La geometría de las operaciones

José O. Araujo - Mauro Natale

0.1 Introducción

Este artículo de divulgación matemática tiene por objeto contribuir a la enseñanza de la geometría del plano, desde un punto de vista, que si bien es bien conocido, no pareciera estar suficientemente difundido.
Básicamente, se trata de conectar la geometría del plano con la estructura algebraica de los números complejos, identificando objetos geométricos con expresiones algebraicas para encontrar luego, el paralelismo que algunos resultados producen, entre su concepción geométrica y su interpretación algebraica.
Es oportuno destacar las ventajas que puede dar el hecho de encarar los problemas desde más de un punto de vista, en el material aquí presentado, nos centraremos en las interpretaciones geométricas de las operaciones o, más generalmente, de ciertas expresiones algebraicas, con el objeto de dar un nuevo enfoque a una serie de problemas de la geometría del plano.
El material incluye una primera parte introductoria, donde se transcriben algunos conceptos geométricos al lenguaje algebraico. En una segunda parte se presentan algunos problemas y teoremas de la geometría del plano, con soluciones y demostraciones obtenidas desde el enfoque propuesto.
Lectura de estas notas requiere una cierta familiaridad con los conceptos básicos de la geometría del plano, de los números complejos y de álgebra lineal elemental.

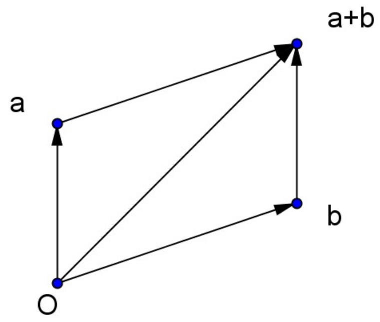
1 El enfoque algebraico

1.1 Las operaciones

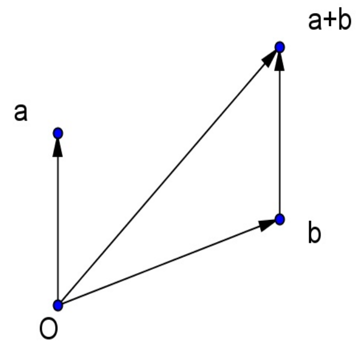
Como es bien conocido, los números complejos pueden ser identificados con los segmentos en el plano que parten desde un punto fijado como origen y que usualmente se indica con 0.

Suma
La suma se obtiene siguiendo la regla del paralelogramo. Naturalmente que la

suma de dos números complejos puede ser realizada con el uso de regla y compás.

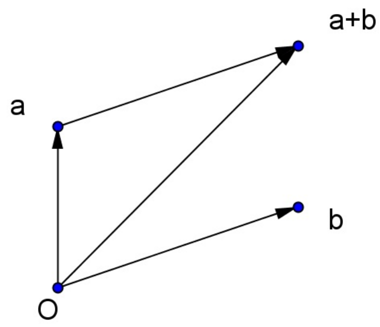


La suma se asocia con la traslación en el plano, podríamos pensar que $a + b$ se obtiene desplazando el segmento b a lo largo del segmento a, y en tal caso, $b+a$ se obtendrá desplazando el segmento a a lo largo del segmento b. Las figuras a continuación ilustran la propiedad conmutativa de la suma.

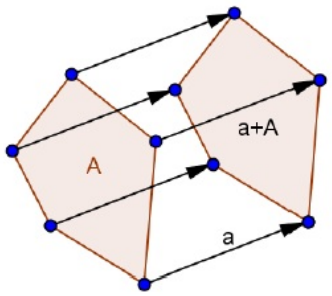


Por otra parte, si $\mathcal{A}$ es un subconjunto del plano, ponemos:

$$a + \mathcal{A} = \{a + x : x \in \mathcal{A}\}$$

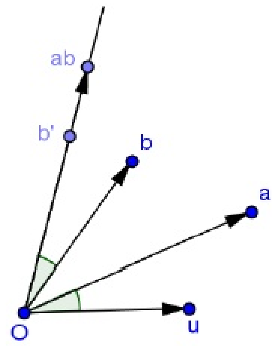


El conjunto $a+\mathcal{A}$ se obtiene trasladando el conjunto $\mathcal{A}$ en la dirección, el sentido y la longitud de recorrido dada por el número a.

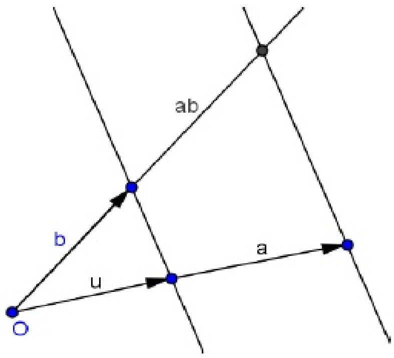


Producto
Para realizar el producto, además de haber fijado el origen, es necesario fijar un segmento unidad, distinto de 0, que indicaremos con 1. Luego de esto, el producto se obtiene como combinación de dos transformaciones del plano, estas son una rotación y una homotecia. En este caso, el producto ab puede pensarse como rotar alrededor del origen el segmento b y luego dilatarlo o contraerlo, todo esto, conforme con el argumento y la longitud que indique el número a. Más precisamente, se hace rotar el plano, en sentido antihorario, hasta que 1 alcance una posición sobre la semirrecta $\overrightarrow{0a}$, por esta rotación, el número b

pasó al número b'. Ahora, sobre la semirrecta $\overrightarrow{0b'}$ se marca un segmento cuya longitud es el producto de las longitudes de a y b. También el producto puede ser realizado haciendo uso de regla y compás.

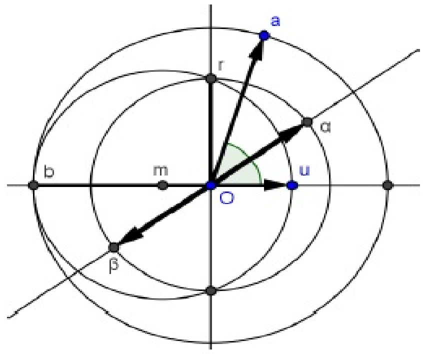


En la figura, u es la unidad. El producto de las longitudes de a y b se obtiene con el teorema de Thales;

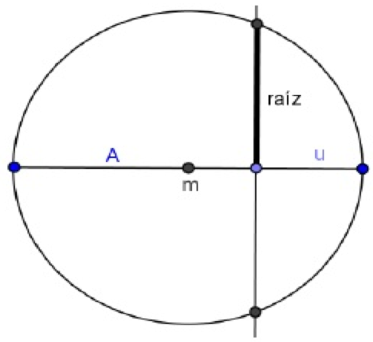


Aquí, a y b denotan las longitudes.

