Simbolización de las Operaciones Aditivas

Yon Jairo Ochoa Rodríguez - Ingrid Elisa Riaño Jiménez

"[…] el problema de la simbología aritmética parece circunscribirse a una mera traducción de palabras de manera que el niño, cansado de escribir la palabra más ,entre dos números, dibuja en su sustitución el símbolo + que lo representa. Se pasa así del símbolo verbal, más sencillo de entender, al símbolo ideográfico que no tiene, en sí, ninguna relación con el primero."
(Maza, 1989)

Resumen.

El presente artículo corresponde a una revisión teórica sobre la construcción del lenguaje simbólico, en las operaciones aditivas de grado primero, para llegar a una reflexión sobre la práctica docente en el proceso pedagógico de la enseñanza de la adición. En su desarrollo, primero se desglosa el asidero teórico, donde se trata la construcción del lenguaje simbólico y la enseñanza de las operaciones aditivas. Posteriormente se alude a la metodología utilizada para la realización del artículo y finalmente se precisan algunas consideraciones finales.

Palabras Claves: Lenguaje Matemático, Lenguaje Pictórico,enguaje Simbólico, Adición, Educación Matemática.

Introducción

En el desarrollo de nuestra práctica educativa, en los primeros años de escolaridad, se ha evidenciado una dificultad referente al manejo del lenguaje matemático, su interpretación y la construcción misma del lenguaje simbólico propio de la disciplina. Por ello se hace necesaria una revisión teórica sobre la construcción del lenguaje simbólico, en las operaciones aditivas de grado primero, con el fin de realizar una reflexión sobre la práctica docente en el proceso pedagógico de la enseñanza de la adición.

El artículo señala algunos elementos sobre las representaciones simbólicas en el lenguaje matemático, el lenguaje simbólico como inherente a él y la actividad semiótica de los estudiantes en el proceso de interpretación de los símbolos matemáticos. Así mismo, trata sobre la enseñanza de las operaciones aditivas para describir el proceso de simbolización en la resolución de problemas aditivos. Para concluir se presentan algunas consideraciones finales.

¿Cómo se construye la simbolización en las Operaciones Aditivas?

Para dar respuesta a este interrogante, desde una perspectiva teórica, se abordarán algunas consideraciones sobre la construcción del lenguaje simbólico en matemáticas y cómo se llega a él en la enseñanza de las operaciones aditivas.

Hacia la construcción del lenguaje simbólico.

En el desempeño de la labor docente en el área de matemáticas, quienes la ejercemos, a menudo observamos que muchos de nuestros estudiantes presentan dificultades recurrentes en el manejo del lenguaje simbólico propio de la disciplina. De ello dan cuenta (Diestéfano, M. Urquijo, S. & González, S., 2010), quienes aseveran que los estudiantes deben adquirir, durante los primeros años de escolarización, el lenguaje simbólico utilizado en las operaciones aritméticas y posteriormente, con su ingreso a la educación media, deben recibir un entrenamiento en la traducción algebraica de problemas que conducen a la formulación de modelos matemáticos. Sin embargo, este proceso puede no estar llevándose correctamente, puesto que al ingresar al nivel universitario, los estudiantes aún presentan diversas dificultades con el manejo del lenguaje simbólico, entre ellas: expresar propiedades matemáticas en forma simbólica, generalizar, o suponer que el uso de letras está asociado exclusivamente a la representación de incógnitas.

Al hacer referencia del lenguaje simbólico, es necesario tener en cuenta algunas definiciones intrínsecas y elementales provenientes de la semiótica. Así pues, en (Diestéfano, M. Urquijo, S. & González, S., 2010), se considera que un signo es todo objeto o hecho físico que hace referencia a *otra cosa*. En los signos convencionales o *símbolos***,** la relación entre el significante y el significado es arbitraria, pues no hay ninguna relación natural o analógica que los ligue. Según **(**Gianella, 1996) el símbolo se caracteriza porque la materialidad observable de la imagen alude a un significado ideal, lo cual permite añadir al signo el componente de la abstracción.

El símbolo se convierte en una convención semiótica cuando un grupo ha decidido usarlo como vehículo de expresión. Para formar parte de tal grupo, es necesario conocer el significado y el uso de dicho símbolo. En el caso de la comunidad matemática, (Duval, 2006) menciona que el sistema simbólico propio de la disciplina, debe ser transmitido expresamente a los alumnos que pasan a formar parte de dicha comunidad, es decir, es necesario convertirlos en *intérpretes.* Respecto a los signos en la clase de matemáticas: “[…] los objetos matemáticos son abstractos y por consiguiente no manipulables como un objeto físico. Por lo tanto, no se puede acceder a ellos sin utilizar un sistema semiótico de representación” (D’Amore, 2005, p. 32).

