



## EL TRABAJO CON SISTEMAS ALGEBRAICOS DE CÓMPUTOS COMO MEDIO PARA LA VALORACIÓN CONTINUA DEL APRENDIZAJE Y DE LAS PRÁCTICAS EDUCATIVAS.

Sandra Ramirez; Silvina Suau; Mercedes Moreno Diaz ; Sonia Pastorelli  
Facultad Regional Santa Fe, Univ. Tecnológica Nacional. ARGENTINA;

[scramirez@frsf.utn.edu.ar](mailto:scramirez@frsf.utn.edu.ar)

Nivel: Medio; terciario y Universitario

Palabras claves: Sistemas Algebraicos de Cómputos (SAC) - comprensión – trabajos grupales - aprendizaje cooperativo.

### Resumen

Cooperar significa trabajar juntos para alcanzar objetivos compartidos. El Aprendizaje Cooperativo es el uso en educación de grupos pequeños, en los que los alumnos trabajan juntos para mejorar su propio aprendizaje y el de los demás.

En la cátedra de Análisis Matemático I de la Facultad Regional Santa Fe de la Universidad Tecnológica Nacional se realizó una práctica, incorporando el uso de sistemas algebraicos de cómputos para el desarrollo de un trabajo práctico que engloba la mayoría de los contenidos conceptuales de la asignatura con el objetivo de mejorar la comprensión de los mismos.

Comprender un tópico según el marco teórico *Enseñanza para la Comprensión* (EpC) requiere en situaciones nuevas en donde interviene dicho tópico poder explicar, justificar, extrapolar, vincular y aplicar de maneras que van más allá del conocimiento y la habilidad rutinaria (sin que ello signifique restarle importancia al conocimiento y las habilidades básicas).

Los jóvenes que participaron en esta experiencia la han criticado y valorizado desde distintas aristas. De este modo, las situaciones habituales de aprendizaje se convirtieron en fuentes de problematización y de indagación reflexiva de nuestras prácticas de enseñanzas.

### Introducción.

Cooperar significa trabajar juntos para alcanzar objetivos compartidos. El Aprendizaje Cooperativo es el uso en educación de grupos pequeños, en los que los alumnos trabajan juntos para mejorar su propio aprendizaje y el de los demás (Johnson y cols., 1999).

En el año 2007 la cátedra de Análisis Matemático I de la Facultad Regional Santa Fe de la Universidad Tecnológica Nacional se realizó una experiencia, incorporando el uso de sistemas algebraicos de cómputos para el desarrollo de un trabajo práctico que englobaba la mayoría de los contenidos conceptuales de la asignatura.

### El modelo pedagógico.

Cuando nos preguntamos ¿qué es la comprensión?, las respuestas surgen generalmente vinculadas a procesos que podemos observar. Decimos que alguien ha comprendido no sólo si sabe del tema sino que puede pensar a partir de él. Dos ideas surgen de estas afirmaciones. Primero, para apreciar la comprensión de una persona en un momento determinado, hay que pedirle que haga algo que ponga en juego su comprensión, explicando, resolviendo un problema, construyendo un argumento, etc. Segundo, lo que los estudiantes responden no sólo demuestra su nivel de comprensión actual, sino que lo más probable es que los haga avanzar. «Al trabajar por



medio de su comprensión en respuesta a un desafío particular, llegan a comprender mejor» (Perkins, en Stone Wiske 1999).

La idea de que reconocemos la comprensión por medio del desempeño, no sólo tiene sentido sino que aparece a lo largo de una variedad de investigaciones sobre la cognición humana. El psicólogo suizo J. Piaget, determinaba la comprensión de las estructuras lógicas básicas por parte de los niños estableciendo tareas que debían realizar, por ejemplo, ordenar un grupo de palitos del más corto al más largo. Para hacer una generalización reconocemos la comprensión por medio de un criterio de desempeño flexible. La comprensión se presenta cuando la gente puede pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que sabe. Por contraste, cuando un estudiante no puede ir más allá de la memorización y el pensamiento y la acción rutinarios, esto indica falta de comprensión.

Los desempeños de comprensión son actividades que *desarrollan* y *demuestran* la comprensión del alumno al exigirles usar lo que saben, de nuevas maneras. Según define Blythe (1999, p. 162) “*en esas actividades, los alumnos reconfiguran, expanden y aplican lo que saben y, además, extrapolan y construyen a partir de sus conocimientos previos*”.

