Sumando Potencias

Marco Vinicio Vasquez Bernal

$$S_m := \sum_{j=1}^{n} j^m = \frac{(n+1)^{m+1} - 1 - \sum_{k=0}^{m-1} (m+1)(\sum_{j=1}^{n} j^k)}{m+1}$$

$$S_m = \frac{(n+1)^{m+1} - 1 - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+1}{k} S_k}{m+1}$$

Resumen.

Este trabajo, propone una metodología para la suma de potencias de enteros consecutivos, para lo que se propone un proceso recursivo para ir generando las distintas fórmulas, basándose en el desarrollo de las potencias de un binomio desarrolladas por Sir Isacc Newton.

Sumando Potencias

Introducción:

Las matemáticas en su esencia, deben servir para entender nuestro entorno, donde el ser capaz de "contar" ubica al hombre en un espacio de privilegio frente a los demás seres del planeta, espacio que le convierte en el timón que direcciona el destino y los rumbos a tomar. Entonces esta operación aparentemente simple, el de contar los elementos que nos rodean, muestra su importancia, y resuena como un proceso aparentemente simple. Lo de aparente se escuda en la cotidianeidad de la misma, ya que a cada instante estamos contando cosas y lo hacemos con simplicidad, por la frecuencia y no por el proceso. Este responde a la complejidad de la abstracción y el razonamiento, es la operación que gobierna las matemáticas, lo que las otras hacen es utilizar algoritmos que simplifican la obtención de resultados, haciendo la "magia" de pronosticar soluciones, sin tener que rehacer el conteo. Así si juntamos dos grupos uno de ciento veinte elementos y otro de ochenta de la misma naturaleza, la suma me permite "predecir", que en el grupo formado existen doscientos elementos, y para ello no tengo que volver a contar.

Se dice que los conceptos de cantidad surgen en la mente del hombre a partir de los seis meses, la noción de número depende del entorno y está íntimamente relacionado a la educación, ya sea formal o informal. Se sabe también que una imaginación clara de elementos individualizados permite imaginar hasta cinco elementos. Lo indicado puede llevarnos a confusión o interpretaciones equivocadas sobre estos procesos cuya naturaleza de complejidad responde a que el mismo siempre va completando nuevas ideas, que van integrándose en todas las dimensiones y permiten el avance de la ciencia.

Es preciso entonces estudiar y reflexionar sobre simples procesos de sumatorias que deben servirnos por su puesto para obtener resultados pero además para razonar y entender ese mundo maravilloso del número y sus relaciones.

Problemática

Las operaciones matemáticas, por efectos de la tecnología y de ciertos prejuicios que existen contra la madre de todas las ciencias, van generando desinterés y resistencia, es mucho más fácil presionar unos botones que realizar un algoritmo, produciendo en el camino procesos esclavizados a la tecnología donde el razonamiento es mal visto, y más bien lo que interesa es la rapidez con la que una operación presenta su resultado. Este problema es tan fuerte que muchas veces los individuos aceptan o valoran su resultado únicamente si el mismo es comprobado en una calculadora o una computadora. Esta realidad social debe preocuparnos, pues sociológicamente nuestros congéneres, especialmente jóvenes, están reconociendo una inferioridad a las máquinas. Esto está generando una falta de autoconfianza y de dependencia que debe ser analizada con la importancia del caso. Los efectos en la sociedad van mucho más allá de reconocer a las matemáticas como una cátedra generalmente complicada que se caracteriza por la resistencia que suele producir en los estudiantes.

Es preciso entonces plantear formas que restituyan la importancia de las operaciones matemáticas, como una forma de mostrar lo esencial de esta ciencia y su rol de generadora de razonamiento, entendiendo además que el desarrollo de la humanidad esta ligando netamente a lo que la abstracción ha logrado construir.

OBJETIVO GENERAL

Generar resultados de sumas de potencias en base de razonamiento.

