UN ENFOQUE PARA LA ENSEÑANZA DE LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN EL PRIMER CICLO UNIVERSITARIO

Lucuy Suarez Fred Alberto, Dodera María Graciela, Ponce LauraVirginia

Ciclo Básico Común – Universidad de Buenos Aires - Argentina

gdodera@cbc.uba.ar ; alucuy@gmail.com

Nivel universitario

Palabras clave: *Sistemas de ecuaciones lineales – visualización – compatibilidad parcial – inversa generalizada*

Resumen

El presente estudio consiste en una propuesta didáctica orientada a la enseñanza de Algebra en los primeros cursos universitarios. La misma se apoya en una concepción de aprendizaje constructivo y significativo y consiste en el tratamiento y resolución de los sistemas de ecuaciones lineales a partir una adecuada visualización gráfica. Pretende contribuir a una mayor comprensión del tema sistemas de ecuaciones lineales y, en particular, al fortalecimiento del concepto 'solución'.

En el trabajo se explicitan las condiciones para la clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales en sistemas compatibles (determinados e indeterminados) e incompatibles haciendo hincapié en las implicancias gráficas de las mismas. El estudio se focaliza en el análisis de sistemas incompatibles. Se introduce el concepto de *compatibilidad parcial* a un sistema incompatible de ecuaciones lineales y se detallan los métodos para alcanzar la solución más cercana a la esperada u óptima mediante el uso de la matriz inversa generalizada, la proyección ortogonal y el método de cuadrados mínimos. Se presenta además un ejemplo de aplicación.

Introducción

La resolución de problemas no sólo implica la aplicación de pasos estructurados y reglas sino la utilización de la capacidad de análisis, síntesis, correlación y la observación-intuición.

Se debe considerar la visualización como apoyo al álgebra lineal, no sólo para volcar sus resultados de manera gráfica, sino para afianzar conceptos y métodos matemáticos.

Hillel (1997), en un trabajo sobre nivel de descripción y nivel de representación en Algebra Lineal realizado con alumnos universitarios, marca que las dificultades en el aprendizaje se centran en el contenido del tema teórico en sí mismo y en las características del álgebra lineal. Señala además, la dificultad que tienen los alumnos en el manejo del lenguaje de la teoría general (espacios vectoriales, subespacios, dimensión, operadores), del lenguaje de la teoría específica en R^n (n-uplas, matices, determinantes, soluciones de sistemas de ecuaciones) y del lenguaje geométrico en dos o tres dimensiones (vectores, rectas, planos, hiperplanos, proyecciones).

Según Alsina Catalá, Fortuny y Burgués (1987), el referente geométrico en dos y tres dimensiones contribuye a la formación del pensamiento visual. Por su parte, De Guzmán (2002) afirma que existe una correspondencia entre la representación visual y los significados matemáticos (representación isomórfica).
Se observa que en la currícula de las escuelas de nivel secundario y de los primeros cursos universitarios se prescinde en general del empleo de la geometría para interpretar las diferentes soluciones de los sistemas de ecuaciones, impidiendo una visualización adecuada del conjunto solución en el plano y en el espacio.
Algunos autores, entre ellos Mallet (2007), proponen métodos de enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales a partir del uso de programas tales como Maple que permiten graficar las ecuaciones de manera de facilitar la visualización del sistema propuesto y su correspondiente conjunto solución.
El presente trabajo consiste en una propuesta didáctica que introduce una estrategia para el tratamiento y resolución de los sistemas de ecuaciones lineales a partir de una adecuada visualización gráfica. La misma está orientada a alumnos de los primeros cursos universitarios de Algebra y se apoya en una concepción de aprendizaje constructivo y significativo.
El estudio se focaliza en el análisis de los sistemas de ecuaciones lineales incompatibles, cuyo tratamiento resulta de mucha utilidad en áreas de optimización y programación dinámica.
Se presentan, en primer término, los criterios para la clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales en compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible, con su correspondiente interpretación gráfica.
Se analiza en particular el caso incompatible. Se incorpora la noción de compatibilidad parcial, inversa generalizada y proyección ortogonal para poder emplear una adecuada visualización geométrica que permita encontrar soluciones aproximadas. Dichas soluciones presentan error y éste debe ser el menor posible, lo cual se consigue aplicando el método de cuadrados mínimos –o equivalentemente, la proyección ortogonal– siendo el mejor ajuste aquel que se adecue al contenido que la solución exige.
Por último, se da un ejemplo de aplicación de un sistema lineal incompatible en el cual se presentan dos formas alternativas de resolución para encontrar una solución aproximada y se evalúa el error que se comete.