En este contexto, el criterio de desempeño flexible señala la presencia de la comprensión, y a su vez la comprensión es la que provoca esta capacidad de desempeño flexible. Comprender un tópico quiere decir entonces, desempeñarse flexiblemente a partir de él, explicar, justificar, extrapolar, vincular y aplicar de maneras más creativas y exigentes que el conocimiento o la habilidad rutinaria. Un desempeño de comprensión siempre nos obliga a ir más allá, provocando avances en la comprensión así como también, producciones que demuestran esta comprensión.

De ninguna manera el énfasis en los desempeños implica quitarle importancia a los conocimientos o las habilidades básicas, pero los primeros constituyen un proceso más activo y constructivo. Los tipos de desempeños, desde luego, variarán con el campo disciplinar, el contexto, las exigencias del tópico, etc. Pero estas complicaciones no se deben a la visión de la comprensión vinculada con el desempeño, sino a la propia comprensión, que tiene niveles y exigencias distintas y variadas.

La Comprensión en Matemática está asociada con las situaciones típicas de la enseñanza de esta disciplina, por lo que se pone de manifiesto ante conceptos y definiciones, teoremas y demostraciones, procedimientos y problemas.

La comprensión en matemática de un estudiante como proceso, ante una exigencia, se caracteriza por una actuación que expresa la capacidad de éste para:

- ✓ Leer en el lenguaje simbólico que la expresa.
- ✓ Transcribir al lenguaje de la Matemática correctamente.
- ✓ Identificar datos e incógnitas de un enunciado analítico.
- ✓ Identificar los conocimientos asociados con los datos y con las incógnitas de un enunciado analítico.
- ✓ Hallar respuestas creativas.
- ✓ Emplear todos los registros (gráfico, analítico) para la respuesta a un problema.
- ✓ Validar el proceso seguido para hallar una respuesta.



- ✓ Relacionar problemas con los posibles métodos de resolución.
- ✓ Seleccionar acertadamente de lo que sabe lo que necesita para inferir lo que busca.
- ✓ Determinar de lo que le dan, lo que le falta para inferir lo buscado.
- ✓ Utilizar estrategias de trabajo hacia adelante, con lo dado, y hacia atrás con lo buscado para conectarlos mediante inferencias, formando una cadena donde cada inferencia y su premisa forman un eslabón.
- ✓ Establecer una cadena de inferencias.
- ✓ Fundamentar cada inferencia.
- ✓ Controlar el propio proceso de comprensión.

Todas estas capacidades se desarrollan y se demuestran a través de un proceso potenciado cuando se interactúa entre pares, el que no puede ser valorado a través de un único examen final (y mucho menos si éste es sólo individual y escrito). Sin embargo (y normalmente por exigencia curricular) ésta metodología es la empleada en la enseñanza universitaria.

Como ataque a este conflicto la metodología de enseñanza EpC (Enseñanza para la Comprensión) aboga por la mejora de los desempeños de comprensión a través de la valoración continua de los mismos. Los desarrollos de proyectos grupales son adecuados para este fin, ya que a la vez que permiten observar los desempeños de los estudiantes, posibilitan retroalimentar y andamiar el aprendizaje.

### **La experiencia.**

En el año 2007 la cátedra Análisis Matemático I de la Regional Santa Fe de la Universidad Tecnológica Nacional contó aproximadamente con unos 350 alumnos ingresantes a las carreras de ingeniería distribuidos en 8 comisiones.

Cabe destacar que esta materia es de dictado anual y algunos de sus contenidos son funciones, curvas dadas en su forma paramétrica, límite funcional, derivada y sus aplicaciones, como ejemplo búsqueda de extremos. Integrales y sus aplicaciones, áreas planas, longitud de curva, volumen de sólidos de revolución. La adquisición de estos nuevos conceptos por parte de los alumnos, la necesidad de hacer una valoración continua del aprendizaje por parte de los docentes, el contar con un gabinete de informática y un software matemático con muchas potencialidades fueron los determinantes para la realización de esta experiencia.

Si bien años anteriores se desarrollaron propuesta similares para grupos reducidos de jóvenes, durante el 2007 se decidió hacer extensiva la experiencia a todos los alumnos y de manera obligatoria. Es de hacer notar que en las experiencias previas se desarrollaban clases de laboratorios donde docentes enseñaban a utilizar el software seleccionado, desde el inicio del cursado. Desafortunadamente estas no se pudieron plasmar durante el 2007 dado que las luchas gremiales redujeron las actividades a las mínimas planificadas.