Objetivos Específicos

Entender claramente el concepto de suma

Mostrar que la tecnología debe sujetarse a la ciencia y no lo contrario.

Dar resultados para sumas de potencias con potencias varias.

Generalizar resultados.

DESARROLLO

1. SUMA DE NÚMEROS NATURALES CONSECUTIVOS A PARTIR DE UNO.

Consideraremos el conjunto de números naturales {1,2,3,4,5,6,…,n}. Definiremos

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n.$$

Por lo tanto se tiene también que

$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 4 + 3 + 2 + 1,$$

las dos sumatorias tienen n términos, y si sumamos término a término se tiene que:

$$S_n + S_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1) + (n+1) + (n+1),$$

donde se tiene n veces el sumando (n+1). Entonces $2S_n = n(n+1)$, y por lo tanto:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Esta fórmula puede expresarse también de la forma:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2},$$

utilizando para ello la notación de sumatoria y relacionando el ordenador i que toma valores enteros desde 1 hasta n, con el valor de los sumandos, que en este caso, serán justamente los números naturales del 1 hasta n.

Esta claro además que se cumple:

FÓRMULA 1

En vista de que en relación con la sumatoria anterior se ha añadido un término único de i=0, que obviamente al aumentar a la sumatoria anterior, no varía.

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. SUMA DE NÚMEROS NATURALES CONSECUTIVOS A PARTIR DE UN NÚMERO NATURAL CUALESQUIERA:

Para desarrollar este tema, debemos indicar que para obtener la suma de los números naturales consecutivos, entre dos de ellos deberemos obtener la suma de los naturales entre la unidad y el mayor de ellos, luego obtendremos la sumatoria entre la unidad y el natural anterior al menor de ellos, así:

Supongamos que deseamos obtener la suma de los números naturales entre 7 y 15, es decir:

S = 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15.

El resultado de esta sumatoria lo obtendremos sumando primero del 1 al 15.

S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 120,

luego sumamos los naturales del 1 al 6

S_2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21,

y el resultado será $S_1 - S_2$ = 120 – 21 = 99.

Este proceso podemos pasarlo a fórmula con sumatorias obteniendo lo siguiente:

$$\sum_{i=n}^{m} \mathrm{i} = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{i} - \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{i},$$

que aplicando la fórmula 1, tendríamos:

$$\sum_{i=n}^{m} \mathrm{i} = \frac{m(m+1)}{2} - \frac{(n-1)\mathrm{n}}{2}.$$

FÓRMULA 2

Sumatoria de series aritméticas finitas de números naturales.

Para esto debemos recordar que una serie aritmética es aquella que entre sus elementos consecutivos presenta un incremento constante. Para entender mejor mostraré el siguiente ejemplo:

{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49},

donde el primer elemento es el 1, y los demás se van generando sumando 3 a cada uno de los elementos. Caracterizando estos elementos con la expresión $a_i = a_1 + 3(i-1)$, con $a_1 = 1$ en esta serie se tiene 17 elementos, cuya sumatoria es:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n}(a_1 + 3(i-1)) = \sum_{i=1}^{n}(1 + 3(i-1)) = \sum_{i=1}^{n}(1 + 3i - 3) = \sum_{i=1}^{n}(3i-2)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(3i-2) = 3\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 2 \quad = 3\frac{n(n+1)}{2} - 2n = 3\frac{(n^2-n)}{2}$$

$= \frac{3n(n-1)}{2}$, que remplazando n por 17 será, $\frac{3(17)(16)}{2} = 408$.

Se observa entonces que la caracterización de los elemento de una serie finita es fundamental cuando se desea obtener una sumatoria, por lo que es imprescindible generar fórmulas para las potencias de los números naturales consecutivos, teniendo en cuenta las reglas de linealidad de las sumatorias, que desarrollaré en la siguiente sección.

