SOFTWARE EDUCATIVO CON DERIVE 6 PARA LA APLICACIÓN DE SPLINE

Autores: Modarelli, María Cristina; Nolasco, María Rosa; Asteasuain, Antonio Francisco
Institución: Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Argentina. Avda. del Valle 5737. B7400JWI Olavarría. Buenos Aires.
Dirección electrónica: cmodarel@fio.unicen.edu.ar - rnolasco@fio.unicen.edu.ar
Nivel Educativo: universitario
Palabras clave: software educativo, interpolación spline

Resumen

En la actualidad las tendencias en la enseñanza están orientadas al fortalecimiento de competencias, conocimientos y valores necesarios para aprender a aprender.
El constante desarrollo tecnológico lleva al rediseño de las tareas intelectuales desarrolladas en el aula, generando un nuevo estilo de pensamiento signado por la respuesta rápida, el ensayo y error como estrategia cognitiva, el accionar individual y la carrera de obstáculos como estrategias de resolución de problemas.
La utilización de la herramienta informática es un valioso recurso que permite a los alumnos ser participes en la obtención de sus propios conocimientos, al tener posibilidades de poder experimentar e interactuar con la misma.
Con la utilización de diferentes archivos, diseñados en Derive 6, los alumnos de Cálculo Numérico pueden comprender los aspectos conceptuales complejos de los contenidos de la asignatura, favorecidos por la visualización del comportamiento gráfico, realizando así las actividades prácticas en una forma mucho más dinámica.
El propósito de este trabajo es mostrar la utilidad de programas desarrollados con el software Derive 6, con el fin de utilizarlo como un recurso didáctico en la solución de problemas donde se requiere de la técnica spline, cuadrática o cúbica, para llegar a la solución.

Introducción

En la actualidad las tendencias en la enseñanza están orientadas al fortalecimiento de competencias, conocimientos y valores necesarios para aprender a aprender.
El constante desarrollo tecnológico lleva al rediseño de las tareas intelectuales desarrolladas en el aula, generando un nuevo estilo de pensamiento signado por la respuesta rápida, el ensayo y error como estrategia cognitiva, el accionar individual y la carrera de obstáculos como estrategias de resolución de problemas.
Los Métodos Numéricos son técnicas mediante las cuales es posible resolver problemas usando operaciones aritméticas. La solución de los problemas de la vida real no resulta muy efectiva al aplicar fórmulas matemáticas que solucionan situaciones en mundos ideales, se necesita de la aplicación de procedimientos muy complejos para modelar fenómenos reales que, al intentar resolverlos, llevan a cabo un buen número de tediosos cálculos, situación que hoy en día no es un obstáculo ya que la computación es una herramienta que nos facilita su resolución.
Teniendo en cuenta el marco explicativo del constructivismo pedagógico, en la asignatura Cálculo Numérico perteneciente a tercer año de la currícula de las carreras de Ingeniería que se dictan en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, se utilizó un software educativo con el fin de mejorar la comprensión de los contenidos de la asignatura favorecidos por la visualización gráfica, y la interpretación de las expresiones algebraicas, realizando así las actividades prácticas en una forma mucho más dinámica.

La utilización de diferentes archivos diseñados en Derive 6 permite a los alumnos visualizar el comportamiento gráfico de los distintos métodos numéricos y obtener la solución aproximada con los mismos. De esta manera el estudio del cálculo numérico se vuelve más productivo ya que los estudiantes pueden explorar los conceptos y experimentar con las ideas aprendidas.
El propósito de este trabajo es mostrar la utilidad de programas desarrollados con el software Derive 6, con el fin de utilizarlo como un recurso didáctico en la solución de problemas donde se requiere de la técnica spline, en sus formas cuadrática o cúbica, para llegar a la solución.

