DIFICULTADES E IMPORTANCIA DEL LENGUAJE MATEMÁTICO

Marta Bonacina- Claudia Teti- Alejandra Haidar - Mirtha Norma Soto
Facultad de Cs. Bioquímicas y Farmacéuticas-UNR-Argentina
mbacuario@yahoo.com.ar

Categoría: Resolución de problemas
Nivel Educativo: Secundario, Terciario, Universitario.
Palabras Clave: lenguajes, cognición, estrategias didácticas, resolución de problemas**.**

RESUMEN

Las disciplinas científicas tienen un *lenguaje* que las caracteriza y a esto no escapa la Matemática quien posee un lenguaje que se ´autoexplica´ con un sistema de signos ´autocontenidos´ (aunque esto no fue siempre así).
Esta expresión final de la Matemática como lenguaje *autosuficiente* y *formal es* la que en general se comunica a los alumnos y sería, a nuestro juicio, la razón última de las dificultades observadas en su aprendizaje: el *´lenguaje matemático´* bajado al aula sin la conveniente transposición didáctica generaría un conflicto cognitivo difícil de salvar por el estudiante. En tal caso el quehacer matemático queda reducido a una mera manipulación de símbolos (en general arbitrariamente convenidos) y reglas, divorciados de cualquier interpretación concreta.
Entendiendo que "*el aprendizaje de la Matemática está íntimamente ligado a la capacidad lingüística matemática que se tenga"* proponemos que nuestra acción debe tener por fin el desarrollo de esta capacidad. Que debemos evitar la completa separación entre *la acción* y *la forma*, provocar que el *´símbolo´* contenga, cuanto menos, *´huellas´* de los elementos que participan en la abstracción de la cosa. Huellas que posibiliten al lector el reencuentro con la cosa en sí, la asimilación significativa del esquema que la representa, la operatividad del mismo. En definitiva, nuestro desafío es: restablecer *el significado*. El resultado de nuestra investigación es que tal objetivo se logra a partir de secuencias de trabajo donde el acento no esté en el *objeto matemático* en sí, sino en la actividad a realizar para su aprehensión; particularmente, en que tal actividad se de en contextos argumentativos donde los actores reproduzcan prácticas donde se combinen la *percepción de la realidad y la experimentación situada con la argumentación matemática*.

INTRODUCCIÓN

Las dificultades observadas en los alumnos que ingresan a la facultad en relación a una efectiva inserción al ámbito académico son muchas y de muy diversa índole.
Al respecto y a nuestro juicio entre las tantas razones o causas que estarían dificultando el proceso de enseñanza y aprendizaje en general y en particular el de la Matemática, (coincidiendo con las últimas investigaciones en el campo de la Educación Matemática), estaría el conocimiento o dominio del lenguaje científico, en particular el ´matemático´.
Así, en el presente trabajo, nos proponemos:

- Analizar la hipótesis de que el lenguaje matemático es una fuente susceptible de conflictos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática.
- Proponer estrategias didácticas alternativas, superadoras de este conflicto.

Las dificultades para la enseñanza y aprendizaje de la Matemática (en constante aumento y sin soluciones efectivas a la vista), reconocen distintas causas; una de las más importantes, la *visión* que de ella se tiene.
Se la ve como una ciencia:

- ✓ fija, inmutable, desconectada de la realidad;
- ✓ asequible a unos pocos dotados; ***constituida por una colección de reglas y definiciones que sólo cabe recordar de memoria***;
- ✓ exacta, no opinable;
- ✓ ***expresada en un lenguaje incomprensible***, lleno de ***x´s*** y de ***y´s***, desprovistas de todo ***significado***.

Se estima que estas imágenes negativas podrían tener su origen en:

- Las actitudes generales del contexto hacia la Matemática, las cuales en forma consciente o inconsciente se transmiten al alumno.
- ***El modo de presentación de esta materia en el aula***.
- Las actitudes de los profesores de Matemática para con los alumnos.
- La naturaleza del pensamiento matemático.
- *El* ***"lenguaje de la Matemática"***.