3. SUMATORIA DE UNA SERIE DE NÚMEROS NATURALES CON LA PRESENCIA DE POTENCIAS:

Sea $b_i = a_n i^n + a_{n-1} i^{n-1} + a_{n-2} i^{n-2} + \cdots + a_2 i^2 + a_1 i + a_0$. Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i = \sum_{i=1}^{m} (a_n i^n + a_{n-1} i^{n-1} + a_{n-2} i^{n-2} + \cdots + a_2 i^2 + a_1 i + a_0)$$

$$= a_n \sum_{i=1}^{m} i^n + a_{n-1} \sum_{i=1}^{m} i^{n-1} + a_{n-2} \sum_{i=1}^{m} i^{n-2} + \cdots + a_2 \sum_{i=1}^{m} i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{m} i + a_0 \sum_{i=1}^{m} 1,$$

por lo que es necesario construir las fórmulas para la sumas de las potencias de los números naturales consecutivos.

4. SUMA DE POTENCIAS DE NÚMEROS NATURALES CONSECUTIVOS QUE INICIAN EN 1.

Debemos recordar que:

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n,$$

FÓRMULA 3.

que salta a simple vista, ya que lo que se está sumando en n veces el número uno. Luego debemos idear un proceso que permita obtener las sumatorias de las potencias de los números naturales, para ello explicaremos un proceso simple que permite luego una generalización para obtener cualquier sumatoria de este tipo.
Iniciamos de la identidad

i= ((i-1)+1).

Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} (i)^2 = \sum_{i=1}^{n} ((i-1)+1)^2, \qquad (a)$$

y aplicando el cuadrado de un binomio se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n}((i-1)+1)^2 = \sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 + \sum_{i=1}^{n}(2(i-1)) + \sum_{i=1}^{n}(1)^2,$$

que es igual a:

$$= \sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} i - 2\sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1.$$

Se tiene también que:

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} i^2.$$

Por tanto:

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \sum_{i=0}^{n} i^2 - n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 - n^2.$$

De (a) se tendrá:

$$\sum_{i=1}^{n}(i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(i)^2 - n^2 + 2\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1,$$

y así,

$$\sum_{i=1}^{n}(i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(i)^2 - n^2 + 2\sum_{i=1}^{n} i - n,$$

donde coinciden dos términos en cada uno de los miembros, los que se podrían cancelar. Luego

$$2\sum_{i=1}^{n} i = n^2 + n.$$

Por tanto:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Resultado que coincide con el obtenido en la *fórmula 1*, es decir no aporta como resultado, en cambio muestra un proceso que bien puede ser utilizado en otros casos.

5. SUMATORIA DE NÚMEROS NATURALES CONSECUTIVOS ELEVADOS AL CUADRADO:

Partiremos de la misma identidad usada anteriormente y desarrollando el binomio al cubo. Se tendrá que:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \sum_{i=1}^{n} ((i-1)+1)^3 = \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 + \sum_{i=1}^{n} (3(i-1)^2) + \sum_{i=1}^{n} 3(i-1) + \sum_{i=1}^{n} (1)^2.$$

Como:

$$\sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 - n^3,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (3(i-1)^2) = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - 3n^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n} 3(i-1) = 3\sum_{i=1}^{n} i - 3n,$$

y

$$\sum_{i=1}^{n} (1)^2 = n,$$

remplazando en la igualdad anterior tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 - n^3 + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - 3n^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i - 3n + n,$$

donde, a su vez, el término del primer miembro se repite en el segundo, lo que permitiría su cancelación. Despejando el término que contiene lo que deseamos, tenemos:

$$3\sum_{i=1}^{n} i^2 = n^3 - 3\sum_{i=1}^{n} i + 3n^2 + 2n.$$

Remplazando la fórmula 1:

$$3\sum_{i=1}^{n} i^2 = n^3 - 3\frac{n(n+1)}{2} + 3n^2 + 2n.$$

Pero:
$n^3 + 3n^2 + 2n = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - (n+1) = (n+1)^3 - (n+1) = (n+1)((n+1)^2 - 1) = (n+1)(n^2 + 2n + 1 - 1) = (n+1)(n^2 + 2n) = n(n+1)(n+2).$