Desarrollo

Los métodos numéricos son herramientas poderosas que permiten la resolución de problemas, muchas veces imposible de hacerlos en forma analítica. La aplicación de los métodos numéricos es muy diversa y variada.
Con frecuencia, en la vida profesional de nuestros alumnos, se presentan problemas en los que es necesario aproximar una curva a un conjunto de datos discretos. Esto se realiza a través de funciones analíticas sencillas y permite una mejor manipulación de esa información. Para ello se cuenta con los métodos de interpolación y los de ajuste de datos.
En interpolación, contamos con los de Newton de diferencias divididas y de Lagrange, usando polinomios de n–ésimo grado para interpolar "n+1" datos y las alternativas técnicas de spline.
Los polinomios obtenidos con los métodos de Newton o de Lagrange pueden presentar el inconveniente de su alto grado, debido a la cantidad de datos. Esto origina excesiva variabilidad en las respuestas, que resultan inaplicables.
Un procedimiento alternativo es obtener polinomios de orden inferior para subconjuntos de datos. Se las llama funciones segmentarias (spline), siendo las más usadas la cuadrática y la cúbica.
Tales curvas, polinomios de segundo o tercer grado, son muy usadas debido a la confiabilidad de resultados, simplicidad de utilización en el diseño gráfico y en la solución numérica de ecuaciones diferenciales.
Un programa que emplea spline permite interpolar datos en cálculos científico-técnicos, resolviendo problemas y mostrando gráficamente la coherencia de los resultados.
La aplicación que mostramos a continuación es un ejemplo de las que se pueden presentar en la vida profesional de un ingeniero. La solución de la misma se realiza por distintos métodos de interpolación lo que le permite al alumno ser crítico a la hora de seleccionar el más adecuado.
La intención es generar un debate en el grupo de estudiantes haciendo que exploren, comprueben, investiguen y elaboren conjeturas, en definitiva, que experimenten y tomen decisiones.

Aplicación

Represente gráficamente la variación de la viscosidad del agua con la temperatura para los datos presentados en la tabla siguiente. Teniendo en cuenta que la temperatura está medida en grados Fahrenheit y la viscosidad en centipoise. (1 centipoise = 0.01 poise; 1 poise = 1 g/cm seg)

T (°F)	32	80	150	250	400
Viscosidad (centipoise)	1,787402	0,860932	0,431955	0,23832	0,138524

Realice la interpolación de esos datos con el fin de estimar la viscosidad del agua para una temperatura de 100 °F y de 350 ºF.

Resolución

Interpolación cúbica segmentaria

El objetivo de la interpolación cúbica segmentaria es obtener un polinomio de tercer grado de la forma: $P_i(x) = a_i\,x^3 + b_i\,x^2 + c_i\,x + d_i$ para cada subintervalo de los obtenidos al dividir el intervalo original. Para n intervalos i = 0, 1, 2, ...n, , son 4n los coeficientes a obtener. (Chapra, Canale, 2006)

Para interpolar utilizando este método, se elaboró un archivo con Derive 6. El desarrollo informático consistió en la construcción de distintas funciones.

Una de ellas nos proporciona el sistema de ecuaciones para obtener los coeficientes de los polinomios de cada subintervalo.

Otra resuelve el sistema y con esta solución y otra sentencia, obtenemos los polinomios para cada uno de los intervalos.

Comenzamos por resolver la aplicación con el programa que denominamos **Interp. cúbica segm**

Para iniciar el trabajo debemos ingresar la matriz de datos, en nuestro caso una matriz de dos columnas y cinco filas.

$$m := \begin{bmatrix} 32 & 1.787402 \\ 80 & 0.860932 \\ 150 & 0.431955 \\ 250 & 0.23832 \\ 400 & 0.138524 \end{bmatrix}$$

A continuación, simplificando la sentencia `k := DIMENSION(m) - 1`, nos da como resultado la cantidad de subintervalos, y en consecuencia cantidad de polinomios cúbicos que debemos calcular. En nuestro ejemplo k = 4.