Raíz cuadrada
Es necesario fijar una unidad, tanto para encontrar el argumento como para encontrar el módulo de la raíz cuadrada de un número complejo.



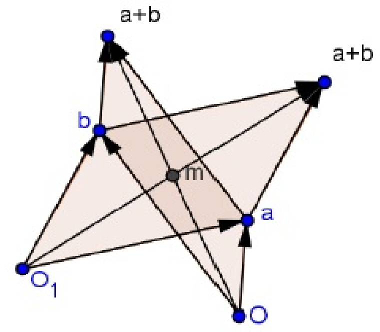
La figura ilustra la construcción con regla y compás de las raíces cuadradas del número complejo a. Las raíces α y β se encuentran en la bisectriz del ángulo $u0a$, donde u es la unidad. Para determinar el módulo de α y β se usa la potencia de un punto respecto de una circunferencia, tomando un segmento de longitud $|a| + 1$ como diámetro de una circunferencia se obtiene $\sqrt{|a|}$ como lo indica la figura:



Aquí, u es la unidad, A es $|a|$ y el segmento destacado en la cuerda perpendicular al diámetro es $\sqrt{A}$.

Las Medias

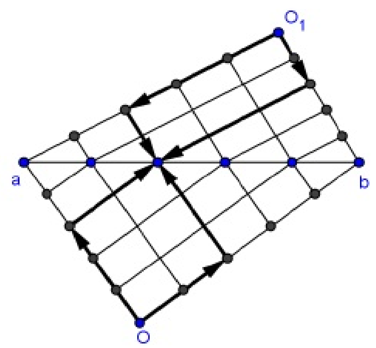
Media Aritmética. Es oportuno observar que algunas expresiones algebraicas no dependen de la posición donde se encuentra el origen, por ejemplo el promedio o la media aritmética de dos números, no depende del origen.



En la figura se observa que si bien la suma depende del origen, O_1, O, el promedio $m = \frac{a+b}{2}$ permanece como el punto medio del segmento ab.
Otras operaciones independientes de la posición del origen son por ejemplo;

$$\frac{1}{5}a + \frac{4}{5}b, \frac{2}{5}a + \frac{3}{5}b, \frac{3}{5}a + \frac{2}{5}b, \frac{4}{5}a + \frac{1}{5}b$$

En la figura a continuación, se ilustra el caso de $\frac{3}{5}a + \frac{2}{5}b$



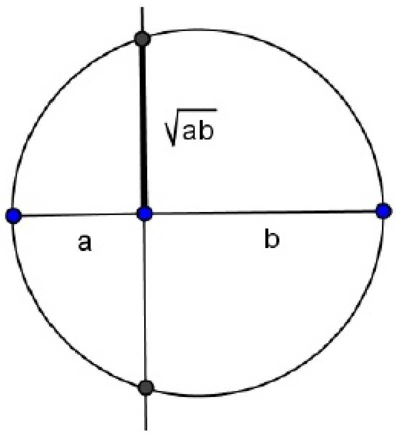
La independencia del origen puede establecerse con el teorema de Thales.

Veremos luego que:

$$\lambda a + (1 - \lambda)\, b \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

es la ecuación paramétrica de la recta que pasa por a y b.

Media Geométrica. Para construir, tanto el producto como la raíz cuadrada, es necesario haber fijado el origen y la unidad. Sin embargo, es posible construir la media geométrica entre dos números reales positivos en forma independiente del origen y unidad fijados. En la figura:



la circunferencia tiene como diámetro $a+b$, se trazó la cuerda perpendicular a este diámetro por el punto que lo separa en segmentos de longitudes a y b respectivamente, usando el concepto de potencia en este punto respecto de la circunferencia, se justifica que el segmento marcado es $\sqrt{ab}$.
Como resultado adicional se obtiene la conocida desigualdad:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

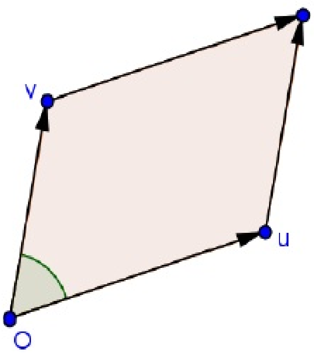
es decir:
La media geométrica es menor o igual que la media aritmética y vale la igualdad si, y sólo si, $a = b$.
En la figura se ve que $\sqrt{ab}$ no supera al radio de la circunferencia, el cual es $\frac{a+b}{2}$, y que puede ser igual sólo en el caso que $a = b$.

El Baricentro
Como es bien sabido, el baricentro de un triángulo divide a las medianas en una proporción $2:1$, donde el segmento mayor es el que contiene a un vértice del triángulo. Si a, b, c son los vértices de un triángulo, la mediana por a, tiene en su otro extremo a $\frac{b+c}{2}$. El baricentro g del triángulo, está a $\frac{1}{3}$ de mediana de $\frac{b+c}{2}$ y a $\frac{2}{3}$ de mediana de a, luego su expresión es:

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}\left(\frac{b+c}{2}\right) \\ &= \frac{a+b+c}{3} \end{aligned}$$

1.2 Áreas y determinantes

Área Signada. En el paralelogramo con vértices $0, u, v, u+v$ como indica la figura:



el área es igual a:

$$|u|\,|v|\sin(\alpha)$$

donde α es el ángulo comprendido entre u y v, es decir:

$$\begin{aligned} \overline{u}v &= |u|\,|v|\left(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\right) \\ u\overline{v} &= |u|\,|v|\left(\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)\right) \end{aligned}$$

de donde el área del paralelogramo es:

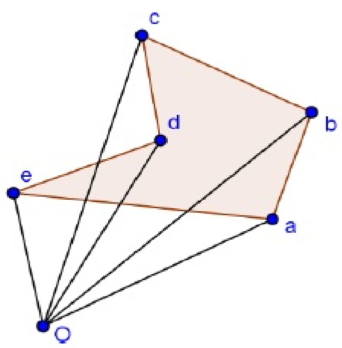
$$\frac{\overline{u}v - u\overline{v}}{2i} = |u|\,|v|\sin(\alpha)$$

Sin embargo, la expresión en el miembro de la izquierda no es simétrica respecto de u, v, por el contrario es antisimétrica. Esta expresión coincide con el área del paralelogramo si el argumento de u es menor que el argumento de v, en caso contrario, es -1 por el valor del área. En realidad la expresión obtenida da el valor de la llamada *área orientada* o *área signada.*

Consideremos el triángulo con vértices $0, u, v$ y notemos con $[u, v]$ su área signada, se tiene:

$$[u, v] = \frac{\overline{u}v - u\overline{v}}{4i}$$

La ventaja de usar el área signada es que resulta práctica a la hora de buscar expresiones para el área signada de polígonos simples. En efecto, dado el polígono simple con vértices a, b, c, d, e como se ilustra en la figura:



su área signada está dada por:

$$[a, b] + [b, c] + [c, d] + [d, e] + [e, a]$$

es decir la suma de las áreas signadas de los triángulos que forma cada lado del polígono con el origen, en nuestro ejemplo las áreas $[c, d]$ y $[e, a]$ son negativas y las demás positivas.