Entonces:

$$3\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(n+2) - 3\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{2n(n+1)(n+2) - 3n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2(n+2) - 3)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}.$$

Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

FÓRMULA 4

6. SUMATORIA DE NÚMEROS NATURALES CONSECUTIVOS ELEVADOS AL CUBO:

Partiremos de la misma identidad usada anteriormente y desarrollando el binomio al cubo se tendrá que:

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \sum_{i=1}^{n} ((i-1)+1)^4$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (i-1)^4 + \sum_{i=1}^{n} (4(i-1)^3) + \sum_{i=1}^{n} 6(i-1)^2 + \sum_{i=1}^{n} 4(i-1) + \sum_{i=1}^{n} 1^4$$

Como:

$$\sum_{i=1}^{n} (i-1)^4 = \sum_{i=1}^{n} i^4 - n^4,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (4(i-1)^3) = 4\sum_{i=1}^{n} i^3 - 4n^3,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(6(i-1)^2) = 6\sum_{i=1}^{n} i^2 - 6n^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n} 4(i-1) = 4\sum_{i=1}^{n} i - 4n,$$

y

$$\sum_{i=1}^{n}(1)^4 = n,$$

remplazando en la igualdad anterior tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \sum_{i=1}^{n} i^4 - n^4 + 4\sum_{i=1}^{n} i^3 - 4n^3 + 6\sum_{i=1}^{n} i^2 - 6n^2 + 4\sum_{i=1}^{n} i - 4n + n,$$

donde, nuevamente el término del primer miembro se repite en el segundo, lo que permitiría su cancelación, y despejando el término que contiene lo que deseamos, tendríamos:

$$4\sum_{i=1}^{n} i^3 = n^4 + 4n^3 - 6\sum_{i=1}^{n} i^2 + 6n^2 - 4\sum_{i=1}^{n} i + 4n - n.$$

Remplazando las fórmulas 1 y 4:

$$4\sum_{i=1}^{n} i^3 = n^4 + 4n^3 - 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6n^2 - 4\frac{n(n+1)}{2} + 3n$$

$$= n^4 + 4n^3 - n(n+1)(2n+1) + 6n^2 - 2n(n+1) + 3n$$

$$= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 3n - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1).$$

Pero:

$$n^4+4n^3+6n^2+3n = n^4+4n^3+6n^2+4n+1-(n+1)$$

$$= (n+1)^4 - (n+1) = (n+1)((n+1)^3-1).$$

Entonces:

$$\begin{aligned}4\sum_{i=1}^{n} i^3 &= (n+1)((n+1)^3-1) - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1)\\ &= (n+1)((n+1)^3 - 1 - n(2n+1) - 2n)\\ &= (n+1)((n+1)^3 - 1 - 2n^2 - n - 2n)\\ &= (n+1)(n^3+3n^2+3n+1-1-2n^2-n-2n)\\ &= (n+1)(n^3+n^2) = (n+1)n^2(n+1) = n^2(n+1)^2,\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

FÓRMULA 5.

NOTA: Relacionando la fórmula 1 con la fórmula 5, se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2.$$

7. SUMATORIA DE NÚMEROS NATURALES CONSECUTIVOS ELEVADOS A LA CUARTA:

Partiremos de la misma identidad usada anteriormente y desarrollando el binomio al cubo se tendrá que:

$$\sum_{i=1}^{n} i^5 = \sum_{i=1}^{n} ((i-1)+1)^5$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (i-1)^5 + \sum_{i=1}^{n} (5(i-1)^4)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} 10(i-1)^3 + \sum_{i=1}^{n} 10(i-1)^2 + \sum_{i=1}^{n} 5(i-1) + \sum_{i=1}^{n} 1^5.$$

