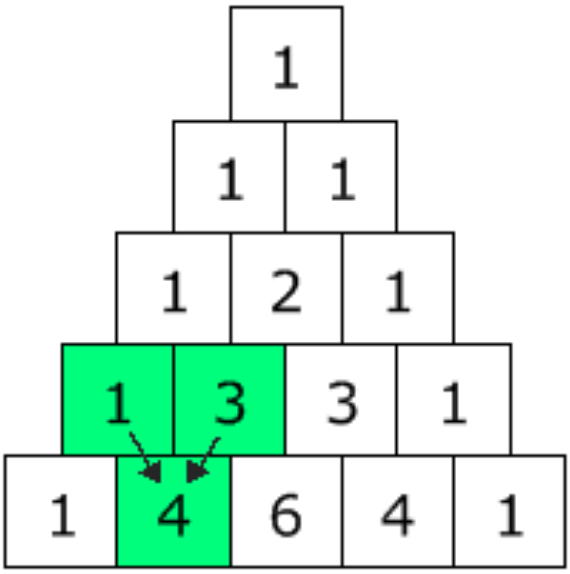
Los alumnos constataron que los coeficientes de las expresiones coincidían con los números que aparecen en las filas del Triángulo de Pascal. Para entonces ya se preguntaban por qué y para qué aparecían estos números en "forma de triángulo".

Se les propuso luego:

> Cada fila en el triángulo de Pascal se obtiene siguiendo un **patrón** de formación.
>
> ***Encuentra*** *la forma de escribir la siguiente fila del triángulo (la séptima).*

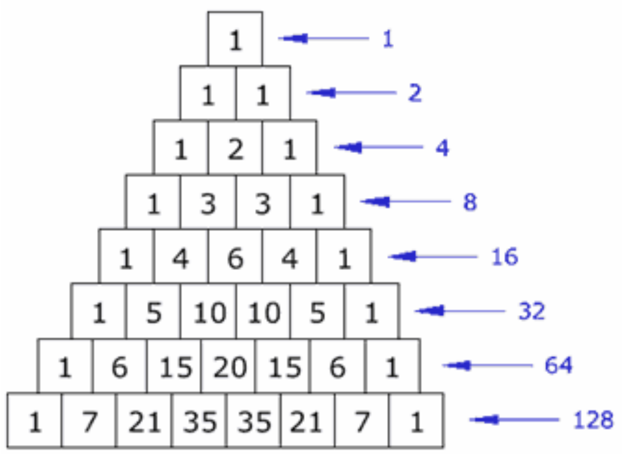
Todos los equipos lograron completar la siguiente fila. ¿Cómo?

La mayoría observó el patrón de formación en las filas anteriores y calculó: 1+5=6; 5+10=15; etc. obteniendo la séptima fila: 1 6 15 20 15 6 1



Sin embargo un equipo propuso lo siguiente:

Observó que la suma de los términos de cada fila seguía un patrón:
1; 1+1=2; 1+2+1=4; 1+3+3+1=8; etc.
A partir de allí dedujeron que, en la 7ma fila los términos debían sumar 64.
Además observaron la secuencia de los términos centrales: 1+1=2, 3+3=6, por lo que dedujeron que el término central de la fila debía ser 20 (10+10). Observaron también que "los lados del triángulo contenían sólo "unos" y que la secuencia de los "lados" paralelos a los "unos" era la de los números naturales a partir del 1, por lo que el segundo número y el penúltimo de la 7ma fila debían ser 6. Por diferencia hallaron los términos adyacentes al término central: 15.



A continuación se les pedía:

> ***Observa*** *ahora la parte literal en las expresiones algebraicas de los segundos miembros de cada paso.*
>
> Las potencias de *a* y de *b* siguen un patrón.
>
> ***Encuéntralo y descríbelo.***

Los equipos hicieron las siguientes observaciones:

- Las potencias de *a* comienzan con el exponente del binomio y las de *b* terminan con el exponente del binomio.
- Las potencias de *a* van disminuyendo de a uno y las potencias de *b* van aumentando de a uno.
- La suma del exponente de *a* y de *b* es el exponente del binomio.