En particular, el área signada de un triángulo con vértices a, b, c es:

$$[a, b] + [b, c] + [c, a] = \frac{1}{4i}\left(\overline{a}b - a\overline{b} + \overline{b}c - b\overline{c} + \overline{c}a - c\overline{a}\right)$$

lo que puede ponerse como:

$$\frac{1}{4i}\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Colinealidad. De la fórmula precedente para el área de un triángulo, se obtiene el siguiente criterio;
Los puntos a, b, c son colineales si, y sólo si:

$$\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \tag{2}$$

La ecuación (2) equivale a:

$$\det\begin{bmatrix} b-a & c-a \\ \overline{b-a} & \overline{c-a} \end{bmatrix} = 0$$

o bien:

$$\frac{\overline{b-a}}{\overline{c-a}} = \frac{b-a}{c-a} \tag{3}$$

es decir, $\frac{b-a}{c-a}$ es un número real.

Ecuación de la recta
Por dos puntos. A partir de la expresión del área signada para el triángulo, es claro que el lugar geométrico dado por los puntos z que cumplen la condición:

$$\det\begin{bmatrix} a & b & z \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{z} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \tag{4}$$

es justamente la recta que pasa por los puntos a y b cuando $a \neq b$, dado que son los z tales que el triángulo con vértices a, b, z es de área cero.
Observar que los puntos de la forma:

$$z = \lambda a + (1-\lambda)\, b \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

son puntos en la recta que pasa por a y b, dado que éstos verifican la ecuación (4). Por otra parte, si z verifica la ecuación (4) y $a \neq b$, de la dependencia lineal de las columnas se tiene que existen números complejos α y β tales que:

$$\begin{aligned} z &= \alpha a + \beta b \\ \overline{z} &= \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} \\ 1 &= \alpha + \beta \end{aligned}$$

o bien:

$$\begin{aligned} z &= \alpha a + \beta b \\ z &= \overline{\alpha} a + \overline{\beta} b \\ 1 &= \alpha + \beta \end{aligned}$$

de donde:

$$z = \frac{\alpha + \overline{\alpha}}{2} a + \frac{\beta + \overline{\beta}}{2} b$$

de este modo, tomando $\lambda = \frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}$, se tiene $\lambda \in \mathbb{R}$, $1 - \lambda = \frac{\beta+\overline{\beta}}{2}$ y además:

$$z = \lambda a + (1 - \lambda)\, b$$

y encontramos la ecuación paramétrica de la recta que pasa por a y b.

Paralela. Si buscamos la recta paralela al segmento ab que pasa por el punto c, ponemos:

$$\det \begin{bmatrix} a & b & z \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{z} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

De este modo, estamos hablando de los puntos z tales que el triángulo con vértices a, b, z tiene área signada constante igual a el área signada del triángulo con vértices a, b, c. Notar que si se pidiera área constante, en lugar de área signada, el lugar geométrico consiste en dos rectas paralelas al segmento ab, una en cada semiplano que determina la prolongación de este segmento.
La ecuación precedente puede reducirse a:

$$\det \begin{bmatrix} a & b & z - c \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{z - c} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \tag{5}$$

Perpendicular. Si ahora se trata de la recta perpendicular al segmento ab que pasa por el punto c, consideramos el segmento con vértices ia, ib, que es justamente perpendicular a ab. Entonces, la ecuación buscada es:

$$\det \begin{bmatrix} ia & ib & z-c \\ -i\overline{a} & -i\overline{b} & \overline{z-c} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

o equivalentemente:

$$\det \begin{bmatrix} a & b & z-c \\ -\overline{a} & -\overline{b} & \overline{z-c} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Ahora, si a la segunda fila de la matriz le sumamos la tercera fila multiplicada por $\overline{a+b}$ el determinante no cambia y la ecuación queda:

$$\det \begin{bmatrix} a & b & z-c \\ \overline{b} & \overline{a} & \overline{z-c} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \tag{6}$$

Mediatriz. Como caso especial, sumando el promedio de las columnas 1 y 2 a la columna 3 de la matriz en el caso precedente, tenemos la ecuación de la mediatriz del segmento ab, esta es:

$$\det \begin{bmatrix} a & b & z \\ \overline{b} & \overline{a} & \overline{z} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \tag{7}$$

1.3 La función lineal y la conjugación

Todos los movimientos del plano, o *isometrías directas*, pueden ser realizados con operaciones de números complejos, como así también las *similitudes directas.* Para esto, es suficiente considerar las funciones lineales:

$$\sigma(z) = \alpha z + \beta \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \tag{8}$$

con este tipo de funciones podemos realizar, además de traslaciones ($\alpha = 1$), rotaciones ($|\alpha| = 1, \beta = 0$) y homotecias ($\alpha \in \mathbb{R}, \beta = 0$), todos los movimientos que se obtienen por combinación de las transformaciones mencionadas, son las llamadas *similitudes directas.*

Por otra parte, las *similitudes indirectas* como por ejemplo las reflexiones, son las transformaciones que pueden ser obtenidas con funciones de la forma:

$$\tau(z) = \alpha\overline{z} + \beta \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \tag{9}$$

donde la barra indica el complejo conjugado.
Notemos que una reflexión particular, respecto del eje real o recta que contiene la unidad fijada, es la conjugación. Componiendo las similitudes directas con la conjugación, obtenemos todas las similitudes indirectas lo que justifica la afirmación hecha en (9).