Como:

$$\sum_{i=1}^{n} (i-1)^5 = \sum_{i=1}^{n} i^5 - n^5,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (5(i-1)^4) = 5\sum_{i=1}^{n} i^4 - 5n^4,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (10(i-1)^3) = 10\sum_{i=1}^{n} i^3 - 10n^3,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (10(i-1)^2) = 10\sum_{i=1}^{n} i^2 - 10n^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n} 5(i-1) = 5\sum_{i=1}^{n} i - 5n,$$

y

$$\sum_{i=1}^{n} (1)^5 = n$$

remplazando en la igualdad anterior tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} i^5 = \sum_{i=1}^{n} i^5 - n^5 + 5\sum_{i=1}^{n} i^4 - 5n^4 + 10\sum_{i=1}^{n} i^3 - 10n^3 + 10\sum_{i=1}^{n} i^2 - 10n^2$$
$$+5\sum_{i=1}^{n} i - 5n + n,$$

donde, nuevamente el término del primer miembro se repite en el segundo, lo que permitiría su cancelación, y despejando el término que contiene lo que deseamos, tenemos:

$$5\sum_{i=1}^{n} i^4 = n^5 + 5n^4 - 10\sum_{i=1}^{n} i^3 + 10n^3 - 10\sum_{i=1}^{n} i^2 + 10n^2 - 5\sum_{i=1}^{n} i + 5n - n.$$

Remplazando las fórmulas 1, 4 y 5, tendríamos:

$$5\sum_{i=1}^{n} i^4 = n^5 + 5n^4 - 10\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 10n^3 - 10\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 10n^2 - 5\frac{n(n+1)}{2}$$
$$+4n$$

$$= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 4n - 10\frac{n^2(n+1)^2}{4} - 10\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 5\frac{n(n+1)}{2}.$$

Pero:

$$n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 4n = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - (n+1)$$

$$= (n+1)^5 - (n+1) = (n+1)((n+1)^4 - 1).$$

Entonces:

$$5\sum_{i=1}^{n} i^4 = (n+1)((n+1)^4 - 1) - 5\frac{n^2(n+1)^2}{2} - 5\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - 5\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{6(n+1)((n+1)^4-1)-15n^2(n+1)^2-10n(n+1)(2n+1)-15n(n+1)}{6}$$
$$=\frac{(n+1)(6(n+1)^4-6-15n^2(n+1)-10n(2n+1)-15n)}{6}$$
$$=\frac{(n+1)(6n^4+24n^3+36n^2+24n+6-6-15n^3-15n^2-20n^2-10n-15n)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{6}.$$

Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{n} i^4=\frac{n(n+1)\left(6n^3+9n^2+n-1\right)}{30}.$$

Se sabe también que: $6n^3+9n^2+n-1=(2n+1)(3n^2+3n-1)$, por lo que el resultado final será:

$$\sum_{i=1}^{n} i^4=\frac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{30}.$$

FÓRMULA 6

8. GENERALIZACIÓN DEL PROCESO:

El proceso puede generalizarse, por lo que desarrollaremos una forma que sume las potencias de una serie consecutiva de n números naturales, buscaremos un resultado para:

$$\sum_{i=1}^{n} i^p,$$

para lo cual utilizaremos lo ya mostrado:

$$\sum_{i=1}^{n} i^p=1+\sum_{i=2}^{n}\left((i-1)+1\right)^p.$$

Recordando la definición de los coeficientes binomiales y el desarrollo del binomio de Newton:

$$\binom{p}{k} = \frac{\mathrm{p!}}{\mathrm{k!}\,(\mathrm{p}-\mathrm{k})!},$$

tendremos lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n} i^p = 1 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(i-1)^k 1^{n-k} = 1 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(i-1)^k.$$

Haciendo el cambio de variable j = i -1,

$$\sum_{i=1}^{n} i^p = 1 + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} j^k = 1 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} j^k - \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\mathrm{n}^k.$$