Para sortear este problema y con la idea que esta dificultad podría aportar datos sobre la incorporación de las herramientas SAC en el aprendizaje de la matemática sin tutor, docentes y jefes de trabajos prácticos de la



asignatura redactaron un material que resume la sintaxis y los comandos básicos necesarios para desarrollar las actividades.

### **Materiales**

En esta experiencia se utilizó el software Matemática 5.1 ya que por sus potencialidades numéricas y gráfica la facultad años atrás adquirió su licencia de uso.

El material redactado se presentó en dos formatos: uno versión word y otro como cuaderno electrónico de Matemática. Estos archivos se colgaron de la página web de la cátedra. En el mismo, a través de ejemplos, se muestra como realizar cálculos numéricos y simbólicos, como resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones, límites, derivadas, integrales indefinidas y definidas; trazar gráficas, reunir distintos gráficos, como conseguir ayuda dentro del soft, etc.

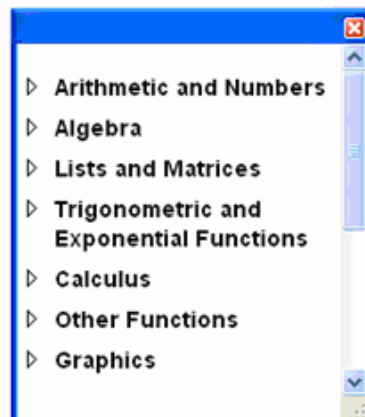
Las siguientes gráficas, son parte del material en word.

#### ▪ **Uso de Paletas**

El programa permite escribir operaciones expresiones y símbolos matemáticos con la notación que utiliza en la escritura tradicional. No es necesario recordar todas las sentencias para resolver ecuaciones u otros cálculos que necesites realizar. Según los casos podremos optar por hacerlo utilizando el teclado o la opción **Palettes** que se encuentran en el File del menú principal.

Por ejemplo intenta escribir y calcular  $\frac{\sqrt{\sqrt{25+4}}}{3^{14}} + \pi$

Ingresa en el menú principal a **File – Palettes – Basic Calculations – Arithmetic and Numbers**. Aparecerá la una ventana con la paleta





## Graficando en el plano.

En esta sección nos ocuparemos del gráfico de funciones de una variable. Y curvas dadas en ecuaciones paramétricas.

### Gráficas de funciones en coordenadas rectangulares

- Comando Plot

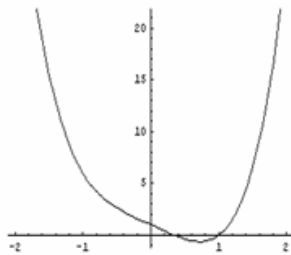
El comando más utilizado para graficar en el plano es Plot. La sintaxis básica es:

**Plot**[f, {x, x min, x max}] : construye el gráfico de f en el intervalo [x min, x max].

**Plot** [{f<sub>1</sub>, f<sub>2</sub>, ..., f<sub>n</sub>}, {x, x min, x max}] : construye, en un mismo par de ejes, los gráficos de las funciones f<sub>1</sub>, f<sub>2</sub>, ..., f<sub>n</sub> en el intervalo [x min, x max].

Por ejemplo Ingresamos la sentencia

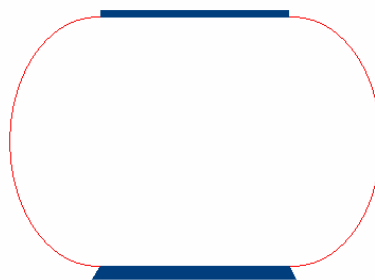
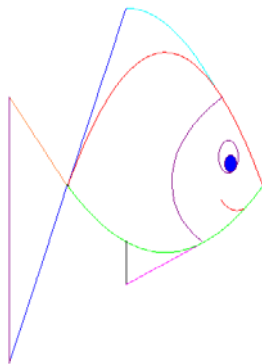
```
Plot2 x4 -3 x+1, {x,-2,2}]; (Intro)
```