En relación a la problemática señalada se observa una evolución en el ´tipo´ de las dificultades presentadas por los ingresantes a la Universidad en las últimas décadas con respecto a las presentadas en las décadas del 70, 80 y hasta el 90. En el Informe del Grupo de Discusión: "Actividades de enseñanza que pueden apoyar el tránsito de los estudiantes desde la secundaria a la Universidad" (Álvarez, Belgrano, Herrera, Lacués y Pagano 2002, p. 1327), y en relación al diagnóstico de dificultades en el alumno ingresante, se destacan las siguientes como las de mayor peso:

- ***comprender consignas*** *y aplicar procedimientos apropiados para responderlas;*
- *abstraer propiedades generales comunes a diversos objetos ;*
- *reconocer casos particulares en formulaciones generales ;*
- ***comunicarse apropiadamente con otro*** *según lo requiera el trabajo (en forma coloquial, oral o escrita; en forma simbólica, literal o gráfica) ;*
- ***traducir la información presentada en un registro dado*** *(gráfico, simbólico, verbal, numérico) a cualquiera de los otros.*

O sea, se ha percibido que los problemas relativos al dominio de "propiedades, algoritmos o reglas algebraicas" (que subsisten) son relativamente fáciles de salvar si el alumno posee las capacidades antes mencionadas. Es decir, que la problemática educativa antes que de orden ´técnico/conceptual´ es de orden ´metodológico/actitudinal´; que excede ampliamente el campo de lo disciplinar y trasciende al campo de lo sociocultural dado que, en última instancia, el aprender aparece asociado (y cada vez más) a la capacidad del hombre de involucrarse o conectarse tanto con el saber como con los otros hombres. En definitiva, se asume cada vez más que los instrumentos de mediación, entre ellos y en lugar destacado el ´lenguaje´, no son factores secundarios en la producción del conocimiento en general y, menos aún, del matemático. Empieza a comprenderse el papel fundamental de los mismos en dicho proceso, más precisamente, su impacto en la génesis misma de una idea o concepto, consecuentemente en la forma de pensar o razonar.

NUEVAS TENDENCIAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

- *reconocer que la práctica educativa es parte de un contexto muy amplio;*
- *aprovechar los avances científicos y tecnológicos;*
- *reconocer un nuevo rol para el docente;*

- *conceptualizar el ´Currículo´ de forma más dinámica, entendiendo que:*

⇨ los ***contenidos,*** no son el problema (pueden ser fácilmente reorganizados)

⇨ los ***métodos*** (son modificables, pero el cambio es difícil de

objetivos ⇨ sobre ellos recae toda la carga

Desde la concepción emergente, modificar un currículo requiere algo más que aggiornar contenidos ó relevar metodologías; requiere la modificación de conductas, de parámetros, perseguir la formación de un individuo LIBRE ⇔ PENSANTE ⇔ ACTUANTE. En definitiva, requiere de un cambio de actitudes, entre ellas la resignificación del rol docente (particularmente en el ciclo superior).

Para ello, la

no como → *SISTEMATIZACIÓN DEL CUERPO DE CONOCIMIENTOS*

sino como → *SISTEMATIZACIÓN DE ACTIVIDADES*

⇨ *´Sensibilizadas´ o ´atravesadas´ por la realidad.*

⇨ *Posibles con la ayuda de MEDIOS.*

⇨ ***El docente:*** como mediador entre el estudiante y el saber, como investigador en acción.

⇨ ***Instrumentales***: base conceptual, medios técnicos y/o tecnológicos.

⇨ **El LENGUAJE**: como elemento esencial para la *toma de posesión* del mundo que nos rodea y desarrollo del pensamiento

Respecto del LENGUAJE, obviamente es mucho lo que se puede hablar pero, resumidamente podemos decir que se lo puede “ver” como:

⇨ ***Convención***, en cuanto lo usamos para sustituir el mundo de lo *´real y concreto´* por el abstracto de los signos, *signos sobre cuya significación hay ´usos impuestos´.*

⇨ ***Conjunto estructurado de signos*** a través del cual *conocemos*, podemos desprendemos de lo *concreto,* abstraer sin la influencia de lo "*evidente"*, comunicar pensamientos, transmitir información, pero y sobre todo, *construir razonamientos*.

***Respecto al LENGUAJE MATEMÁTICO o FORMAL observamos*:**

- Que está compuesto por *signos* para los cuales hay reglas de manipulación y de construcción (o sea, posee una *sintaxis*). Que sobre estas reglas, a diferencia del lenguaje usual, no existe margen alguno de tolerancia para los errores *ortográficos* o de *puntuación* (en general, aunque no siempre, en el lenguaje usual, la fuerza del contexto permite eliminar las ambigüedades, dudas o confusiones que causa el error).
- No está *completamente formalizado,* siga valiéndose de sintagmas del lenguaje natural.
- El componente *semántico* no está ausente.Existen en el discurso matemático ambigüedades que, como en el discurso corriente, se resuelven según el contexto del mismo.