Descomponiendo la sumatoria doble:

$$\sum_{i=1}^{n} i^p = 1 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{p-2}\binom{p}{k} j^k + \sum_{j=1}^{n}\binom{p}{p}\mathrm{j}^{\mathrm{p}} + \sum_{j=1}^{n}\binom{p}{p-1}\mathrm{j}^{\mathrm{p}-1} - \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\mathrm{n}^k.$$

Recordando que:

$$\binom{p}{p} = \frac{\mathrm{p!}}{\mathrm{p!}\,(\mathrm{p}-\mathrm{p})!} = \frac{\mathrm{p!}}{\mathrm{p!}\,(0)!} = \frac{\mathrm{p!}}{\mathrm{p!}} = 1$$

y

$$\binom{p}{p-1} = \frac{\mathrm{p!}}{(\mathrm{p}-1)!\,(\mathrm{p}-(\mathrm{p}-1))!} = \frac{\mathrm{p!}}{(\mathrm{p}-1)!\,(1)!} = \frac{\mathrm{p!}}{(\mathrm{p}-1)!} = \mathrm{p},$$

tendremos

$$\sum_{i=1}^{n} i^p = 1 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{p-2}\binom{p}{k} j^k + \sum_{j=1}^{n}\mathrm{j}^{\mathrm{p}} + \mathrm{p}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{j}^{\mathrm{p}-1} - \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\mathrm{n}^k.$$

Como:

$$\sum_{i=1}^{n} i^p = \sum_{j=1}^{n} j^p,$$

recordando el siguiente desarrollo de Newton:

$$(n+1)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} n^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} n^k,$$

eliminando los términos iguales y remplazando tendremos:

$$0 = 1 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{p-2} \binom{p}{k} j^k + p \sum_{j=1}^{n} j^{p-1} - (n+1)^p.$$

Utilizando la linealidad de las sumatorias y reubicando los términos se tendrá:

$$p \sum_{j=1}^{n} j^{p-1} = (n+1)^p - 1 - \sum_{k=0}^{p-2} \binom{p}{k} \sum_{j=1}^{n} j^k.$$

Por último remplazaremos p-1 por m, y así:

$$(m+1) \sum_{j=1}^{n} j^m = (n+1)^{m+1} - 1 - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+1}{k} \sum_{j=1}^{n} j^k,$$

Que permite proponer la siguiente fórmula definitiva:

$$\sum_{j=1}^{n} j^m = \frac{(n+1)^{m+1} - 1 - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+1}{k} \sum_{j=1}^{n} j^k}{m+1}.$$

FÓRMULA 7

Esta fórmula muestra ya un desarrollo recursivo para obtener el resultado de la suma de potencias de números naturales consecutivos. Para visualizarla con mayor claridad definiremos:

$$S_i = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{j}^{\mathrm{i}}, \qquad \forall \mathrm{i} \in .,$$

Entonces:

$$\mathbf{S_m} = \frac{(\mathbf{n}+\mathbf{1})^{\mathbf{m}+\mathbf{1}} - \mathbf{1} - \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\mathbf{m}-\mathbf{1}} \binom{\mathbf{m}+\mathbf{1}}{\mathbf{k}} \mathbf{S_k}}{\mathbf{m}+\mathbf{1}}.$$

FÓRMULA 8

Como esta fórmula es una fórmula de inducción, se debe establecer un punto de partida. Para ello estableceremos lo siguiente:

$$S_0 = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{j}^0 = \sum_{j=1}^{n} 1 \ =,$$

que ya establecimos como fórmula 1.

9. VERIFICACIÓN DE LA FÓRMULA GENERAL:

Para comprobar la fórmula indicada realizaremos algunos cálculos:

$$\mathbf{S_1} = \frac{(\mathbf{n}+\mathbf{1})^{\mathbf{2}} - \mathbf{1} - \binom{\mathbf{2}}{\mathbf{0}} \mathbf{S_0}}{\mathbf{2}} = \frac{(\mathbf{n}+\mathbf{1})^{\mathbf{2}} - \mathbf{1} - \mathbf{n}}{\mathbf{2}}$$

$$= \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+1-1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2},$$