Clasificación de los sistemas lineales - Compatibilidad parcial

Las diferentes técnicas empleadas para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales permiten encontrar por lo general tres tipos de soluciones, respecto de las cuales dichos sistemas se clasifican como compatibles determinados, compatibles indeterminados e incompatibles.
Al desarrollar tales técnicas, suele ocurrir que en la mayoría de los casos no se exige una interpretación geométrica más amplia y adecuada del problema a resolver, y por tal motivo, se pierde información lo suficientemente relevante, que impide compatibilizar las ecuaciones en forma parcial o total, para lograr una solución determinística.
Al escribir un sistema de ecuaciones en su forma matricial (Grossman, 2008), se obtiene una ecuación del tipo:

$$Ax = b \quad , \; A \in R^{m\times n} \; , \; x \in R^{n\times 1}, \; b \in R^{m\times 1} \qquad (1)$$

El sistema tendrá solución siempre que el vector b pertenezca al subespacio $col(A)$ generado por vectores columna $\{W_1, W_2, \ldots\ldots, W_k\}$ linealmente independientes de la matriz original A, siendo $rg(A) = k$, $k \le n$.

Si x_0 es solución única de (1) el vector b puede expresarse como una combinación lineal de la forma $b = \sum_{j=1}^{k} x_{0j} W_j$, siendo $k = n$ y x_{0j} cada una de las componentes del vector x_0.

Si el sistema es compatible indeterminado, con infinitas soluciones del tipo $x_0 + \lambda\Phi$, la combinación lineal se reduce a $b = \sum_{j=1}^{k} \left[x_{0j} W_j + \lambda\left(\varphi_j W_j\right)\right]$, con $k < n$ y $\Phi = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j W_j = 0$. De esta forma la solución se puede expresar como una solución particular x_0 más la solución del homogéneo $\lambda\Phi$.

Si el sistema es incompatible, el vector b no podrá estar completamente generado por $col(A)$, y en cuyo caso el rango de su matriz ampliada A' será mayor que la dimensión del subespacio $col(A)$. A menos que dicho vector b se encuentre íntegramente generado por el subespacio ortogonal al $col(A)$, existirá una compatibilidad parcial debido a la proyección $\pi_{\bar{b},A}$ de dicho vector sobre el hiperplano generado por los vectores base de $col(A)$, como se muestra en el esquema de la Fig.1:

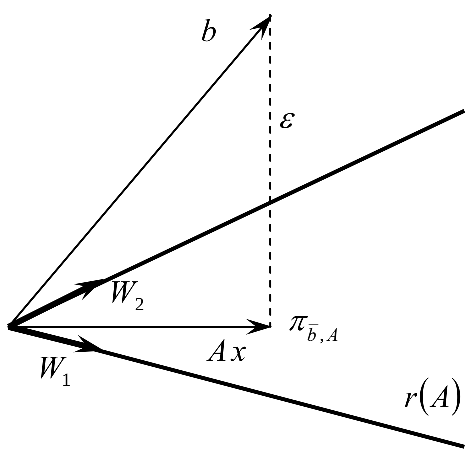

Fig. 1: Proyección del vector b sobre el subespacio generado por el $col(A)$, que compatibiliza en forma parcial el sistema $Ax = b$

Esta proyección permite definir el vector ε como

$$\varepsilon = b - Ax \;\Leftrightarrow\; Ax = b - \varepsilon \;\Leftrightarrow\; b = Ax + \varepsilon \qquad (2)$$

ε representa el vector diferencia o residuo cuya norma se quiere anular o en el peor de los casos minimizar.

Al extender la base de $col(A)$ a $\{W_1, W_2, ..., W_k, W_{k+1}, W_{k+2} ....W_m\}$ para generar todo el espacio, el vector b se expresa como:

$$b = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j W_j \; + \sum_{j=k+1}^{m} \alpha_j W_j \qquad (3)$$

donde la primera sumatoria es la combinación lineal de vectores que generan la proyección del vector b sobre $col(A)$ y la segunda sumatoria corresponde a la proyección del vector b sobre $Nul\,(A)$.

Comparando las expresiones (2) y (3), se deduce que el vector diferencia o residuo ε está generado por $Nul\,(A)$, de dimensión $m-k$.

Cabe destacar que si $m-k=0$ es $\varepsilon = 0$, el vector b está íntegramente generado por $col(A)$ y por ende el sistema planteado en (1) resulta compatible. En cambio, si $m-k>0$ $(\varepsilon \neq 0)$, el sistema (1) resulta incompatible, a menos que la proyección del vector b sobre $col(A)$ sea nula. En dicho caso es posible encontrar una solución aproximada que compatibilice parcialmente al sistema dado en (1). La compatibilidad parcial se optimiza proyectando el vector b sobre $col(A)$ en forma ortogonal pues esa proyección minimiza al vector diferencia o residuo ε definido en la expresión (2).