  Ejemplos: $a^{-1} = \frac{1}{a}$ si ***a*** *representa* un número real distinto de cero;

  $f^{1} \neq \frac{1}{f}$ si ***f*** *representa* una función escalar.
- Es el vehículo a través del cual se comunican los conceptos matemáticos (y extra matemáticos) y también a través del cual se opera sobre los mismos. Es una especie de taquigrafía que ayuda a desnudar la esencia de argumentos, textos o problemas largos y complicados ya que permite:

  1. *traducir proposiciones del lenguaje usual a la forma simbólica;*
  2. *operar con todo rigor sobre la forma simbólica a efectos de ´simplificarla´, comprender así lo esencial del texto, obtener respuesta o solución al problema;*
  3. *traducir la forma simplificada de nuevo a proposiciones del lenguaje usual.*

- Es también el vehículo a través del cual se *descubren* y *construyen* todo tipo de conceptos.

O sea, el lenguaje matemático no es sólo un medio para el cálculo y el razonamiento deductivo, sino también un *medio de idealización y analogías, fuente de ideas y principios que posibilitan el surgimiento de nuevas teorías u orientaciones en cualquier rama de la ciencia.*

El modo de presentación de la Matemática en el aula

Creemos que la Matemática (consciente o inconscientemente) es en general presentada a los alumnos en su forma más acabada; o sea, como un lenguaje formal y autosuficiente; que esta presentación de la misma como una manipulación rigurosa y exacta de reglas y símbolos oportunamente convenidos y ‘divorciados´ de todo ´significado´ es una de las razones de la crisis en el aprendizaje de la Matemática. Hecho que se agrava cuando en el intento (válido pero erróneo) de “facilitar” el aprendizaje, procedemos a reemplazar las expresiones o símbolos “exactos” por expresiones o giros del lenguaje vulgar que, aunque ambiguos, creemos que “ayudan” a entender. Este tipo de “simplificaciones” derivan en obstáculo pedagógicos sólo detectables en el tiempo. Al respecto presentamos un análisis de un caso que ejemplifica lo antedicho.

<u>Actividad</u>*: dada las siguientes *ecuaciones*, analizar si definen *función* con fórmula *y = f(x).

(a) $2x + 5y = 4$
(b) $4x^2 - 2y = 8$
(c) $3x - y^2 = 0$
(d) $x.y = 1$
(e) $y = 3$
(f) $x^2.y = 1$
(g) $x^2.y^2 = 1$
(h) $x^2. + y^2 = 1$
(i) $x.(y+1)= y$
(j) $5x - \frac{3}{x} = 2$

<u>Objetivos</u>: evaluar la identificación de ***relaciones funcionales*** (tema ´nuevo´) a la vez que diagnosticar el nivel de conocimiento en cuanto al tema ecuaciones (tema ´viejo´, sustento del nuevo).

<u>Resultados</u>: alrededor del 65 % de los 350 alumnos cometieron errores de igual o parecida naturaleza al que mostramos a continuación. O sea, no se trata de unos pocos “casos aislados”.

Un error típico: $4x - y^2 = 0 \rightarrow y^2 = 4x \rightarrow y = \sqrt{3x}$ [nunca decimos, *la inversa de la potencia es la raíz*?]

Una resolución: $5x - \frac{3}{x} = 2$ $\rightarrow 5x - 3 = 2x \rightarrow 5x - 2x = 3 \rightarrow 3x = 3 \rightarrow \mathbf{x = 0}$ [hace: **x = 3 – 3**]

Para confrontar al alumno con su error le pedimos que verificara su respuesta; y él, *verificó!!; o sea,* probó que x = 0 era solución aun cuando para ello tuviera que, ***¡ dividir por cero! .***