Semejanza de Polígonos
Consideremos un polígono convexo $\mathcal{P}$ con vértices $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Un polígono convexo $\mathcal{Q}$ es semejante a $\mathcal{P}$ si, y sólo si, existe una similitud φ que transforma $\mathcal{P}$ en $\mathcal{Q}$. En particular, los vértices de $\mathcal{Q}$ estarán dados por:

$$\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$$

Si la similitud es directa, digamos:

$$\varphi(z) = \alpha z + \beta$$

los vértices $b_1, b_2, \ldots, b_n$ de $\mathcal{Q}$ pueden pensarse como las coordenadas del vector:

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n) = \alpha(a_1, a_2, \ldots, a_n) + \beta(1, 1, \ldots, 1)$$

en consecuencia, la matriz dada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

debe tener rango igual a 2, o equivalentemente:

$$\det\left(A^t\overline{A}\right) = 0 \tag{10}$$

donde ${}^t\overline{A}$ es la matriz transpuesta conjugada de A.
En otro caso, si la similitud φ fuera indirecta, se cumple la misma condición en (10) para la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \overline{b}_1 & \overline{b}_2 & \cdots & \overline{b}_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, los números complejos $1, i, -1, -i$ y $0, 1, 1+i, i$ son los vértices de cuadrados y están recorridos con la misma orientación, entonces, según (10), debe ser:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ 0 & 1 & 1+i & i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -i & 1 & 1 \\ -1 & 1+i & 1 \\ i & -i & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

En efecto, el determinante es igual a:

$$\det\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2-2i & 2+2i & 2+2i \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 0$$

dado que la primer columna más el doble de la segunda es igual a la tercera. Especialmente simple es el criterio de semejanza para triángulos, ya que en este caso la condición de semejanza de los triángulos con vértices a, b, c y u, v, w surgidas de las ecuaciones en (10), se reducen a:

$$\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \tag{11}$$

o bien:

$$\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ \overline{u} & \overline{v} & \overline{w} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \tag{12}$$

Observar que los triángulos con vértices u, v, w, o w, u, v o v, w, u son los mismos recorridos con la misma orientación, mientras que los triángulos con vértices v, u, w, o w, v, u o u, w, v son los mismos con la orientación opuesta al caso anterior y pueden asociarse al triángulo con vértices $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$, o $\overline{w}, \overline{u}, \overline{v}$ o $\overline{v}, \overline{w}, \overline{u}$. Cuando estén dados los sucesivos vértices de los triángulos cuya semejanza se desea establecer, será necesario revisar las identidades en (11) y (12) para las 3 lecturas de los vértices en cada orientación. Lo mismo ocurre para polígonos, es necesario revisar las identidades para n lecturas en cada orientación. Sin embargo, en el caso de polígonos regulares, todas las lecturas con una misma orientación, arrojarán el mismo resultado en (11) y (12), por lo que sólo hay que considerar una lectura por orientación en el análisis de la semejanza.

Triángulos equiláteros

En virtud de lo establecido en (11), se tiene que un triángulo con vértices a, b, c es equilátero y está orientado positivamente (en el sentido de antihorario) si, y sólo si:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\overline{w} \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

donde $w = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, es decir:

$$c + wa + \overline{w}b = 0 \tag{13}$$

Si el triángulo equilátero estuviera orientado negativamente la ecuación será:

$$c + \overline{w}a + wb = 0 \tag{14}$$

Si sólo quisiéramos saber si el triángulo con vértices a, b, c es equilátero o no, entonces el criterio es:

$$(c + wa + \overline{w}b)(c + \overline{w}a + wb) = 0$$

o sea:

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \tag{15}$$

Esta última identidad da un condición necesaria y suficiente para que el triángulo con vértices a, b, c sea equilátero, independientemente de la orientación.
Otras identidades son consecuencia de las anteriores, por ejemplo si a, b, c son los vértices de un triángulo equilátero, entonces:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

puede establecerse esta identidad multiplicando miembro a miembro identidades obtenidas como variaciones de (13) al rotar los vértices del triángulo.
También pueden obtenerse otros triángulos equiláteros a partir de a, b, c, por ejemplo, elevando al cuadrado los miembros en (13), se concluye que el triángulo con vértices $a^2 + 2bc, b^2 + 2ca, c^2 + 2ab$ es equilátero.

1.4 Las transformaciones

A continuación describimos en términos de operaciones con números complejos, donde se incluye la conjugación, las transformaciones del plano que con frecuencia se usan en la geometría del mismo. Este es el caso de las isometrías básicas y la proyección ortogonal.

Traslación. La traslación es la isometría más simple y su expresión es de la forma:

$$\mu(z) = z + \beta$$

donde β es un número complejo dado.

Rotación. La rotación alrededor del punto p y ángulo θ puede obtenerse como:

$$\begin{aligned} \sigma(z) &= w(z-p) + p \\ &= wz + (1-w)\,p \end{aligned} \tag{16}$$

aquí $w = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Los pasos dados son: trasladamos para que p quede en el origen y z en $z-p$, rotamos $z-p$ alrededor del origen barriendo un ángulo de amplitud θ obteniendo $w(z-p)$, finalmente trasladamos para que el segmento $0, w(z-p)$ se transforme en el segmento $p, w(z-p)+p$.

Reflexión. La reflexión respecto de la recta que pasa por ab, se obtiene usando la conjugación

$$\begin{aligned} \tau(z) &= \frac{(b-a)}{|b-a|}\overline{\frac{\overline{b-a}}{|b-a|}(z-a)} + a \\ &= \frac{(b-a)}{\overline{(b-a)}}\overline{(z-a)} + a \\ &= \frac{(b-a)}{\overline{(b-a)}}\overline{z} + \frac{\overline{b}a - b\overline{a}}{\overline{(b-a)}} \end{aligned} \tag{17}$$

En este caso los movimientos son; trasladar para que ab quede en $0\,(b-a)$, z queda en $z-a$, girar para que $0\,(b-a)$ quede sobre la semirrecta de los reales positivos dada por la unidad, conjugar luego girar y trasladar realizando los movimientos inversos para retornar el segmento ab a su posición original.

Proyección ortogonal. Dado que la proyección ortogonal de un punto z sobre la recta que pasa por ab, es el promedio entre z y la reflexión de z respecto de dicha recta, se tiene:

$$\pi(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{(b-a)}{\overline{(b-a)}}\overline{z} + \frac{\overline{b}a - b\overline{a}}{\overline{(b-a)}}\right) \tag{18}$$

Si la recta pasa por el origen, por ejemplo $a = 0$ se tiene:

$$\tau(z) = \frac{b}{\overline{b}}\overline{z}$$

y en este caso la proyección es

$$\pi(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{b}{\overline{b}}\overline{z}\right)$$

1.5 La circunferencia unitaria

Como puede apreciarse, en la mayoría de las expresiones consideradas intervienen los números complejos y sus conjugados. Si estos números se tomaran en la circunferencia unitaria, en general, estas expresiones tienen formas más reducidas a partir de la identidad $\overline{z} = z^{-1}$ válida para los elementos de la circunferencia unitaria.