Interesa encontrar la proyección ortogonal del vector b sobre $col(A)$ para el caso en que ambos no sean ortogonales. Para ello se multiplica a izquierda la expresión central en (2) por la traspuesta de A obteniéndose:

$$A^t A x = A^t (b - \varepsilon) \qquad (4)$$

donde $A^t A$ resulta inversible (determinante no nulo) ya que el vector b no es ortogonal a $col(A)$, y $A^t \varepsilon = 0$ pues el producto $A^t \varepsilon$ es la proyección ortogonal del vector residuo ε sobre el subespacio generado por $col(A)$.

Multiplicando a izquierda en (4) por la inversa de $A^t A$, se llega a la siguiente expresión para la solución x más cercana a la esperada u óptima del sistema planteado en (1):

$$x = \left(A^t A\right)^{-1} A^t \; b \qquad (5)$$

La matriz $\left(A^t A\right)^{-1} A^t$, que puede no ser única, se conoce como inversa generalizada de A o inversa de Moore-Penrose o pseudoinversa (Rao y Mitra, 1971; Searle, 1982).

Cabe destacar que la solución óptima también se puede alcanzar en base al análisis estadístico, minimizando la suma de los cuadrados de los errores *SSE.*

En efecto, a partir de la expresión (2), la suma de los cuadrados de las componentes del vector residuo (*SSE*) resulta:

$$\left(b - A\,x\right)^t \left(b - A\,x\right) = \varepsilon^t\,\varepsilon = \sum \varepsilon_i^2 = SSE \qquad (6)$$

Luego de distribuir y agrupar convenientemente se obtiene:

$$x^t A^t A\;x - b^t A\;x - x^t A^t b + b^t b = SSE \qquad (7)$$

Al desarrollar los productos matriciales en (7), se obtiene una expresión escalar que puede derivarse respecto de las componentes x_i del vector solución x. Teniendo en cuenta que la matriz $A^t A$ es siempre simétrica y que $\left(b^t A\,x\right)^t = x^t A^t b$, derivando la expresión (7) respecto de cada componente x_i e igualando a cero, se obtiene lo siguiente :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(SSE\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2A^t A\;x - 2A^t b = 0 \quad \Rightarrow \quad A^t A x = A^t \left(b - \varepsilon\right) \qquad (8)$$

Dado que $A^t A$ resulta inversible, despejando de (8) se obtiene la expresión (5). Esta solución es la que optimiza el vector solución x debido a que da un valor estacionario de $\varepsilon^t \varepsilon$ que corresponde al mínimo de la norma del vector residuo ε .

Ejemplo de aplicación

En este apartado se analiza un sistema de ecuaciones lineales incompatible.
En primer término se halla la solución más cercana a la esperada u óptima utilizando la proyección ortogonal $\pi_{b,A}$ del vector b sobre $col(A)$, con el objetivo de minimizar la norma del vector ε, y luego se la obtiene empleando el método de la inversa generalizada.

Dado el siguiente sistema lineal (Grossman, 2008) se procede a trabajar sobre él para clasificarlo y hallar el conjunto solución:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad (9)$$

Una vez triangulado el sistema se clasifica como incompatible de acuerdo con la matriz ampliada equivalente obtenida:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{array}\right)$$

El vector $b=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ no se puede escribir como combinación lineal de los vectores $W_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ y $W_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, vectores linealmente independientes que generan $col(A)$.

Se extiende la base a R^3 de forma tal que el nuevo vector W_3 sea ortogonal a $col(A)$, con la finalidad de optimizar la solución.

Planteando la condición de ortogonalidad $W_3.\left[\alpha W_1^t+\beta W_2^t\right]=0$ y considerando que dicha condición se debe verificar $\forall\ \alpha,\beta$ no simultáneamente nulos, se obtiene $W_3^t=\delta\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1\right)$.

Se elige, sin perder generalidad, $W_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ para completar la base de R^3.

Escribiendo b como combinación lineal de los vectores $W_1, W_2\ y\ W_3$, la expresión (3) se reduce a

$$b=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{8}{11}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\left(-\frac{3}{11}\right)\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+\left(-\frac{2}{11}\right)\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/11\\13/11\\5/11\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2/11\\-2/11\\6/11\end{pmatrix}$$

Como resultado de la proyección ortogonal, y de acuerdo a la Fig.1, b se puede escribir como suma de los vectores proyección $\pi_{b,A}=\begin{pmatrix}2/11\\13/11\\5/11\end{pmatrix}$ y residuo $\varepsilon=\begin{pmatrix}-2/11\\-2/11\\6/11\end{pmatrix}$.