Para Duval (2006), los sistemas semióticos tienen un rol clave en el trabajo con objetos matemáticos, que va más allá de la designación de los objetos o de la comunicación. Son esenciales en la actividad cognitiva del pensamiento, pues ningún tipo de actividad matemática puede ser ejecutada fuera de un contexto de representación. Martí (2003) plantea que los sistemas externos de representación permiten dejar un registro de nuestras acciones a lo largo de la vida; los define como artefactos culturales de gran relevancia que median la conducta humana; la notación numérica, el lenguaje verbal, el lenguaje pictórico, entre otros.

Según Hughes (1987), el niño organiza y codifica la información en cuatro posibles representaciones: idiosincrásicas, pictográficas, icónicas y simbólicas. Las *representaciones idiosincrásicas* no dan cuenta ni de la cantidad ni de la cualidad de los objetos, allí los chicos sólo cubren la hoja con "garabatos". Por su parte, en las *representaciones pictográficas* los niños dan cuenta de la cantidad exacta dibujando lo más fielmente posible cada uno de los objetos involucrados en la situación. Aún en los casos en los que no tienen la posibilidad de determinar el cardinal de la colección, pueden determinar la cantidad exacta, estableciendo una correspondencia biunívoca entre el término y su dibujo. En las *representaciones icónicas* el niño da cuenta de la cantidad exacta de objetos a través de marcas que no brindan información acerca de sus cualidades; dibuja tantos palitos como objetos hay. Para las *representaciones simbólicas* utilizan símbolos convencionales que representan cantidades.

En dichas representaciones, las traducciones entre el lenguaje coloquial o natural y el simbólico, en ambos sentidos, constituyen conversiones, que en la mayoría de los casos resultan no congruentes, lo que da lugar a dificultades en el proceso de enseñanza y que no siempre son consideradas por los docentes, tal como afirma Duval: "Y en el aula tenemos una práctica muy específica de uso simultáneo de dos registros. Se habla en lenguaje natural, mientras se escribe en expresiones simbólicas como si las explicaciones verbales pudieran hacer el tratamiento simbólico transparente". (2006, p. 114)

Lo expuesto soporta la idea de que el manejo adecuado de símbolos matemáticos depende del aprendizaje y del entrenamiento en su uso. Al respecto, es pertinente resaltar que autores como De Vega (1998) o Sternberg (1986) indican que la capacidad de razonamiento abstracto presenta asociaciones con el manejo de símbolos.

El acápite anterior justifica la imperiosa necesidad e importancia de enseñar a los alumnos el manejo de distintos registros semióticos utilizados en Matemática, y entrenar o ejercitar la habilidad de realizar transformaciones entre las distintas representaciones (pictóricas y simbólicas). En este sentido, las actividades de los alumnos deben pasar necesariamente y de manera ordenada por etapas de representación pictórica, icónica y representación simbólica.

Ahora bien, las representaciones de la adición, van desembocando en la posibilidad de formalizar, de expresar con notación aritmética los aumentos, disminuciones, recomposiciones y uniones de cantidades. Es decir, se va llegando a la simbolización aditiva, para ello, se tratará el siguiente apartado.

Sobre las operaciones aditivas.

Para el desarrollo de las estructuras aditivas, Pérez, et al. (2012) citan a Vergnaud y Durand (2002), quienes definen la estructura aditiva "[…] como la capacidad que se tiene para identificar, comprender y abordar las situaciones en las que tiene aplicabilidad las operaciones de suma y resta" (p, 54). Según Godino, citado en Pérez et al (2012) "La suma, es reunir, juntar, añadir, aumentar, incrementar, o una operación aritmética definida sobre conjuntos de números (naturales, enteros, racionales, reales y complejos)" (p.53).

Según Martínez y Gongorino (2004), citados en Pérez, et al. (2012) en la enseñanza de la adición, es necesario tener en cuenta, que los problemas deben ser planteados en situaciones reales representados con material concreto o representados a través de dibujos, además del planteamiento de problemas y ejercicios a través de representación oral. Sin embargo, los sustentos pedagógicos más usados en la enseñanza de la suma, según Godino (2006) son la noción de transposición didáctica de Chevallard (1992) y la tipología de situaciones didácticas: acción, formulación, validación, institucionalización de (Brousseau, 1993).