Recta por ab. La ecuación de la recta que pasa por la cuerda ab es:

$$z + ab\overline{z} = a + b \tag{19}$$

En efecto, la ecuación de la recta que pasa por la cuerda ab, según (4), es:

$$\det\begin{bmatrix} a & b & z \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \overline{z} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

o bien:

$$\det\begin{bmatrix} a-b & b & z \\ b-a & a & ab\overline{z} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

es decir:

$$\det\begin{bmatrix} -1 & b & z \\ 1 & a & ab\overline{z} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

y desarrollando este determinante por la última columna se obtiene (19).

Reflexión. Teniendo en cuenta que si $|a| = |b| = 1$, entonces:

$$\overline{b-a} = \frac{a-b}{ab}$$

De (17) se sigue que la reflexión respecto de la recta por la cuerda ab está dada por:

$$\begin{aligned} \tau(z) &= -ab(\overline{z} - \overline{a}) + a \\ &= a + b - ab\overline{z} \end{aligned} \tag{20}$$

Proyección. La proyección ortogonal $\pi(z)$ del número z sobre la recta que pasa

por la cuerda ab está dada por el promedio entre z y su reflexión $\tau(z)$, por (19) esto es:

$$\pi(z) = \frac{1}{2}(z + a + b - ab\overline{z}) \tag{21}$$

Cuerdas. La intersección de las prolongaciones de las cuerdas ab y cd en la

circunferencia unitaria es:

$$\frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd} \tag{22}$$

En efecto, según (19), basta resolver el sistema:

$$\begin{cases} z + ab\overline{z} = a + b \\ z + cd\overline{z} = c + d \end{cases}$$

Recta Tangente. La recta tangente a la circunferencia unitaria en el punto a,

es la recta perpendicular al segmento $0a$ que pasa por a. De (7) se tiene que su ecuación está dada por:

$$\overline{a}z + a\overline{z} = 2 \tag{23}$$

Podemos además encontrar la intersección de dos rectas tangentes resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} \overline{a}z + a\overline{z} = 2 \\ \overline{b}z + b\overline{z} = 2 \end{cases}$$

para obtener:

$$z = \frac{2(b-a)}{\overline{a}b - a\overline{b}} = \frac{2ab}{a+b} \tag{24}$$

Ortocentro. El ortocentro del triángulo abc inscripto en la circunferencia unitaria es;

$$a+b+c \tag{25}$$

En efecto, teniendo en cuenta la ecuación en (6), de la recta perpendicular al segmento ab que pasa por c:

$$\det\begin{bmatrix} a & b & z-c \\ \overline{b} & \overline{a} & \overline{z-c} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Tomando $z = a+b+c$ se tiene:

$$\begin{aligned} \det\begin{bmatrix} a & b & a+b \\ \overline{b} & \overline{a} & \overline{a+b} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} &= \det\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ \overline{b} & \overline{a} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= -2\left(a\overline{a} - b\overline{b}\right) = 0 \end{aligned}$$

Del mismo modo se comprueba que $a+b+c$ está en las rectas perpendiculares a los segmentos bc y ca que pasan por a y b respectivamente.

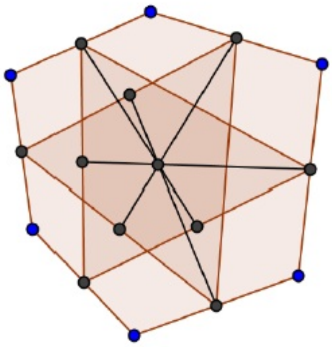
2 Problemas y teoremas relacionados

A continuación se presentan algunos problemas y resultados clásicos de la geometría del plano que pueden ser encarados desde el enfoque propuesto en estas notas. No obstante, es conveniente recalcar que si bien algunos problemas pueden ser resueltos con cierta elegancia, no siempre será oportuno tratar la geometría del plano desde la estructura de los números complejos.

2.1 Problemas

1. Sean a, b, c, d, e, f los puntos medios de los sucesivos lados de un hexágono convexo. Mostrar que los triángulos a, c, e y b, d, f tienen el mismo baricentro.
Solución: Sean A, B, C, D, E, F los sucesivos vértices del hexágono tales que:

$$a = \frac{A+B}{2}, b = \frac{B+C}{2}, c = \frac{C+D}{2}, d = \frac{D+E}{2}, e = \frac{E+F}{2}, f = \frac{F+A}{2}$$

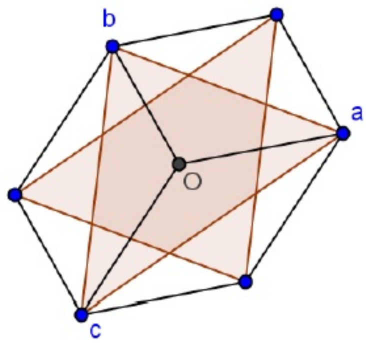


Ahora, los baricentros indicados son ambos iguales a:

$$\frac{A+B+C+D+E+F}{6}$$

2. Un triángulo de área δ se rota $180°$ alrededor de su baricentro. Hallar el área de los hexágonos dados por la intersección entre el triángulo y su imagen por la rotación, y por los vértices de ambos triángulos.

Solución. En la figura a continuación, elegimos como origen el baricentro del triángulo a, b, c, es decir que $a+b+c=0$.



Cuando c gira $180°$ queda en $-c = a+b$, algo similar ocurre con a y b. De modo que el hexágono externo es unión de 3 paralelogramos, como se ve en la figura, éstos son:

$$O, a, a+b, b \quad O, b, b+c, c \quad \text{y} \quad O, c, c+a, a$$

También puede verse que el triángulo a, b, c es unión los 3 triángulos:

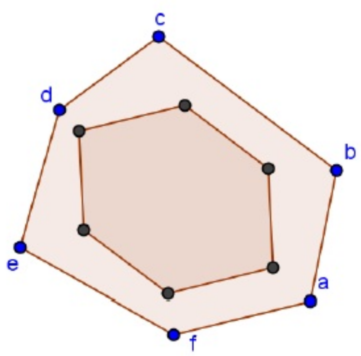
$$O, a, b \quad O, b, c \quad \text{y} \quad O, c, a$$

Así encontramos que el área del hexágono externo es igual a 2δ.
El triángulo a, b, c se descompone como unión del hexágono interior y 3 triángulos. Cada uno de estos 3 triángulos es semejante a a, b, c, pues se obtienen trazando una paralela en a, b, c a uno de sus lados. Por otra parte, una mediana en estos 3 triángulos es igual a $\frac{1}{3}$ de la mediana correspondiente en a, b, c, de modo que cada uno de estos 3 triángulos tiene área igual a $\frac{\delta}{9}$. En consecuencia el área del hexágono interno es:

$$\delta - 3\frac{\delta}{9} = \frac{2}{3}\delta$$

3. En el hexágono convexo a, b, c, d, e, f, se considera el hexágono $\mathcal{P}$ cuyos sucesivos vértices son los baricentros de los triángulos a, b, c, b, c, d, c, d, e, d, e, f, e, f, a, f, a, b. Mostrar que en $\mathcal{P}$ los lados opuestos son paralelos y de igual longitud.