Luego se les planteó:

> ***Utiliza*** *ahora toda la información que has encontrado para* ***escribir*** *la expresión algebraica del desarrollo de*
>
> $$(a+b)^6 =$$

Y finalmente:

> *Si tuvieras que escribir el desarrollo de*
>
> $$(a+b)^{10} =$$
>
> *¿Cómo lo harías utilizando el Triángulo de Pascal?*

Todos los equipos lograron completar el desarrollo de $(a+b)^6$ utilizando los coeficientes 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1; y en la parte literal siguieron la regla que encontraron para los exponentes.

De esta forma aparecía en los trabajos:

Tres equipos explicaron cómo escribirían el desarrollo de $(a+b)^{10}$.
Algunos efectivamente lo escribieron, otros plantearon que seguirían el triángulo hasta la fila 11 y luego escribieron las partes literales de los términos:

La tarea concluía con una instancia de búsqueda de información y posterior presentación en el formato que consideraran adecuado para exponer en la muestra de fin de año y una presentación oral de los trabajos como forma de evaluación final:

Realiza una búsqueda en Internet para investigar:

- la historia del Triángulo de Pascal
- curiosidades en el Triángulo de Pascal (te sorprenderás al encontrarte con temas ya trabajados en el curso)
- la vida de Blaise Pascal

Sugerencias:
*es.wikipedia.org/wiki/**Triángulo_de_Pascal (ver en inglés)***
*www.dmae.upm.es/.../**trianguloPascal/triangulo**.html -*

Conclusión

La tarea se realizó con gran motivación representando una auténtica actividad de exploración, búsqueda y descubrimiento de regularidades o patrones, para su posterior uso en otras situaciones.
Tuvieron la posibilidad de experimentar la satisfacción del descubrimiento matemático aplicando los conocimientos matemáticos que tenían, analizando y generando información, encontrando relaciones, describiéndolas y enunciándolas como proposiciones generales.
Con esta tarea se pusieron en juego estrategias propias de la actividad matemática: problematización, formulación de conjeturas, descubrimientos, aplicación y comunicación de resultados.

Bibliografía

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra*. Argentina: Libros del Zorzal**.**
Requena Fraile, A. (1998). *El álgebra. Del arte de la cosa a las estructuras algebraicas*. Santillana 1998.
Mankiewicz, R. (2000). *Historia de las matemáticas*. Buenos Aires: Paidós.
Calvo, C; Scorza, V y Tiento, F. (2000). *Matemática A 5to Científico.* Santillana.
Perero, M. (1994). *Historia e Historias de Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
IBO (2007). Guía del Programa de los Años Intermedios Matemática.

ANEXO 1

EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y EL TRIÁNGULO DE PASCAL

(1) Verifica que son ciertas las siguientes igualdades:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

(2) Considera ahora la siguiente secuencia:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Nuestra tarea consistirá en lograr completar los segundos miembros de la secuencia sin realizar las operaciones que requiere el desarrollo de las potencias:

a) Considera ahora los siguientes números.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

....

Estos números están dispuestos en una forma conocida con el nombre de
TRIÁNGULO DE PASCAL.

Compara *estos números con los coeficientes de las expresiones algebraicas de los segundos miembros de cada paso de la secuencia planteada.*
¿Qué observas?

Cada fila en el triángulo de Pascal se obtiene siguiendo un **patrón** de formación.

Encuentra *la forma de escribir la siguiente fila del triángulo (la séptima).*

b) ***Observa*** *ahora la parte literal en las expresiones algebraicas de los segundos miembros de cada paso.*

Las potencias de *a* y de *b* siguen un patrón.

Encuéntralo y descríbelo.

c) ***Utiliza*** *ahora toda la información que has encontrado hasta ahora para* ***escribir*** *la expresión algebraica del desarrollo de*

$(a+b)^6 =$

d) Si tuvieras que escribir el desarrollo de $(a+b)^{10} =$, ¿cómo lo harías utilizando el Triángulo de Pascal?

Realiza una búsqueda en internet para investigar:

- ✓ la historia del Triángulo de Pascal
- ✓ curiosidades en el Triángulo de Pascal (te sorprenderás al encontrarte con temas ya trabajados en el curso)
- ✓ la vida de Blaise Pascal

Sugerencias: *es.wikipedia.org/wiki/**Triángulo_de_Pascal (ver en inglés)***
*www.dmae.upm.es/.../**trianguloPascal/triangulo**.html –*

Presenta tu trabajo en un formato que pueda ser expuesto en la muestra PAI.

Recuerda que el trabajo concluye con una presentación oral.