### Las consignas del trabajo práctico.

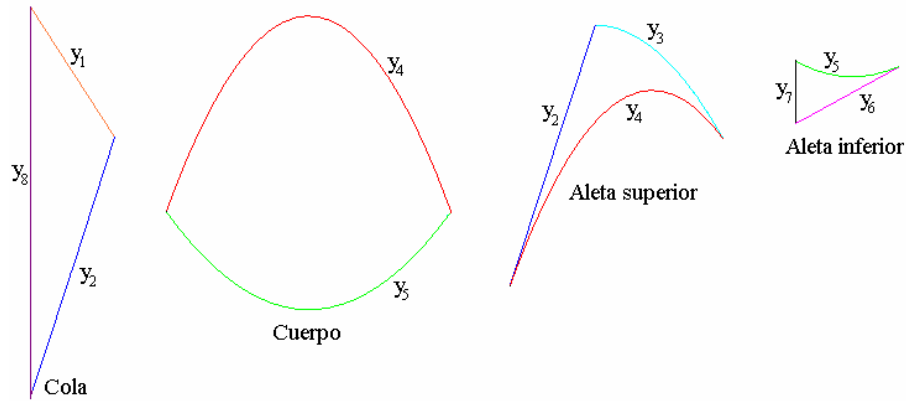
Los estudiantes se reunieron en grupos de hasta 4 integrantes. Cada grupo debía elegir un ejercicio de tres propuestos y resolverlo. Dos de estos ejercicios tenían consignas más cerradas y orientadas.

Uno de ellos por ejemplo, dado un pez y su pecera, se desea realizar un dibujo de ellos.





Se dio algunos datos de las funciones o curvas que modelan el gráfico, como las ecuaciones generales y algunos puntos que pertenecen a cada una, parte de esto se muestra a continuación.



- La cola está delimitada por la recta vertical  $y_8$  que pasa por  $(-8,4)$ ,
- La recta  $y_1$  que pasa por  $(-8,4)$  y  $(-5,0)$  y la recta  $y_2$  que pasa por  $(-8,-8)$  y  $(-5,0)$ .
- La parte superior del cuerpo está delimitada por la parábola  $y_4$  cuyo vértice es  $(0,6)$  y pasa por  $(5,0)$ .
- La parte inferior del cuerpo está delimitada por la parábola  $y_5$  cuyo vértice es  $(0,-3)$  y pasa por  $(-5,0)$ .
- .....etc

En principio se solicitó que con la información dada el alumno encuentre las ecuaciones particulares de las curvas que intervienen y trazar el gráfico usando el software. Avanzando en el conocimiento adquirido por el alumno, se pide por ejemplo plantear y resolver un problema de optimización y calcular el volumen de un sólido de revolución con las siguientes consignas

- Se quiere utilizar un vidrio especial para construir una nueva pecera.

Si tengo  $11000 \text{ cm}^2$  de dicho material para hacer la pecera en forma de prisma con base cuadrada y parte superior abierta, calcular las dimensiones de la pecera para que su volumen sea el máximo posible.

- Supongamos que la pecera original está centrada en el origen de coordenadas y que es un sólido de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje  $x$  la región limitada por la recta que pasa por los puntos  $(0,10)$  y  $(7,10)$  y la elipse que pasa por los puntos  $(7,10)$  y  $(15,0)$ .

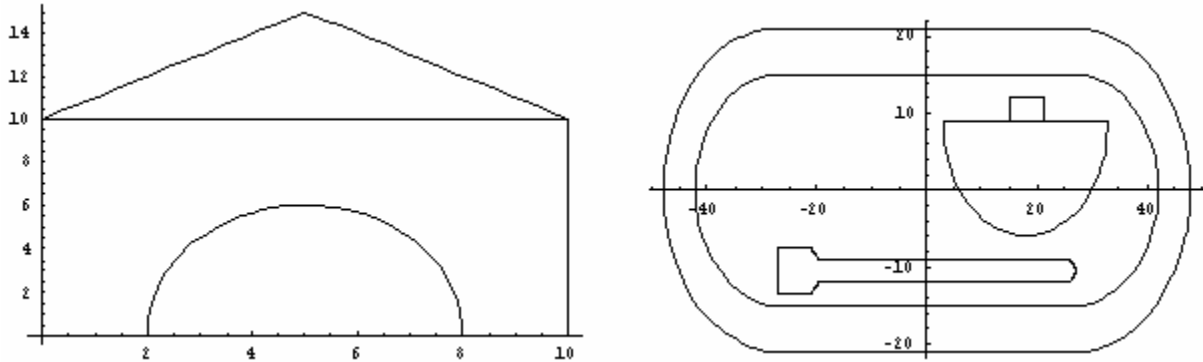
- Calcular el volumen de la pecera.