Para obtener los polinomios debemos conocer los coeficientes de cada uno de ellos por lo tanto tenemos 16 incógnitas; al simplificar la sentencia [sist_ecuac:=] el programa nos suministra un sistema de 16 ecuaciones con 16 incógnitas, que para nuestro problema es el siguiente.

$$\begin{aligned} \text{sist\_ecuac} := \Big[& 3.2768\cdot10^{4}\cdot a\_1 + 1024\cdot b\_1 + 32\cdot c\_1 + d\_1 = 1.787402,\ 5.12\cdot10^{5}\cdot a\_2 + 6400\cdot b\_2 + 80\cdot c\_2 + d\_2 = \\ & 0.860932,\ 3.375\cdot10^{6}\cdot a\_3 + 2.25\cdot10^{4}\cdot b\_3 + 150\cdot c\_3 + d\_3 = 0.431955,\ 1.5625\cdot10^{7}\cdot a\_4 + 6.25\cdot10^{4}\cdot b\_4 + 250\cdot c\_4 + d\_4 = \\ & 0.23832,\ 5.12\cdot10^{5}\cdot a\_1 + 6400\cdot b\_1 + 80\cdot c\_1 + d\_1 = 0.860932,\ 3.375\cdot10^{6}\cdot a\_2 + 2.25\cdot10^{4}\cdot b\_2 + 150\cdot c\_2 + d\_2 = \\ & 0.431955,\ 1.5625\cdot10^{7}\cdot a\_3 + 6.25\cdot10^{4}\cdot b\_3 + 250\cdot c\_3 + d\_3 = 0.23832,\ 6.4\cdot10^{7}\cdot a\_4 + 1.6\cdot10^{5}\cdot b\_4 + 400\cdot c\_4 + d\_4 = \\ & 0.138524,\ 1.92\cdot10^{4}\cdot a\_1 + 160\cdot b\_1 + c\_1 = 1.92\cdot10^{4}\cdot a\_2 + 160\cdot b\_2 + c\_2,\ 6.75\cdot10^{4}\cdot a\_2 + 300\cdot b\_2 + c\_2 = 6.75\cdot10^{4}\cdot a\_3 \\ & + 300\cdot b\_3 + c\_3,\ 1.875\cdot10^{5}\cdot a\_3 + 500\cdot b\_3 + c\_3 = 1.875\cdot10^{5}\cdot a\_4 + 500\cdot b\_4 + c\_4,\ 480\cdot a\_1 + 2\cdot b\_1 = 480\cdot a\_2 + 2\cdot b\_2, \\ & 900\cdot a\_2 + 2\cdot b\_2 = 900\cdot a\_3 + 2\cdot b\_3,\ 1500\cdot a\_3 + 2\cdot b\_3 = 1500\cdot a\_4 + 2\cdot b\_4,\ 192\cdot a\_1 + 2\cdot b\_1 = 0,\ 2400\cdot a\_4 + 2\cdot b\_4 = 0 \Big] \end{aligned}$$

Solucionando este sistema obtenemos los 16 coeficientes:

$$\left[\left[1.162262537\cdot 10^{-6},\ -0.0001115772036,\ -0.01840884070,\ 2.452654940,\ -7.955299335\cdot 10^{-7},\ 0.0003582929894,\ -0.05599845614,\ 3.455044685,\ 2.420278925\cdot 10^{-8},\ -1.058673580\cdot 10^{-5},\ -0.0006664973602,\ 0.6884467459,\ -1.681190250\cdot 10^{-8},\ 2.017428300\cdot 10^{-5},\ -0.008356752063,\ 1.329301304\right]\right]$$

Por último simplificando la expresión que calcula un vector con los cuatro polinomios, obtenemos:

$$P(x) := \left[1.162262537\cdot 10^{-6}\cdot x^{3} - 0.0001115772035\cdot x^{2} - 0.01840884069\cdot x + 2.452654939,\ -7.955299335\cdot 10^{-7}\cdot x^{3} + 0.0003582929893\cdot x^{2} - 0.05599845614\cdot x + 3.455044685,\ 2.420278925\cdot 10^{-8}\cdot x^{3} - 1.058673579\cdot 10^{-5}\cdot x^{2} - 0.0006664973601\cdot x + 0.6884467459,\ -1.681190250\cdot 10^{-8}\cdot x^{3} + 2.017428300\cdot 10^{-5}\cdot x^{2} - 0.008356752062\cdot x + 1.329301304\right]$$