Alcalá (2002) citado en Chamoso, et al (2004), menciona que las prácticas en la enseñanza de la adición, se pueden clasificar en cuatro grupos: la tradición lógico-conjuntista, la tradición aritmetista, los enfoques eclécticos y la tradición de instrucción directa. En la tradición lógico-conjuntista, el itinerario es: primero, construcción operatoria del número (primeros números naturales) en la que se enfatiza la cardinalidad (nombre de un conjunto), descomposición y recomposición numérica sobre cantidades concretas, pequeñas uniones y sustracciones de cantidades, luego se procede a las operaciones aritméticas que son acciones interiorizadas a través de la abstracción.

Por su parte, la tradición aritmetista tiene como objetivo prioritario la enseñanza inicial del cálculo, por lo tanto se centra en el número y las operaciones, siendo la práctica del conteo y la ejercitación, la introducción temprana del código aritmético mediante simple adiestramiento.

Los enfoques eclécticos suelen recurrir a la lógica-conjuntista para dar explicaciones del número y las operaciones, sin embargo, no menosprecian el enfoque aritmetista del que se toma materiales, juegos y muchas actividades. Y la tradición de instrucción directa, afortunadamente en retroceso, se caracteriza por constreñir la enseñanza en sí y pasar a la instrucción directa de cálculos y al adiestramiento en la resolución de algoritmos y problemitas estándar.

Continuando con el análisis de la enseñanza de las operaciones aditivas, cabe mencionar a Carpenter y Moser (1982), citados en Bermejo (1998) quienes dicen que la enseñanza y el aprendizaje de la adición se facilitan teniendo en cuenta el grado de dificultad de los distintos tipos de problemas. Para ello clasificaron los problemas aditivos atendiendo a varias dimensiones: la primera basada en el carácter dinámico versus estático de la relación entre los conjuntos del problema, la segunda referida a la relación entre un conjunto y sus subconjuntos, la tercera establece si se produce un incremento o decremento de la cantidad inicial y se aplica sólo a los problemas que implican acción, y finalmente la cuarta tiene que ver con el lugar en que se ubica la incógnita.

Conjugando estas cuatro dimensiones identificaron seis categorías de problemas: unión, separación, parte-parte-todo, comparación, igualación de añadir e igualación de quitar. Si se tiene en cuenta la ubicación de la incógnita, entonces se obtiene un total de diecisiete (17) tipos de problemas, ya que en el problema parte-parte-todo la incógnita tan solo aparece en una de las partes o en el resultado, por ejemplo, la incógnita aparece al comienzo cuando se plantean problemas como: Andrea tenía algunas flores en la mañana y en la tarde su abuelita le regala 6. Ahora tiene 9 ¿cuántas flores tenía en la mañana? O bien la incógnita esá en el resultado en un problema como: Juan tenía 4 caramelos, se ha comprado 11 más. ¿Cuántos caramelos tiene ahora?

Posteriormente, Carpenter (1996) retoma la clasificación descrita anteriormente e identifica cuatro (4) tipos de problemas: unión, separación, parte-todo y comparación. Los problemas de unión y separación corresponden a los problemas de cambio de adición y sustracción, entre otros: Juan tiene 5 canicas y Pedro le da algunas más. Ahora Juan tiene 9 canicas. ¿Cuántas canicas le ha dado Pedro?; los de parte-parte-todo a los de combinación, como: Ana tiene algunas fotos, su hermana tiene 6, entre las dos tienen 14 ¿Cuántas fotos tiene Ana? Y, por último, los de comparación reciben el mismo nombre, tales como: Manuel tiene 3 globos y Jaime 12 globos más que Manuel. ¿Cuántos globos tiene Jaime? Por tanto, la novedad más importante está en los problemas de igualación. Estos problemas suponen la comparación de dos conjuntos disjuntos y una acción implícita que ha de aplicarse a uno de los subconjuntos para hacerlo equivalente a otro, por ejemplo: María tiene 5 galletas y Ana 3. ¿Cuántas galletas necesita Ana para tener las mismas que María?