En consecuencia, el sistema incompatible $Ax=b$ se puede expresar como

$$Ax=\pi_{b,A}+\varepsilon \tag{10}$$

Debido a que $\pi_{b,A}$ es combinación lineal de los vectores $W_1\ y\ W_2$, que generan $col(A)$, el sistema

$$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/11\\13/11\\5/11\end{pmatrix}$$

resulta compatible.

Al triangular la matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 2 & | \; 2/11 \\ 2 & 1 & | \; 13/11 \\ 1 & 1 & | \; 5/11 \end{pmatrix}$ se obtiene $\begin{pmatrix} 1 & 0 & | \; 8/11 \\ 0 & 1 & | -3/11 \\ 0 & 0 & | \quad 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8/11 \\ x_2 = -3/11 \end{cases}$, siendo el vector $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/11 \\ -3/11 \end{pmatrix}$ es la solución del sistema $Ax = \pi_{b,A}$.

Dicha solución, por ser la que deriva de la proyección ortogonal de b sobre $col(A)$, determina la compatibilidad parcial óptima del sistema incompatible en cuestión. La solución más aproximada u óptima del sistema dado es pues $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/11 \\ -3/11 \end{pmatrix}$, y el vector residuo resulta $\varepsilon = \begin{pmatrix} -2/11 \\ -2/11 \\ 6/11 \end{pmatrix}$.

Es posible llegar en forma más directa al mismo resultado utilizando el método matricial referido a la inversa generalizada de la expresión (5). Reemplazando las matrices adecuadas en (4) se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad => \quad \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Al multiplicar a izquierda esta última expresión por la matriz inversa, resulta

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/11 & -5/11 \\ -5/11 & 6/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

es decir $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/11 & 7/11 & 1/11 \\ 7/11 & -4/11 & 1/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/11 \\ -3/11 \end{pmatrix}$,

donde $\begin{pmatrix} -4/11 & 7/11 & 1/11 \\ 7/11 & -4/11 & 1/11 \end{pmatrix} = \left(A^t A\right)^{-1} A^t$ es la inversa generalizada de la matriz A.

Por su parte, el vector residuo se puede obtener de acuerdo a la expresión (2) mediante:

$$\varepsilon = b - Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8/11 \\ -3/11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/11 \\ 13/11 \\ 5/11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/11 \\ -2/11 \\ 6/11 \end{pmatrix}$$

Conclusiones y perspectivas

En el área de Ciencias Económicas e Ingeniería, entre otras, se presentan datos experimentales y es altamente probable que al plasmar un problema o diseño en lenguaje algebraico y proceder a su resolución resulte un sistema incompatible. Aunque dichos sistemas no admitan una solución determinística, resulta de mucha utilidad encontrar al menos aquella solución más cercana a la esperada u óptima.

A tal fin, en el presente trabajo se trabaja con la noción de compatibilidad parcial e inversa generalizada para poder emplear una adecuada visualización geométrica que permita encontrar soluciones aproximadas. Dichas soluciones presentan error y éste debe ser el menor posible, lo cual se consigue aplicando el método de cuadrados mínimos –o equivalentemente, la proyección ortogonal– siendo el mejor ajuste aquel que se adecue al contenido que la solución exige.

Si bien, esta propuesta didáctica carece de resultados experimentales que permitan avalar la inclusión de esta metodología (será el objetivo de futuros trabajos), la misma intenta proporcionar un enfoque alternativo que contribuya a una mejor comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales y, en particular, al fortalecimiento del concepto ‘solución’.

Bibliografía

Alsina Catalá C. y Fortuny J. y Burgués C. (1987). *Invitación a la didáctica de la geometría*. (Ed), Madrid: Síntesis.

De Guzmán M. (2002). *La experiencia de descubrir en geometría*.(Ed), Madrid: Nivola.

Hillel J. (1997). Des niveaux de description et du problème de la represéntation en algèbre linéaire. In J,L. Dorier (ed.) *L’Enseignement de l’Algèbre Linéaire en Question*, *Panorama de Recherche en Didactique sur ce Thème* , pp.231-247. (Ed). Grenoble, France: La pensée sauvage

Mallet D.G. (2007). Multiple representations for systems of linear equations via the Computer Algebra System Maple. Vol.2 No.1, pp.17-31. *International Electronic Journal of Mathematics Education.*

Rao C.R. y Mitra S.K. (1971), *Generalized inverse of matrices and its applications.* (Ed), New York-London-Sydney: John Wiley & Sons.

Searle S.R. (1982). *Matrix algebra useful for statistics, Wiley Series in Probability and Statistics*. (Ed). New York, USA.:John Wiley & Sons.

Grossman S.I., (2008), *Algebra Lineal*. (ED). Mc Graw Hill.