Como debemos estimar la viscosidad para 100 ºF, valor de la variable independiente que se encuentra en el segundo intervalo, utilizamos el segundo polinomio.

$$P(x) := -7.955299335\cdot 10^{-7}\cdot x^{3} + 0.0003582929893\cdot x^{2} - 0.05599845614\cdot x + 3.455044685$$

$$P(100) := -7.955299335\cdot 10^{-7}\cdot 100^{3} + 0.0003582929893\cdot 100^{2} - 0.05599845614\cdot 100 + 3.455044685$$

$$P(100) := 0.6425990305$$

Respuesta: la viscosidad del agua a 100ºF es de 0.642599 centipoise

Para estimar la viscosidad del agua cuando la temperatura es de 350 ºF, debemos utilizar el cuarto polinomio.

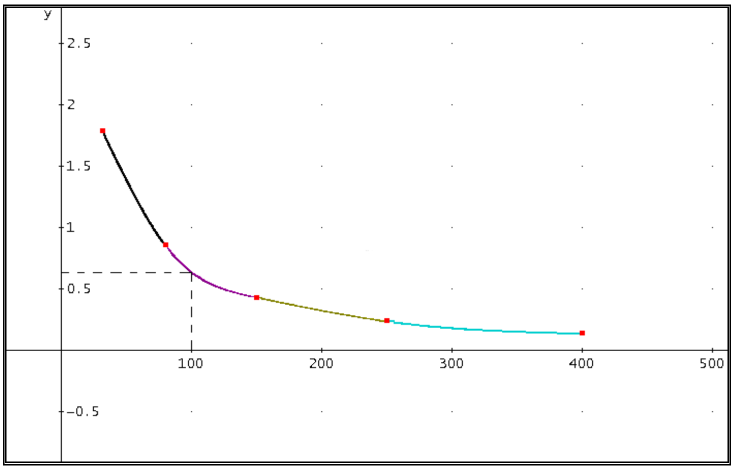
$$Q(x) := -1.68119025\cdot 10^{-8}\cdot x^{3} + 2.0174283\cdot 10^{-5}\cdot x^{2} - 0.008356752062\cdot x + 1.329301304$$

$$Q(350) := -1.68119025\cdot 10^{-8}\cdot 350^{3} + 2.0174283\cdot 10^{-5}\cdot 350^{2} - 0.008356752062\cdot 350 + 1.329301304$$

$$Q(350) := 0.1549774301$$

Respuesta: la viscosidad del agua a 350ºF es de 0.154977 centipoise

Podemos analizar en forma gráfica el resultado obtenido dibujando la nube de puntos y cada polinomio en el intervalo correspondiente.



Interpolación cuadrática segmentaria

El objetivo de este procedimiento es que en vez de usar un solo polinomio para interpolar entre todos los datos se obtiene un polinomio de segundo grado para cada subintervalo. El polinomio en cada subintervalo es $P_i(x) = a_i\,x^2 + b_i\,x + c_i$, con i = 0, 1, 2, 3, ...n.
Si son n subintervalos, resultan 3n constantes (coeficientes) a obtener. (Chapra, Canale, 2006).
Aplicando la técnica de spline cuadrática obtenemos para cada subintervalo los siguientes polinomios.

$$P(x) := \left[2.405048665 - 0.01930145832 \cdot x,\ 0.0001881887924 \cdot x^2 - 0.04941166512 \cdot x + 3.609456938,\ -8.981322618 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 + 0.03398894046 \cdot x - 2.645588482,\ 6.834910634 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 - 0.04509222578 \cdot x + 7.239557300\right]$$

Debemos estimar la viscosidad a 100 ºF, valor que se encuentra en el segundo subintervalo. Utilizamos en consecuencia, el segundo polinomio.