P (profesor) - *¿Cómo concluís de 3x = 3 que x = 0?*
A (alumno) - *la x´s tiene un 3 al lado ...., y para que me quede sola tengo que ´**<u>quitar ese 3</u>**´ , así que......., le resto 3 y queda cero.*
(***cabe preguntarnos:****¿con qué asociamos a veces la palabra ´restar´, quizás con ´quitar´?*)
P - *¿verificaste si x = 0 es solución?*
A - *no…, pero si x = 0 entonces 3/x = 3 y…..,*
P - *¿ 3/ 0 te da 3 ?*
A - *si, por que si a 3 no lo divido (0 = ´nada´) …., queda 3.¡ Ah!!*
P - *¿Qué?* (¡¡Se dio cuenta!!)
A - *... entonces, también 5.0 me da 5 y, ahí está , 5 -3 = 2 , y ¡ 0 es solución !.*
P - *¿te parece? Empecemos de nuevo……*

Estos resultados nos llevan al punto inicial del proceso, es decir a ***cómo enseñamos el tema ecuaciones****.* Al respecto, es muy probable que, más tarde o más temprano nos encontremos diciendo:

☞ *Tenemos que lograr que quede la x´s sola de un lado y los términos sin x´s del otro lado.*

Y esto parece ser lo único que al alumno le *´queda´,* pues es evidentemente que no le *´queda´* idea respecto a los ***procesos*** involucrados, a la existencia de manipulaciones válidas y no válidas, ni al *por qué* de ellas.
Estimamos que esta presentación de la Matemática como una ciencia acabada por un lado y por otro (por imperio de las circunstancias) como una colección de "*reglas prácticas*" plagadas de "*saltos deductivos*", es lo que termina por producir el fenómeno observado y caracterizado por Duval en sus trabajos. Este sostiene que una de las principales causas de las dificultades en el aprendizaje de la Matemática estaría en la "***identificación***" que los alumnos hacen entre la "***representación del objeto***" y el "***objeto en sí***". Muchos son ya los investigadores que al igual que Duval, plantean que los procesos mentales se facilitan y sostienen a partir de una constante interacción entre la aprehensión o producción de representaciones semióticas y la aprehensión de conceptos que estas a su vez posibilitan. Particularmente en la Matemática esta interacción es esencial en cuanto a la *movilización* de los distintos sistemas de representación en los que el objeto matemático admite ser representado, así como también para pasar de un registro a otro (del algebraico al geométrico, del coloquial al algebraico, etc). De hecho el aprendizaje puede prácticamente identificarse con la habilidad para pasar de un registro de representación a otro. Esta última interpretación de la Matemática comporta un cambio de orden *epistemológico* en cuanto al *saber matemático en sí*; cambio que tiene su correlato en las investigaciones en Educación Matemática y que se puede apreciar en las últimas teorías o investigaciones producidas en este campo, en los últimos años: "Teoría de las Funciones Semióticas en Didáctica de la Matemática" (Godino, 2003); "Semiosis y pensamiento humano" (Duval, 1995, 1998), "La escolarización del saber y de las relaciones" (D´Amore, 2000).
Otros investigadores se han dedicado al análisis del "***lenguaje algebraico***". Kucheman (1980) estudia en más de 3000 estudiantes de entre 13 y 15 años la forma en que éstos interpretan los *símbolos literale*s. Entre otras cuestiones, observa la interpretación de la "*letra como objeto"*: se considera la letra como el nombre abreviado de un objeto o como un objeto en sí mismo. (O sea, observa lo mismo que Duval).
A este respecto en una investigación realizada en la Facultad de Ciencias Bioquímicas y Farmacéuticas de la U.N.R. para indagar habilidades lingüísticas obtuvimos iguales conclusiones:

TEST: constituidos por ejercicios de distinta naturaleza, al efecto de indagar las siguientes habilidades:

1. Traducción de expresiones coloquiales a simbólicas y viceversa.
2. Identificación de equivalencias entre distintas expresiones simbólicas (dominio de la sintaxis algebraica)
3. Interpretación de variables en el contexto de un problema (sentido del símbolo o semántica algebraica)
4. Interpretación cuantitativa y cualitativa de gráficas.

El siguiente es el problema propuesto en el ítem 3.
Sobre una mesa se apoyan cuadernos y libros. Hay el mismo número de cuadernos que de libros. Cada cuaderno tiene 300 hojas y cada libro 700 hojas. Se sabe que en total, sobre la mesa, hay 8000 hojas.