- Comparando los resultados obtenidos con la nueva pecera ¿es conveniente la nueva pecera? ¿Por qué?

Se pide en también en otros incisos cálculo de longitud de curva, cálculo de áreas planas correspondiente al dibujo del pez, etc.



El otro ejercicio, con una consigna más abierta, solicitaba trazar un gráfico cualquiera y determinar áreas parciales y totales. La gráfica de algunos de estos trabajos presentados se muestra a continuación.



En todos los casos se pedía realizar los cálculos con y sin programa.

#### Las consultas.

Las preguntas referidas al manejo del soft fueron atendidas a través del correo electrónico por el jefe del laboratorio. Las referidas a conceptos de matemática se contestaban durante la clase de trabajos prácticos.

Las consultas frecuentes dejaron en evidencia los problemas a los que se enfrentan nuestros estudiantes. Usualmente se referían al uso del software en sí, obviamente esperadas, dado que los jóvenes no tuvieron un entrenamiento previo en su uso. Sin embargo hubo muchas, y fue la mayoría, referidas a falencias conceptuales puestas de manifiesto por el uso del software. Así, frecuentemente se necesitaba graficar la recta  $x = k$ . En general los estudiantes intentaban utilizar el comando Plot, el que no permite trazarla ya que es un comando para gráfica de relaciones funciones  $y = f(x)$ . Ante la ayuda brindada por el tutor “graficála usando el comando ParametricPlot” grande fue la sorpresa cuando notamos que los estudiantes no conseguían determinar una forma paramétrica para la recta  $x = k$ .

#### Algunos resultados:

Una vez resuelto el ejercicio de ambas formas, manual y utilizando el soft, los alumnos debían entregar el trabajo completo en cuyo último inciso, se pedía de manera obligatorio la entrega de sus conclusiones en las cuales podían expresar las fortalezas y debilidades de la actividad. Para ello, las conclusiones debían contener las consignas:

- De que manera le resultó más sencilla la actividad.
- De que manera le resultó mas comprensible la actividad.
- La realización de esta actividad mejoró la comprensión de los contenidos
- Cualquier otro comentario que le hubiera facilitado la actividad.



Se evaluaron las respuestas, que fueron dispares, por tratarse de un comentario. De las respuestas concluimos que los jóvenes que participaron en esta experiencia la han criticado y valorizado desde distintas aristas.

Muchos valorizaron el soft como instrumento para resolver problemas. Así Hugo y Matias opinaron *“Después de haber realizado este trabajo podemos concluir en que es de mucha ayuda tener herramientas para resolver los problemas. Es claro que la resolución nos resulto mucho mas sencilla trabajando con el software y nos hubiera ahorrado mucho tiempo. Gracias a esta herramienta pudimos constatar los resultados hechos a mano. Pero sin embargo al ser la primera vez que trabajamos con este software nos encontramos con dificultades de comprensión y manejo del software en si, que fueron resueltas gracias al manual provisto por la cátedra y a diferentes consultas. En nuestra opinión, el software es un poco difícil de manejar la primera vez y se hace un poco engorroso trabajar siempre con comandos. Pero se aprende rápidamente y sirve para ahorrar mucho tiempo. Esta actividad nos sirvió mucho, tanto para aplicar los conocimientos como para aprender a usar un nuevo software que nos servirá de herramienta para la cátedra y para el futuro”*.

Algo similar opinaron Pablo y Roberto, estudiantes de ingeniería en sistemas de información: *“La utilización del software nos hizo más sencilla la resolución del ejercicio, además de tener una mayor prolijidad. Nos ayudo a comprender los temas desarrollados en clase, como por ejemplo la obtención de áreas por medio de integrales definidas. Sabiendo como se utiliza el programa, hemos obtenido una importante y muy útil herramienta, que nos permitirá seguir desarrollando nuestros conocimientos en matemática. De todos modos, también fue importante resolver en primera instancia el ejercicio en papel, para comenzar a plantear cual era la superficie que íbamos a graficar, y para realizar los cálculos necesarios para obtener los resultados requeridos.*