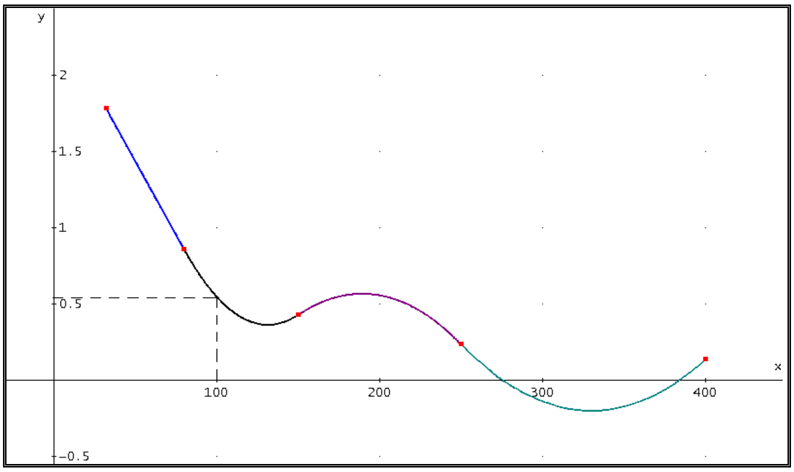
$$P(x) := 0.0001881887924 \cdot x^2 - 0.04941166512 \cdot x + 3.609456938$$

$$P(100) := 0.0001881887924 \cdot 100^2 - 0.04941166512 \cdot 100 + 3.609456938$$

$$P(100) := 0.5501783499$$

Respuesta: la viscosidad del agua a 100 ºF es de 0.550178 centipoise

Al analizar en forma gráfica la nube de puntos y cada polinomio en el intervalo correspondiente podemos observar que éste método no es adecuado para la resolución de este problema real.



Esta interpolación no es válida para estimar la viscosidad del agua cuando la temperatura es de 350 ºF, ya que debemos evaluar en el cuarto polinomio y su resultado es negativo.

$$Q(x) := 6.834910634 \cdot 10^{-5} \cdot x^{2} - 0.04509222578 \cdot x + 7.2395573$$

$$Q(350) := 6.834910634 \cdot 10^{-5} \cdot 350^{2} - 0.04509222578 \cdot 350 + 7.2395573$$

$$Q(350) := -0.1699561963$$

Polinomio Interpolador de Newton

Un polinomio de n–ésimo orden se puede escribir como:
$P_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$
Los datos de la tabla se usan para la evaluación de los coeficientes $b_0, b_1, \ldots b_n$. Se requieren "n+1" puntos para obtener un polinomio de n–ésimo orden. Los coeficientes se evalúan mediante las llamadas diferencias divididas finitas:
La forma de la n–ésima diferencia finita es:

$$f\left[x_n, x_{n-1}, \ldots\ldots\ldots, x_1, x_0\right] = \frac{f\left[x_n, x_{n-1}, \ldots\ldots\ldots, x_1\right] - f\left[x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots\ldots\ldots, x_0\right]}{x_n - x_0}$$

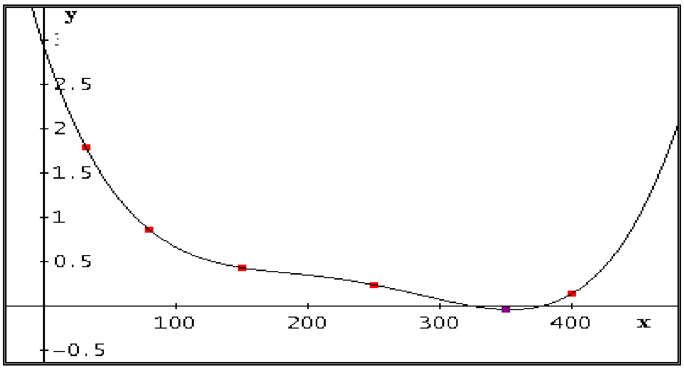
Aplicando el método de Newton a los cinco datos de la tabla obtenemos un polinomio interpolador de cuarto grado, que para 100 ºF arroja una viscosidad de 0,66362 centipoise.