Es necesario tener presente que los niños, antes de recibir enseñanza formal sobre las operaciones aritméticas-algoritmos, construyen por sí mismos un amplio abanico de estrategias para su resolución. Baroody y Tiilikainen (2003) citados en Rodríguez, et al, (2008) han establecido seis estrategias de adición a partir de la teoría de procesamiento de la información y la teoría de los esquemas, a saber:

"[...] (1) contar todo con objetos concretos (representan secuencialmente ambos sumandos y cuentan el total), (2) contar todo con objetos concretos utilizando atajos (representan simultáneamente --con los dedos de cada mano-- los sumandos y cuentan la cantidad representada), (3) conteo concreto de la cantidad añadida (representan indirectamente la cantidad inicial y directamente la cantidad añadida con objetos, de modo simultáneo o secuencial, antes de contar el total), (4) conteo abstracto (descubren que la representación de los dos sumandos puede hacerse simultáneamente con el recuento total, lo que requiere un proceso de registro de la cantidad añadida), (5) contar todo empezando por el sumando menor (es semejante a la anterior, pero en ésta la suma se inicia por el sumando menor) y (6) contar desde el sumando mayor (comienzan el conteo con el cardinal que representa al sumando mayor y prosiguen añadiendo el menor)" (p. 241)

El estudio de los procedimientos de resolución que emplean los niños para resolver los diferentes problemas, resulta de gran importancia para conocer los procesos subyacentes a las ejecuciones correctas e incorrectas y establecer los mecanismos implicados en el cambio conceptual. Entre esos procedimientos están las estrategias de representación enactiva -directa-, donde los niños usan los dedos o cualquier otro objeto para representar cada uno de los términos del problema verbal, contando a continuación todo para obtener el resultado. Dependiendo de cómo se lleve a cabo la representación del problema y el conteo final, es posible considerar diferentes tipos de estrategias en la adición, tales como: juntar todo, juntar a, contar todo, contar a partir del primer sumando, contar a partir del sumando mayor y contar hasta. (Carpenter y Moser, 1984).

Bien, hasta aquí hemos visto las formas de encarar la enseñanza de las operaciones aditivas y, por tanto, de atender los procesos de simbolización. Las operaciones aditivas en educación inicial, se van formando de la mano de la lengua materna, pero tienen su base en las acciones reales con los objetos concretos que todo niño hace en su compulsa actividad por conocer y dominar lo que le rodea (clasificar, ordenar, comparar, reunir, separar, etc). Rowan y Bourne (1999) sentencian lo siguiente: «la teoría del aprendizaje sugiere que el conocimiento matemático de los niños se origina en sus acciones sobre objetos, la comprensión conceptual pasa de lo concreto -trabajo con objetos- a lo semiconcreto -pictórico-representacional- y finalmente a lo abstracto -mental, simbólico-» (p. 102)

Para dar solución a un problema aditivo verbal, inicialmente la representación ha de ser pictográfica (dibujos) y se hará énfasis en el protagonista del problema, con el paso de los días, las representaciones dejarán ver tres partes ordenadas de manera horizontal (sumandos y total), posteriormente, la representación icónica pasará a unas pequeñas marcas acompañadas de su cardinal correspondiente; hasta ahora, es evidente "la estructura lingüística que subyace en la expresión canónica de los problemas típicos, identificada en la estructura tripartita de la adición y en las simbolizaciones convenidas en clave cuantitativa y numérica." (Alcalá, 2002, p. 99) Según la trayectoria descrita anteriormente, un problema puede ser expresado con números y otros signos, no sólo con palabras y dibujos.

Asidero metodológico.

Para la redacción del artículo se tuvo en cuenta la técnica de investigación documental informativa (expositiva), en la cual se muestra básicamente una panorámica acerca de la información relevante de diversas fuentes confiables sobre la simbolización en las operaciones aditivas. No se tuvo como propósito aprobar o refutar alguna idea o postura expuesta por las fuentes.

Lo anterior, es consecuente con el problema escritural formulado, que no es investigativo, sino producto de una labor lectora documental con la exigencia de colegir desde la teoría.

Consideraciones finales.

Se ha descrito, aunque muy someramente, el proceso de simbolización en las operaciones aditivas. A modo de conclusión, se presentan algunas consideraciones surgidas en la revisión documental:

- En las matemáticas escolares, la comprensión de conceptos está directamente ligada con la distinción de un objeto en sus diversas formas de representación, ya que es frecuente confundir los objetos matemáticos (números, funciones, rectas, etc.) con sus representaciones (pictóricas, icónicas y simbólicas – decimales, fracciones, signos…-), pues un objeto matemático puede representarse de maneras muy diferentes.
- Las representaciones externas se constituyen en el medio por el cual el individuo exterioriza sus representaciones internas (mentales), es decir, pasan a ser representaciones semióticas visibles y accesibles a los demás, por consiguiente, se establecen funciones de comunicación que son necesarias para el desarrollo de la propia actividad matemática, puesto que sirven como apoyo al calcular, al pensar, al recordar y al resolver problemas.