Para *hallar la cantidad de hojas de "cuaderno" que hay sobre la mesa*, alguien procede a:

Paso 1) ´representar´ parte de los datos en una ´ecuación´: $300\ C + 700\ L = 8000$
Paso 2) reconocer la existencia de otro dato: $C = L$;
reformular con este dato la ecuación: $300\ C + 700\ C = 8000$ (1)
Paso 3) ´operar´ en el 1er miembro de la ecuación (1): $1000\ C = 8000 \rightarrow C = 8$
Paso 4) *´traducir´ el resultado obtenido al lenguaje usual, dar la respuesta:*

Rta: sobre la mesa hay 8 hojas de cuaderno.

Se informa que el problema está mal resuelto, que hay un error en uno de los pasos.
Se pide que indique:

- *En que paso se encuentra el error.*
- *¿Cuál es?*

Resultados de la aplicación del test:

- sólo el **48%** de los alumnos reconoce que el error está en la respuesta;
- entre quienes reconocen donde está el error, sólo el **30%** identifica correctamente la razón del mismo;
- entre el **70%** de los alumnos que identifican mal la razón del error, la mayoría dice que la misma se encuentra en el Paso 2: igual cantidad de libros que de cuadernos : **C= L**.

Su argumento es: ¡¡ CUADERNOS Y LIBROS NO SON LA MISMA COSA !!.

Concluimos así:

- ☞ *que el aprendizaje de la Matemática está íntimamente ligado a la capacidad lingüística matemática que se tenga;*
- ☞ *que la palabra trasmitida sin apoyo ´concreto´ se transforma en verbalismo hueco (aún en Matemática, ciencia abstracta por antonomasia;*
- ☞ *que ésta será efectiva solo cuando de alguna manera esté unida a la acción o tenga ´huellas´ de ella; cuando nazca de una necesidad del espíritu*;
- ☞ *que el desafío a superar hoy es una Matemática concebida y presentada como una manipulación perfecta de reglas y símbolos rigurosamente establecidos pero divorciados de cualquier significado; o sea, que el desafío es: ´RESTABLECER EL SIGNIFICADO´.*

Para lograr esto nuestro objetivo debería ser:

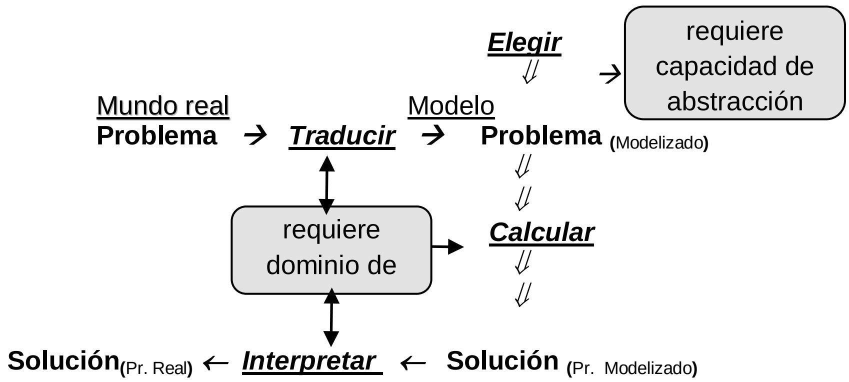
- *no producir una completa separación entre la forma y la acción,*
- *lograr que el signo o expresión literal contenga, cuanto menos, marcas o huellas de todos los elementos que participan o han participado en la abstracción de la cosa; huellas cuya función sería la de posibilitar al lector el reencuentro con la cosa en sí, la asimilación ´significativa´ del esquema o signo que la representa, la operatividad del mismo.*

O sea, si el objetivo es lograr que el alumno no solo pueda *´repetir´* un esquema de razonamiento, sino que también pueda reeditar el mismo, identificar su oportunidad de uso, adaptarlo a otros contextos, trabajar con la analogía, la metáfora, etc; pero ,y sobre todo, pueda resignificar el objeto matemático en situaciones nuevas, adaptarlo o transferirlo a tros contextos***, no debemos quedarnos sólo en la sintaxis del lenguaje matemático, sino incursionar en el costado semántico y pragmático del mismo.***

PROPUESTA

La evolución de la Matemática ha llevado *siglos*; la cuestión es: ¿podemos en la enseñanza de esta ciencia “saltar” las distintas etapas que ella ha ido transitando, trabajar directamente con el “producto” acabado, puro y exacto de este largo proceso en el que se fueron gestando los objetos que ella estudia?