Algunos estudiantes opinaron que el uso del soft no agregó nada a su comprensión pero si a afianzar los aprendizajes. Muchos dejan entrever que no descartan la posibilidad que, bajo otras condiciones, lo mejoren. Así Luis, Pablo, Javier y Lucas dijeron *“Concluido el trabajo práctico y luego de haber experimentado la resolución de las operaciones que implicaba a nuestro criterio, estamos en condiciones de afirmar que la resolución del trabajo en general nos pareció más sencilla por la forma “manual”, pero esto es así solamente por el hecho de que como el programa era desconocido para nosotros lleva un tiempo acostumbrarse a los signos a utilizar, y, tener en cuenta detalles como mayúsculas y formas de presentar las órdenes para que el software las pueda interpretar. Por otro lado, considerando las prestaciones del programa es evidente que si se aprende a utilizar bien puede ser una herramienta muy poderosa además de sumamente práctica para la resolución de integrales que por la forma manual tenemos que tener mucha agilidad y experiencia en el tema que es posible que un profesional que no esté vinculado con el desarrollo y análisis de estas operaciones en particular no posea. En cuanto a la comprensión del concepto en sí de la integral y del cálculo de áreas como una aplicación importantísima de la misma creemos que de las dos formas uno logra conocer mejor el tema; es la resolución en sí que nos permite esto, o sea, el cálculo de los rangos, la determinación de las funciones, la lectura de los resultados y por supuesto los mismos errores cometidos tanto manual como con Mathematica. Para finalizar bastaría aclarar que consideramos la actividad realizada una muy buena manera de afirmar los conocimientos teóricos y prácticos sobre el tema y de poder ver la forma de aplicarlos, aparte de tener un*





conocimiento, por más escaso que sea, sobre un software como Mathematica que evidentemente tiene un potencial interesantísimo y es muy probable que volvamos a utilizarlo en el futuro.

También hubo estudiantes que concluyeron sobre que el software puso en evidencia dificultades de comprensión. Así Nicolás y Esteban dijeron “Para esta parte del problema no tuvimos la capacidad de comprender el programa para aplicarlo en esta situación”, refiriéndose a que no logran determinar las ecuaciones paramétricas de una recta y de una elipse. Es más, critican al material dado opinando “Plantear las ecuaciones en el programa es la dificultad que se nos presentó, debido a que el apunte dado no nos resolvió muchas dudas... En nuestro caso particular hubiésemos preferido hacer un curso introductorio antes de realizar el trabajo, debido a que sabiendo como usar el programa este sirve de mucha utilidad, es una herramienta muy buena”

En cuanto al replanteo de nuestras prácticas que a inicio del artículo comentamos han surgido varias como prioritarias. La primera referida a que para años siguientes es necesario realizar una o dos clases de laboratorio a inicio del cursado de la asignatura con lo básico del soft y otra cuando se hayan desarrollados los conceptos del cálculo para que los estudiantes se familiaricen con el uso del mismo.

La segunda al rediseño de esta actividad para que conste de varias entregas en distintos momentos del curso, incorporando en cada una los nuevos conceptos. Esto permitirá evaluar y andamiar los aprendizajes. En esta experiencia el trabajo constó de una única entrega por razones de necesidad debido a un cursado anormal plagado de inactividad debida a paros y causas extraordinarias.

La tercera es que es necesario aclarar los premios y los castigos explícitamente para la actividad a inicio del cursado. Si bien fueron varios los comentarios al respecto podemos resumirlo en el más crítico de ellos, aportado por el estudiante de ingeniería industrial, Sebastián: “quiero expresar que no me pareció correcto que incluyeran la realización de este trabajo en un mes de exámenes, y mucho menos que nos pongan las condiciones de que si no se entregaba, se perdía la promoción y la regularidad. Y menos que nos digan que “si el trabajo se entrega en tiempo y forma... “talvez”... sumaba en la nota final. Aunque se encarga de aclarar que no es el trabajo el que critica “Por otro lado, la realización de este trabajo fue una muy buena experiencia, ya que me permitió conocer este software que me servirá en las materias y problemas a resolver en el futuro”.

Como docentes consideramos que la experiencia fue buena y dio buenos resultados, con el compromiso de los alumnos hacia el trabajo y con críticas de parte de ellos que en general resultaron favorecedoras y nos alentaron a seguir mejorando la experiencia para el futuro.

### Referencias bibliográficas

Blythe, T. y cols. (1999). *La enseñanza para la comprensión. Guía para el docente*. Buenos Aires: Editorial Paidós.

Johnson, D. W. , Johnson, R.T. y Holubec , E.J. (1999): *El aprendizaje cooperativo en el aula*. (1º edic). Buenos Aires: Ediciones Paidós.

Stone Wiske, M. (comp.). (1999). *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*. Buenos Aires: Ediciones Paidós.