lo que coincide con la fórmula 2. Luego:

$$S_2 = \frac{(n+1)^3 - 1 - \binom{3}{0}S_0 - \binom{3}{1}S_1}{3} = \frac{(n+1)^3 - 1 - n - 3\frac{n(n+1)}{2}}{3}$$

$$= \frac{2(n+1)^3 - 2 - 2n - 3n(n+1)}{6}$$

$$= \frac{2(n+1)^3 - 2(n+1) - 3n(n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2(n+1)^2 - 2 - 3n)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 4n + 2 - 2 - 3n)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + n)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Igualmente este resultado ratifica la fórmula 2.

Veamos ahora para S_3.

$$S_3 = \frac{(n+1)^4 - 1 - \binom{4}{0}S_0 - \binom{4}{1}S_1 - \binom{4}{2}S_2}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^4 - 1 - n - 4\frac{n(n+1)}{2} - 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^4 - 1 - n - 2n(n+1) - n(n+1)(2n+1)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^4 - (n+1) - 2n(n+1) - n(n+1)(2n+1)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)((n+1)^3 - 1 - 2n - n(2n+1))}{4}$$

$$= \frac{(n+1)(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - 2n - 2n^2 - n)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)(n^3+n^2)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Que también coincide con un resultado anterior. Calcularemos además S_4.

$$S_4 = \frac{(n+1)^5 - 1 - \binom{5}{0}S_0 - \binom{5}{1}S_1 - \binom{5}{2}S_2 - \binom{5}{3}S_3}{5}$$

$$S_4 = \frac{(n+1)^5 - 1 - n - 5\frac{n(n+1)}{2} - 10\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 10\frac{n^2(n+1)^2}{4}}{5}$$

$$S_4 = \frac{6(n+1)^5 - 6(n+1) - 15n(n+1) - 10n(n+1)(2n+1) - 15n^2(n+1)^2}{30}$$

$$S_4 = \frac{(n+1)(6(n+1)^4 - 6 - 15n - 10n(2n+1) - 15n^2(n+1))}{30}$$

$$S_4 = \frac{(n+1)(6n^4 + 24n^3 + 36n^2 + 24n + 6 - 6 - 15n - 20n^2 - 10n - 15n^3 - 15n^2)}{30}$$

$$S_4 = \frac{(n+1)(6n^4 + 9n^3 + n^2 - n)}{30} = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$$

$$S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30},$$

Que nuevamente confirma lo expuesto.

10. RESULTADOS GENERALES:

Con la inducción indicada se pueden obtener los siguientes resultados:

RESULTADOS DE $S_i = \sum_{j=1}^{n} j^i$	
i	S_i
0	**n**
1	$\frac{n(n+1)}{2}$
2	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
4	$\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$
5	$\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$
6	$\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42}$
7	$\frac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+1)}{24}$
8	$\frac{n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)}{90}$
9	$\frac{n^2(n+1)^2(n^2+n-1)(2n^4+4n^3-n^2-3n+3)}{20}$
10	$\frac{n(n+1)(2n+1)(n^2+n-1)(3n^6+9n^5+2n^4-11n^3+3n^2+10n-5)}{66}$

11. RESULTADOS NOTABLES:

1) Todas las fórmulas para calcular los resultados de los sumatorios tienen como factor $\frac{n(n+1)}{2}$, que es el resultado de sumar los n primeros números naturales iniciando en 1.
2) La suma de las potencias de números naturales de 1 a n, cuando el exponente es impar distinto de 1, siempre se halla presente el factor $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, que justamente representa la suma de los cubos de los números naturales de 1 a n.
3) La suma de las potencias naturales de 1 a n, cuando el exponente es par tiene como factor $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, que representa el resultado de sumar el cuadrado de los números del 1 a n.
4) Está claro que las sumatorias establecidas se mantienen invariantes si se incluye el cero.

Estos resultados responden justamente a la forma recursiva como se van obteniendo estas fórmulas.