La disyuntiva no es sencilla: si no damos sentido a lo que enseñamos esto se transforma en un conjunto de reglas "*sin sentido*", pero, si ponemos la realidad al servicio de la Matemática corremos el riesgo de generar obstáculos de todo tipo: pedagógicos, cognitivos, epistemológicos.
El lenguaje matemático, en su larga evolución, fue independizándose cada vez más del lenguaje usual, hasta llegar a la forma actual, teniendo siempre esta transformación su motor fundamental en la *resolución de problemas*, la cual está en el corazón mismo del origen de la Matemática. Así, y dado que *natural y normalmente han sido los problemas quienes han dado origen a los objetos matemáticos; que, por lo tanto y en última instancia, son ellos los que han dotado de sentido a dichos objetos y por ende a los símbolos que los representan,* entendemos que este hecho señalaría un camino a seguir: ***la enseñanza basada en la resolución de problemas***.
Cuando resolvemos un problema, en general aplicamos los cuatro pasos siguientes:

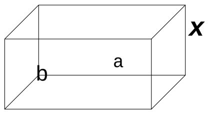


Podríamos decir así que la Matemática cumple una función metalingüística al posibilitar el modelado y manipulación de gran cantidad de datos condensados en unos pocos símbolos. Esta función metalingüística es la que a partir de un objeto relativamente concreto permite ´formular´ un problema referido al mismo, avanzar luego hasta un nivel de abstracción conveniente donde a través de una adecuada manipulación simbólica se obtenga una solución,regresar luego al objeto inicial, aplicar a este el resultado obtenido.

<u>Por ejemplo</u>: tomemos una situación problemática que de ordinario se trabaja en los cursos de Cálculo pero que podría trabajarse sin los recursos del Cálculo, con alumnos del nivel medio:
"Dada una hoja de papel (A_4), a partir de recortar un cuadrado de lado "x" en cada esquina de la hoja y doblar las "solapas" que sobresalen, construir una caja sin tapa cuyo volumen sea máximo".

* *Leída la consigna, el primer problema que aparece es de orden <u>semántico</u>: qué entender; luego, ya entendido lo que se pide, el segundo problema es de orden <u>pragmático</u>: cómo reescribir la situación de forma tal que se pueda ´operar´ sobre ella, obtener ´respuestas´.*
* *Aclarada la consigna, se puede proponer que construyan la tal caja, que lo hagan en grupo. Esta es una actividad muy fructífera debido al intercambio oral al que da lugar en relación al valor de x´s. Nunca falta quien sostenga que el volumen es siempre el mismo debido a que las hojas de partida son iguales. Así, de manera natural, se plantea la necesidad de <u>formular</u> y <u>contrastar</u> una hipótesis, la cual se le pide que "escriban" en el lenguaje coloquial y en sus propios términos. Por ej, esto podría quedar escrito así:*

<u>Hipótesis</u>: *"todas las cajas hechas con hojas A_4 tienen igual volumen".*



* *Contrastar la hipótesis los llevará a la necesidad de* <u>calcular</u> *(el volumen), por ende a la necesidad de traducir su hipótesis en términos más* operativos*. Para hacer esto deberán puntualizar que tipo de cuerpo es la caja que han construido, cómo se calcula el volumen de dicho cuerpo, quién es* x, *etc; en definitiva, deberán expresar el problema en términos de una* ecuación (*ó* fórmula)*:*

$$V = a.\ b.\ x \quad \text{(volumen del paralelepípedo)}$$

* *En este punto resulta importante discutir cómo se va a organizar la acción al efecto de investigar la validez de la hipótesis. Aquí debemos insistir en la conveniencia de trabajar en forma sistemática, con método. Acordar que en este caso conviene disponer los resultados de la investigación en una "tabla" de cuatro columnas (*x,*a , b, V); proponer luego que, por grupo, vayan completando la tabla para distintos valores de* x*. Seguramente a poco de trabajar, los alumnos descubrirán que a y b se pueden escribir como* función de x, $a = 29.7 - 2x$ *y* $b = 21 - 2x$, *y de este modo agilizar los cálculos.* Concluido el trabajo verificarán que la hipótesis era falsa a la vez que, en forma " concreta", observarán que el <u>volumen es función de x´s</u> .
* *Reconocido que* V = V(x), *que la tabla es* una forma *de representar la función (la* "numérica"*) la cual sólo proporciona el volumen de las cajas construidas en el aula, surgirá naturalmente la cuestión de si no habrá* otra forma *de representar la función la cual permita obtener el volumen de todos las cajas construidas en el aula,* más todas las cajas que se pudieran construir*.*
  Se llegará así a la representación analítica *(*la fórmula*) de la función :*