Solución. La siguiente figura ilustra la situación,

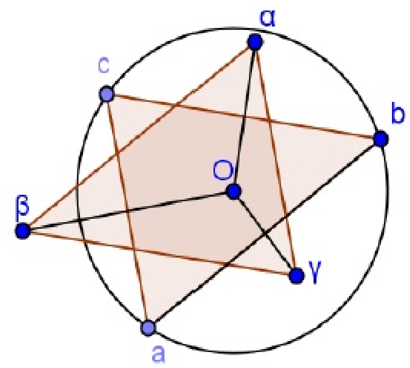


Un par de lados opuestos tiene por vértice a $\frac{a+b+c}{3}$, $\frac{b+c+d}{3}$ y a $\frac{e+f+a}{3}$, $\frac{d+e+f}{3}$, la diferencia entre estos pares de vértices es:

$$\frac{a-d}{3}$$

en ambos casos, lo que significa que son segmentos paralelos cuya longitud es la tercera parte de la longitud de la diagonal ad. Para el análisis de los pares restantes, se procede en forma similar.

4.El circuncentro O de un triángulo abc se refleja respecto de las rectas que determinan los lados del triángulo, como indica la figura.



i) Mostrar que las rectas por $a\alpha, b\beta$ y $c\gamma$ *son concurrentes.*
ii) Mostrar que los triángulos $\alpha\beta\gamma$ y abc son congruentes.

Solución. i) Fijemos O como el cero de los números complejos. Como $O\alpha$ está en la mediatriz de bc, resulta $\alpha = b + c$ y por el mismo razonamiento con los demás vértices se tiene:

$$\alpha = b + c, \quad \beta = c + a, \quad \gamma = a + b$$

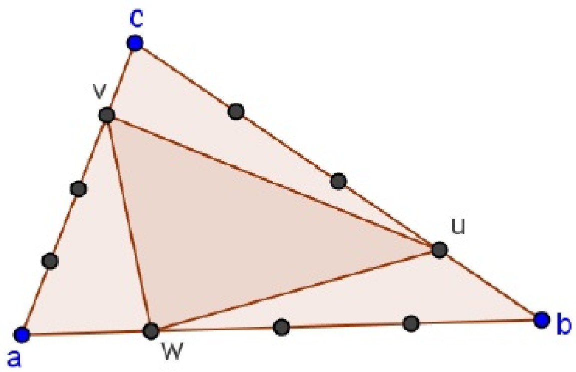
Ahora es claro que coinciden los tres promedios:

$$\frac{a+\alpha}{2} = \frac{b+\beta}{2} = \frac{c+\gamma}{2}$$

es decir las rectas concurren en este punto.

ii) El punto de concurrencia m es el punto medio de los segmentos $a\alpha, b\beta$ y $c\gamma$, de modo que una rotación de $180°$ alrededor de m intercambia los triángulos abc y $\alpha\beta\gamma$, de donde sigue la congruencia de dichos triángulos.

5. Los puntos u, v, w en los lados del triángulo a, b, c respectivamente, dividen a los lados en una misma relación, como se ilustra en la figura:



es decir:

$$\frac{|au|}{|ub|} = \frac{|bv|}{|vc|} = \frac{|cw|}{|wa|} = r$$

Determinar la relación entre las áreas de estos triángulos.

Solución. El punto u en el segmento a, b puede ser expresado como:

$$u = \lambda a + (1 - \lambda)\, b \quad \text{con} \quad b \in \mathbb{R}, 0 \leq b \leq 1$$

En este caso debe ser:

$$\frac{|au|}{|ub|} = \frac{1 - \lambda}{\lambda} = r$$

o bien:

$$\lambda = \frac{1}{r + 1}$$

Para este valor de λ se tiene:

$$u = \lambda a + (1 - \lambda)\, b, v = \lambda b + (1 - \lambda)\, c, w = \lambda c + (1 - \lambda)\, a$$

El área del triángulo u, v, w está dada por:

$$\frac{1}{4i}\det\begin{bmatrix} u & v & w \\ \overline{u} & \overline{v} & \overline{w} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

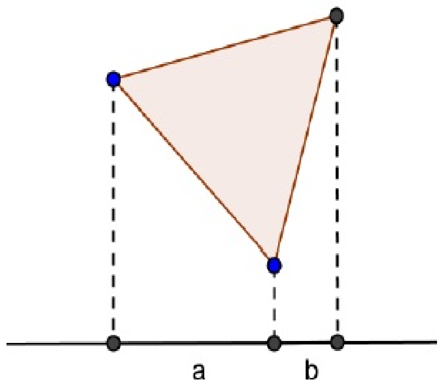
Usando propiedades de determinantes, resulta:

$$\det\begin{bmatrix} u & v & w \\ \overline{u} & \overline{v} & \overline{w} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \left(3\lambda^2 - 3\lambda + 1\right)\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

de modo que el área de u, v, w sobre el área de a, b, c es:

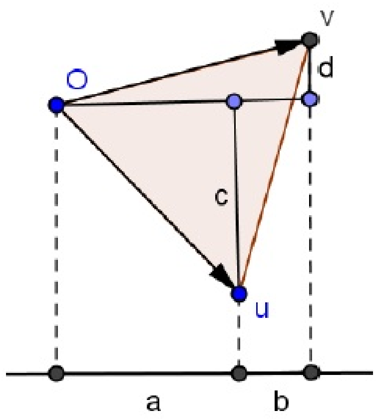
$$\frac{r^2 - r + 1}{(r+1)^2}$$

5. En la figura:



el triángulo es equilátero y se conocen las longitudes a y b de los segmentos determinados por las proyecciones ortogonales de los vértices del triángulo sobre una recta. Hallar el área del triángulo.