$$P(x) := 4.395\cdot10^{-29}\cdot(2.0886\cdot10^{19}\cdot x^{4} - 1.9771\cdot10^{22}\cdot x^{3} + 6.6907\cdot10^{24}\cdot x^{2} - 1.0084\cdot10^{27}\cdot x + 6.6715\cdot10^{28})$$

$$P(100) := 4.395\cdot10^{-29}\cdot(2.0886\cdot10^{19}\cdot 100^{4} - 1.9771\cdot10^{22}\cdot 100^{3} + 6.6907\cdot10^{24}\cdot 100^{2} - 1.0084\cdot10^{27}\cdot 100 + 6.6715\cdot10^{28})$$

$$P(100) := 0.66362$$

Podemos analizar en forma gráfica el resultado obtenido dibujando la nube de puntos y el polinomio interpolador.



Esta interpolación no es válida para estimar la viscosidad del agua cuando la temperatura es de 350 ºF, ya que su resultado es negativo.

$$P(350) := 4.395\cdot10^{-29}\cdot(2.0886\cdot10^{19}\cdot 350^{4} - 1.9771\cdot10^{22}\cdot 350^{3} + 6.6907\cdot10^{24}\cdot 350^{2} - 1.0084\cdot10^{27}\cdot 350 + 6.6715\cdot10^{28})$$

$$P(350) := -0.038470$$

Enseñar no es solo explicar conceptos o brindar nuevos significados, es planificar y promover situaciones en las que el alumno organice experiencias, estructure ideas, analice procesos y exprese pensamientos. (Monereo, Castelló , Clariana, Palma, y Pérez,1995)
Con la utilización de la herramienta informática y la programación simple de los algoritmos que permiten aplicar rápidamente diferentes métodos y comparar las soluciones obtenidas, como así también visualizar el comportamiento de los distintos polinomios interpoladores, los alumnos tienen la responsabilidad de tomar decisiones a la hora de elegir el método que mejor modeliza la situación planteada en el problema real. Esta situación contribuye a desarrollar capacidades y competencias necesarias para su desempeño profesional.
Observar el caso de la viscosidad negativa. Si bien el cálculo es correcto, conceptualmente el valor es inaceptable. Este concepto lo adquiere en otras disciplinas específicas, y le permiten discernir sobre la inaceptabilidad del dato.

Reflexiones finales

Con la utilización de estos archivos que funcionan bajo Derive 6 procuramos desarrollar una de las facetas fundamentales de la enseñanza del cálculo numérico que es la experimentación, ya que opinamos que sólo mediante ella se puede comprender el funcionamiento de los métodos. La utilización de la computadora permite a los alumnos contar con más tiempo para el análisis y la interpretación de los resultados ya que con la misma los cálculos se resuelven rápidamente y les permite visualizar las distintas soluciones, comparando la eficiencia entre los métodos.

Bibliografía

- Chapra, S.y Canale, R. (2006). *Métodos Numéricos para Ingenieros*.(5º ed.) México. McGraw-Hill Interamericana. pp. 528-535.
- Monereo, C.; Castelló, M.; Clariana, M.; Palma, M. y Pérez, M. (1995). *Estrategias de Enseñanza y Aprendizaje. Formación del profesorado y aplicación en la Escuela*. Barcelona. España. Editorial GRAÓ de Series Pedagógicas.
- Nieves, A y Dominguez, F. (2002). *Métodos Numéricos. Aplicados a la Ingeniería*. (2º ed. México. Compañía Editorial Continental.
- Nolasco, M.R.; Modarelli, M.C. y Asteasuain, A. (2005). *Manual: Uso del Derive para Métodos Numéricos*. Biblioteca de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Olavarría.
- Nolasco, M.R.; Modarelli, M.C. y Asteasuain, A. (2008) *Derive 6 en Cálculo Numérico*. Biblioteca de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Olavarría.
- Welty, J., Wicks, C. y Wilson, R.(1984). Fundamentals of momentum, heat and mass transfer. John Wiley & Sons. Appendix Ip.772.