$$V(x) = (29.7 - 2x).\ (21 - 2x).\ x$$

Y esta construcción no sólo implica haber avanzado en el nivel de abstracción, sino que además, y por ello mismo, constituye una construcción metalingüística en cuanto permite referirse a una característica (el volumen) <u>de la caja representada en el dibujo</u>, la que a su vez <u>representa la caja real</u>.
Es decir, en la expresión $V(x) = (29.7 - 2x) . (21-2x). x$ está condensado un "nido de representaciones sucesivas", cada una a un nivel superior de abstracción en referencia a la anterior.La apropiada manipulación sintáctica y/o gráfica de esta expresión permite tanto el estudio local como global del comportamiento del volumen de la caja para distintas alturas sin la desventaja de las limitaciones físicas impuestas por el tiempo necesario para construir la caja, por los intrumentos de medición, etc.Vemos entonces como la lengua materna y la Matemática están llamadas a jugar un papel central en la educación, pues mientras la primera es el lugar común a todos, la segunda es la que permite avanzar en la construcción de objetos cada vez más y más complejos aunque, y paradójicamente, más simples de manipular.
Concluimos así que una forma de trabajar en la línea propuesta sería a través del planteo y resolución de cuestiones que involucren procesos de modelización y/o simulación de fenómenos naturales. Que esto, además de mostrar la potencia de la Matemática en la resolución de problemas (motivar), posibilitaría el uso de las nuevas tecnologías no sólo como auxiliares de cálculo sino también como auxiliares didácticos, promoviendo tanto los procesos de visualización y análisis como la vinculación de las diferentes representaciones de un objeto matemático: icónica, gráfica, numérica, analítica y verbal.Se facilitaría también el abordaje de uno de los grandes obstáculos del aprendizaje de conceptos matemáticos "la conversión congruente entre registros de representación" (en el sentido de Duval (1999)). Esto favorecería la asimilación significativa del concepto involucrado en la resolución del problema a la vez que trabajar el costado pragmático del lenguaje matemático.

Según y acorde la propia experiencia en los cursos ordinarios, la Enseñanza basada en la Resolución de Problemas proporciona una estrategia efectiva a los objetivos propuestos. Es decir, a través de esta estrategia se logra efectivamente que el acento no esté puesto en el *objeto matemático* en sí, sino en la *actividad a realizar para su aprehensión*; fundamentalmente, la misma permite trabajar en contextos argumentativos donde los actores reproducen prácticas donde se combinan la *percepción de la realidad y la experimentación situada con la argumentación matemática*.
Por último estimamos que estamos en un lugar de privilegio para combatir la crisis que nos envuelve, que sin dudas esto requiere el apoyo de la "institución" pues todo cambio es el emergente de un sistema de prácticas, no puede lograrse en forma individual.

Referencias Bibliográficas

Álvarez, W., Belgrano, D., Herrera, G., Lacués, E. y Pagano, M. (2002). *Actividades de enseñanza que pueden apoyar el tránsito de los estudiantes desde la secundaria a la universidad*. En Crespo Crespo, C.(Eds.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa: Vol. 15, tomo2, 1327- 1331. Buenos Aires: Grupo Editorial Iberoamérica.

D´Amore,B.(2000).La escolarización del saber y de las relaciones: Los efectos sobre el *aprendizaje* de las Matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 13, 81-87.

Duval, R. (1995). *Semiosi y pensamiento humano* (Trad. 1999). Colombia: Grupo de Educación Matemática, GEM.

Duval, R. (1998).Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Educación Matemática, 2,* 173-201.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Obtenida el 5 de Noviembre de 2007 de:
http://pat-thompson.net/PDFversions/1999Duval.pdf .

Godino, J. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas en Didáctica de la Matemática*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Kucheman, D. (1980). Children understanding of integers*, Mathematics in School, 9*, 31-32**.**

Vigotsky, L. (1996). *Pensamiento y Lenguaje.* México: Quinto Sol.