12. SUMA DE POTENCIAS A SERIES DE NÚMEROS NATURALES QUE NO INICIAN EN 1.

Supongamos que queremos sumar ($7^3, 8^3, 9, 10^3, 11^3, 12^3, 13^3, \ldots, 32^3$).

Recurriremos al mismo razonamiento utilizado para obtener la *fórmula 2* lo que permitirá expresar la operación:

$$\sum_{i=7}^{32} i^3 = \sum_{i=1}^{32} i^3 - \sum_{i=1}^{6} i^3,$$

que aplicando la fórmula respectiva tenemos:

$$\frac{32^2(32+1)^2}{4} - \frac{6^2(6+1)^2}{4} = \frac{32^2 33^2 - 6^2 7^2}{4}$$

$$16^2 33^2 - 3^2 7^2 = (16x33 + 3x7)(16x33 - 3x7) = 278343.$$

Este razonamiento simple permite expresar la fórmula:

$$\sum_{i=n}^{m} i^p = \sum_{i=1}^{m} i^3 - \sum_{i=1}^{n-1} i^3,$$

que, utilizando las respectivas fórmulas permitirá obtener el resultado definitivo.

13. SUMATORIA DE SERIES ARITMÉTICAS EN GENERAL.

Abordamos ya el problema inicial. Supongamos que tenemos un conjunto finito (b_i), donde los elementos b_i se caracterizan por:

$$b_i = a_p i^p + a_{p-1} i^{p-1} + a_{p-2} i^{p-2} + \cdots + a_2 i^2 + a_1 i + a_{0,}$$

donde los a_i son números reales e i son naturales. Queremos calcular la sumatoria de esos elementos, con i iniciando en m y concluyendo en n.

Entonces:

$$\sum_{i=m}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{i=1}^{m-1} b_i$$

$$= \sum_{i=m}^{n} (a_p i^p + a_{p-1} i^{p-1} + a_{p-2} i^{p-2} + \cdots + a_2 i^2 + a_1 i + a_0)$$

$$= a_p \sum_{i=m}^{n} i^p + a_{p-1} \sum_{i=m}^{n} i^{p-1} + a_{p-2} \sum_{i=m}^{n} i^{p-2} + \cdots + a_2 \sum_{i=m}^{n} i^2 + a_1 \sum_{i=m}^{n} i + a_0 \sum_{i=m}^{n} 1,$$

Que puede calcularse con el uso de las respectivas fórmulas establecidas anteriormente.

14. CÁLCULO DE SUMATORIAS A SERIES CON ENTEROS NEGATIVOS.

Esta extensión es posible con lo ya desarrollado, para esto simplemente debe tenerse en cuenta lo siguiente:

- Un entero negativo elevado a una potencia par es siempre positivo e igual a ese mismo entero positivo elevado a esa potencia.
- Un entero negativo elevado a una potencia impar es siempre negativo e igual al negativo de ese entero positivo elevado a esa potencia, lo que permitirá en algunos casos una compensación, abriéndose la posibilidad de que el resultado de la sumatoria sea un resultado negativo o cero.

BIBLIOGRAFÍA:

- [Courant-John] R. Courant. F. John. Introducción al cálculo y al análisis matemático. Ed. Limusa. (1985). Volumen 1,
- [Apostol] T. Apostol, Introducción a la Teoría Analítica de Números. Ed. Reverté (1980).
- [Ivorra] C. Ivorra. Teoría de Números. Disponible en
- http://www.uv.es/ivorra/Libros/Numeros.pdf
- [Ram Murty] M. Ram Murty. Problems in analytic number theory.
- Graduate texts in mathematics; 206. Berlin: Springer, 2001.
- [Spiegel] M. Spiegel. Variable Compleja (serie Schaum). Mc. Graw-Hill, 1991.
- Artículo en Wikipedia.org Sums of powers.

Decano General de la Unidad Académica de la ciudad de Cañar.

Universidad Técnica José Peralta- Ecuador