- La tradición escolar no reconoce las diversas representaciones utilizadas por los alumnos desde el inicio de la escolaridad como indicios del conocimiento de los objetos y bases de las representaciones formales. En efecto, las propuestas didácticas –aún reconociendo la trascendencia de los presaberes del niño- no son del todo aptas para lograr que se potencialice el saber con el que el educando ingresa al aula escolar.
- Evidentemente, la escritura aritmética inicial, específicamente la simbolización de la adición, no es aprendida espontáneamente, sino que depende de un largo proce-so en la actividad del estudiante, en el que es necesario destacar la importancia del contexto, la lengua materna y de los procesos de simbolización que la acción escolar provoca. Cabe resaltar que los niños pequeños en particular, aprenden las matemáticas con mayor facilidad construyendo los conceptos a partir de su propia experiencia real más bien que a partir de manipulaciones simbólicas.
- El maestro debe proponer situaciones problemáticas en las que los estudiantes tengan la libertad de representar (pictórica, icónica o simbólicamente) las operaciones aditivas, puesto que la variedad de representaciones utilizadas por los niños puede convertirse en una oportunidad para introducir los simbolismos propios de la aritmética, al complejizar más el problema, se ve la necesidad de utilizar los símbolos convencionales, puesto que al tratar el problema con ellos, la solución se hace menos tediosa.

Referencia Bibliográfica

Alcalá, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático. Barcelona*. Ed GRAO.

Bermejo, V., Lago, M.O. y Rodríguez, P. (1998). Aprendizaje de la adición y sustracción. Secuencias de los problemas verbales según su dificultad.

REVISTA DE PSICOLOGÍA GENERAL Y APLICADA, Vol, 51, No, 3-4, pp. 533 -552.

Chamoso, J, et al (2004). .*Análisis y experimentación de juegos como instrumentos para enseñar matemáticas*. REVISTA SUMA. Vol. 47, Noviembre 2004, pp.47-58.

Carpenter, T. y Moser, J. (1984). *The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three*. JOURNAL FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, Vol. 15, pp. 179 — 202.

D'Amore, B. (2005). "*Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*". En REVERTÉ (S. V.) Julio, 2005, pp. 132-165.

De Vega, M. (1998). "*Introducción a la psicología cognitiva*". En, ALIANZA. (S.V.) Agosto, 1998, pp. 17-34.

Diestéfano, M. Urquijo, S. & González, S. (2010) "*Una intervención educativa para la enseñanza del lenguaje simbólico"* En, UNIÓN, REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, (S. V.), No. 23, pp. 59-70.

Duval, R. (2006). "*A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of Mathematics*". En EDUCATIONAL STUDIES IN MATHEMATICS, Vol.61 No. 1, pp. 103-131.

Godino, et al (2006). *Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta*. REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁ-TICA EDUCATIVA, (S. V.) No, Esp, 2006, pp. 131-155, 131-155.

Hughes, M. (1987). *Los niños y los números*. Barcelona, Planeta.

Martí, E. (2003). *Representar el mundo externamente. La adquisición infantil de los sistemas externos de representación*. Madrid: A .Machado Libros.

Maza, C. (1989). *Sumar y restar: el proceso de enseñanza-aprendizaje de la suma y la resta*. Madrid. Visor distribuciones, S.A.

Pérez, G., et al.(2012) *Lógica subyacente de la enseñanza de la suma y resta en profesores de primero a tercer grado Escolar*. TIEMPO DE EDUCAR, Vol. 13, No. 25, enero-junio, 2012, pp. 51-81.

Rodríguez, et al. (2008). *Un estudio sobre el razonamiento aditivo y multiplicativo*. ANALES DE PSICOLOGÍA, Vol. 24, Nº 2, diciembre, 2008, pp, 240-252.

Rowan, T., Bourne, B. (1999). *Pensando como matemáticos*. Buenos Aires. Manantial.

Sternberg, R (1986). "*Las capacidades humanas. Un enfoque desde el procesamiento de la información"* En. LABOR, (V.5) No. 3, pp. 75-34.