Solución. Ponemos $0, u, v$ como en la figura: Por tratarse de un triángulo



equilátero, según (13), debe ser:

$$0 + uw + vw^2 = 0$$

o sea

$$v = -w^2 u = -w^2 (a + ci)$$

por otra parte

$$v = a + b + di$$

se tiene

$$\begin{aligned} a + b + di &= \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \right) (a + ci) \\ &= \frac{a - \sqrt{3}c}{2} + \frac{c + a\sqrt{3}}{2} i \end{aligned}$$

luego

$$c = -\frac{\sqrt{3}}{3} (2b + a)$$

Así, el cuadrado de la longitud del lado del triángulo resulta ser:

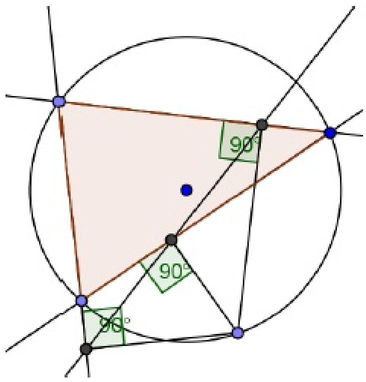
$$\begin{aligned} a^2 + c^2 &= a^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} (2b + a) \right)^2 \\ &= \frac{4}{3} \left(a^2 + ab + b^2 \right) \end{aligned}$$

y el área será

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)$$

2.2 Teoremas

Teorema. *La recta de Simson*
Las proyecciones de un punto en una circunferencia, sobre las prolongaciones de los lados de un triángulo inscripto en la circunferencia, están en una recta.



Demostración. Suponemos la circunferencia de radio 1 y centro 0. Según (21), las proyecciones del punto z sobre las prolongaciones de los lados ab, bc y ca son:

$$\tfrac{1}{2}\left(z+a+b-ab\overline{z}\right), \quad \tfrac{1}{2}\left(z+b+c-bc\overline{z}\right), \quad \tfrac{1}{2}\left(z+c+a-ca\overline{z}\right)$$

Si multiplicamos por -2 y trasladamos estos puntos sumándole $a+b+c+z$, obtenemos, con el mismo valor de colinealidad, los puntos:

$$c+ab\overline{z} \quad a+bc\overline{z} \quad b+ac\overline{z}$$

Con el objeto de usar el criterio en (2), analizamos el determinante de la matriz:

$$\begin{bmatrix} c+ab\overline{z} & a+bc\overline{z} & b+ac\overline{z} \\ \overline{c+ab\overline{z}} & \overline{a+bc\overline{z}} & \overline{b+ca\overline{z}} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

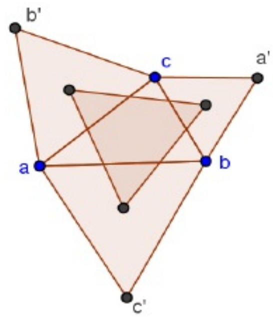
Ahora, teniendo en cuenta que a, b, c, z son complejos unitarios

$$\overline{c+ab\overline{z}} = \overline{abc}z\,(ab\overline{z}+c)$$
$$\overline{a+bc\overline{z}} = \overline{abc}z\,(bc\overline{z}+a)$$
$$\overline{b+ca\overline{z}} = \overline{abc}z\,(ac\overline{z}+b)$$

es decir la segunda fila en la matriz, coincide con la primera multiplicada por $\overline{abc}z$, y así, el determinante es igual a cero.

Teorema de Napoleón

Si sobre los lados de un triángulo, en la región externa al triángulo, se dibujan triángulos equiláteros, los baricentros de estos triángulos forman un triángulo equilátero.



Demostración. A partir del criterio en (13) aplicado a los triángulos equiláteros construidos se tiene:

$$a' + wc + \overline{w}b = 0$$
$$c + wb' + \overline{w}a = 0$$
$$b + wa + \overline{w}c' = 0$$

Sumando miembro a miembro estas identidades y dividiendo por 3, resulta:

$$\frac{a'+b+c}{3} + w\left(\frac{b'+a+c}{3}\right) + \overline{w}\left(\frac{c'+b+a}{3}\right) = 0$$

de manera que los 3 baricentros son los vértices de un triángulo equilátero.

Teorema de Ptolomeo-Euler
En u*n cuadrilátero convexo el producto de sus diagonales es menor o igual que la suma de los productos de sus lados opuestos, y vale la igualdad si, y sólo si, el cuadrilátero puede ser inscripto en una circunferencia*

Demostración. Dados los números complejos a, b, c, d, se cumple la siguiente igualdad, la que se comprueba sin mayor dificultad.

$$(a-c)(b-d) = (a-b)(c-d) + (a-d)(b-c)$$

Por la propiedad triangular del módulo se tiene:

$$|a-c|\,|b-d| \leq |a-b|\,|c-d| + |a-d|\,|b-c|$$

y vale la igualdad sólo cuando

$$\frac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(b-c)} \in R_{>0}$$

o bien

$$\frac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(c-b)} \in R_{<0}$$

o sea

$$\arg\frac{(a-b)}{(a-d)} + \arg\frac{(c-d)}{(c-b)} \equiv \pi$$

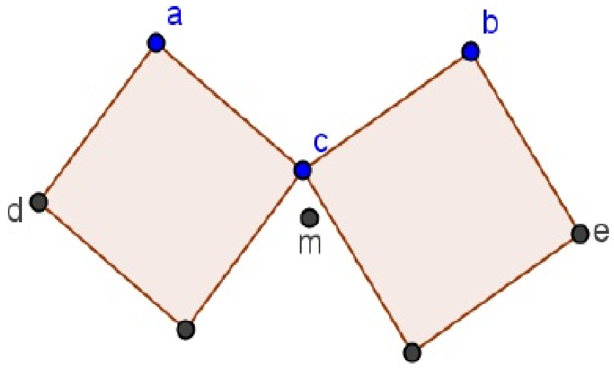
pero esto es, que los ángulos en los vértices opuestos a y c son suplementarios. Pero una condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero convexo sea inscriptible es precisamente que los ángulos en vértices opuestos sean suplementarios.

Teorema de Bottema, (*o de los piratas)*
En dos cuadrados con un vértice fijo cada uno, a y b, y un vértice común c, el punto medio entre los vértices vecinos de a y b no depende de c.

En la figura m es el punto medio del segmento de.

Demostración. Los vértices vecinos son

$$i(c-b)+b \quad -i(c-a)+a$$



de donde resulta:

$$m = \frac{i\,(c-b)+b+-i\,(c-a)+a}{2} = \frac{(1+i)\,a+(1-i)\,b}{2}$$

Nota: Asociado con este teorema hay un famoso problema que dice: Un grupo de piratas llega a una isla para enterrar un tesoro. En la isla hay una piedra y dos palmeras. El capitán manda a dos piratas que partiendo desde la piedra caminen hasta una palmera cada uno, al llegar a las palmeras giren 90° *y caminen la misma distancia que separa la piedra de la palmera en cada caso. El capitán enterró el tesoro en el punto medio de las posiciones alcanzadas por los piratas.*

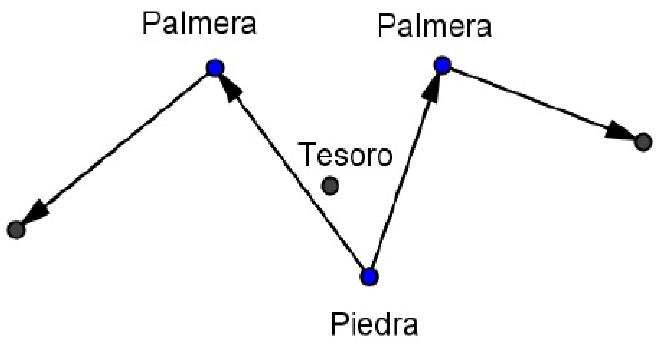
Al tiempo, los piratas vuelven por el tesoro y encuentran las palmeras, pero la piedra ya no estaba. Afortunadamente, el capitán conocía el teorema de Bottema y en pocos minutos señaló el lugar exacto donde estaba enterrado el tesoro.

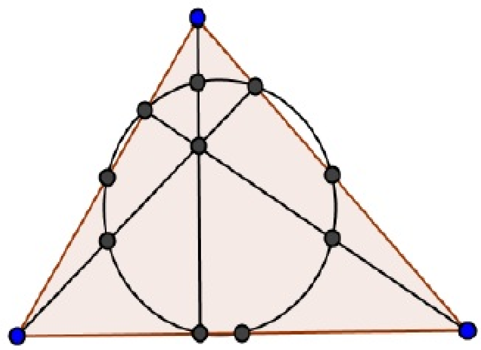
Teorema de los nueve puntos, o del círdulo de Euler

Los pies de las alturas de un triángulo, los puntos medios de sus lados y los puntos medios entre el ortocentro y los vértices del triángulo, están todos en una misma circunferencia.

Demostración.

Suponemos el triángulo abc inscripto en la circunferencia unitaria. Acorde con la expresión en (25), el ortocentro es $a+b+c$.





Dado que el circuncentro es 0, el punto medio entre el ortocentro y el circuncentro es

$$\frac{a+b+c}{2}$$

Los puntos medios de los lados son:

$$\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}$$

Según (21), los pies de las alturas son:

$$\frac{a+b+c-ab\overline{c}}{2}, \frac{a+b+c-bc\overline{a}}{2}, \frac{a+b+c-ca\overline{b}}{2}$$

y los puntos medios entre el ortocentro y los vértices son:

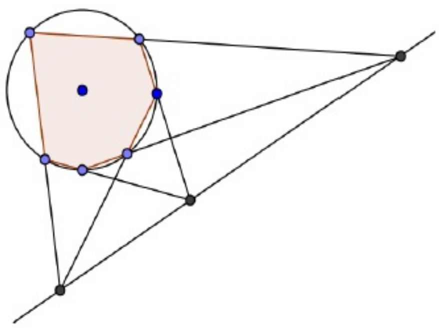
$$\frac{2a+b+c}{2}, \frac{a+2b+c}{2}, \frac{a+b+2c}{2}$$

Encontramos que los 9 puntos son:

$$\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}$$
$$\frac{a+b+c-ab\bar{c}}{2}, \frac{a+b+c-bc\bar{a}}{2}, \frac{a+b+c-ca\bar{b}}{2}$$
$$\frac{2a+b+c}{2}, \frac{a+2b+c}{2}, \frac{a+b+2c}{2}$$

y todos estos está a distancia $\frac{1}{2}$ del punto $\frac{a+b+c}{2}$.

Teorema de Pascal
Si un hexágono puede inscribirse en un círculo, las intersecciones de las prolongaciones de pares de lados opuestos están alineadas.



Demostración. Supongamos el hexágono $abcdef$ inscripto en la circunferencia unitaria. Acorde con (22), las intersecciones son:

$$\frac{abd+abe-ade-bde}{ab-de}, \frac{bce-bfe-cfe+bcf}{bc-ef}, \frac{acd-acf-adf+cdf}{cd-fa}$$

Estos puntos están alineados si, y sólo si, los correspondientes conjugados lo están. Los conjugados son:

$$\frac{a+b-d-e}{ab-de}, \frac{b+c-e-f}{bc-ef}, \frac{c+d-f-a}{cd-fa}$$

Según (3), estos puntos están alineados si, y sólo si, el número:

$$\frac{\frac{b+c-e-f}{bc-ef}-\frac{a+b-d-e}{ab-de}}{\frac{c+d-f-a}{cd-fa}-\frac{a+b-d-e}{ab-de}}=\frac{(b-e)(af-cd)}{(a-d)(bc-ef)}$$

es real. Calculando el conjugado de este número, se tiene:

$$\begin{aligned}\overline{\frac{(b-e)(af-af)}{(a-d)(bc-ef)}} &= \frac{\frac{e-b}{eb}\frac{cd-af}{afcd}}{\frac{d-a}{ad}\frac{ef-bc}{bcef}} \\ &= \frac{(b-e)(af-cd)}{(a-d)(bc-ef)}\end{aligned}$$

Es decir, este número es real y los 3 puntos están alineados.

Bibliografía

Andreescu,T., Andrica, D., *Complex Numbers from A To... Z*, Birkhauser, 2005.
Eves, H., *Estudio de las Geometrías.* Tomos I y II. Editorial Uteha, 1963.
Hahn, Liang-Shin, *Complex Numbers & Geometry*, MAA, 1994.
Puig Adam, P. *Curso de Geometría Métrica.* Tomos I y II. Gomez Puig Ediciones,1979.
Schwerdtfeger, H., *Geometry of Complex Numbers*, Dover, New York, 1979
Yaglom, M. *Complex Numbers in Geometry*, Academic Press, 1968.

Páginas con material relacionado

http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/lico/Libros/complejos.pdf
www.math.ust.hk/excalibur/v9_n1.pdf
www.imomath.com

Dr. José O. Araujo. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.
E-mail: araujo@exa.unicen.edu.ar

Prof. Natale Mauro. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.
E-mail: mnatale@exa.unicen.edu.ar