UNA PROPUESTA DIDÁCTICA: INTRODUCCIÓN AL TEOREMA DE PITÁGORAS

Norma Martyniuk - Silvia Caronia
Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales. UNAM. País: Argentina
norma_martyniuk@yahoo.com.ar- silca_100@fibertel.com.ar

Nivel educativo: Medio
Palabras Clave: Análisis Didáctico, Desigualdad Triangular, Ternas Pitagóricas, Teorema de Pitágoras

RESUMEN

Se presenta una propuesta didáctica como inicio de estudio para la enseñanza del Teorema de Pitágoras, teniendo en cuenta que el mismo debe tener sentido, tanto en lo instrumental para resolver diferentes problemas como también en lo formativo como conocimiento geométrico. Se plantea la problemática originaria y su aplicación práctica en diferentes situaciones, destacándose el motivo del surgimiento de la relación entre los lados de un triángulo rectángulo, dando sentido a su estudio como contenido matemático.

INTRODUCCIÓN

Para iniciar el estudio sobre el tema, Teorema de Pitágoras, en la enseñanza en 1er año de la CBS, se proponen actividades que permitan a los alumnos en relación a sus conocimientos previos, enfrentarse a ellas, favoreciendo: la observación, los cuestionamientos, la formulación de hipótesis, la reflexión sobre sus producciones, la modificación o elaboración de nuevos conocimientos, la obtención de conclusiones lógicas de las proposiciones y datos a su alcance en un trabajo interactivo y participativo.
Con soporte a lo mencionado precedentemente y en las indagaciones y análisis de propuestas de enseñanza en los libros de textos, se presenta una actividad introductoria que destaca el motivo del surgimiento de la relación entre los lados de un triángulo rectángulo, dando sentido a su estudio como contenido matemático.
La actividad se encuentra enmarcada en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Guy Brousseau, la cual propone un modelo de enseñanza, que consiste en un proceso centrado en la producción de conocimiento matemático en el ámbito escolar. La misma constituye una herramienta para conocer, explicar y ofrecer elementos para intervenir en la realidad de las clases de matemática.
Brousseau (1986) otorga en su teoría un rol fundamental a la situación didáctica, situación construida intencionalmente, y la define como:"el conjunto de relaciones establecidas explícita o implícitamente entre un alumno o grupos de alumnos, un cierto medio y un sistema educativo con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución.", es decir, es aquella que se elabora con el fin que el alumno aprenda un determinado saber.
Dentro de la Teoría de las Situaciones, existen distintos momentos, en el caso del docente el rol fundamental se centra en la Devolución e Institucionalización.
La devolución, la define Brousseau (1988), como: "*el acto por el cual el maestro hace aceptar al alumno la responsabilidad de una situación de aprendizaje o de un problema y acepta el mismo las consecuencias de esta transferencia*". Este proceso se desarrolla durante toda la situación adidáctica, el docente debe orientar al alumno para establecer la relación entre alumno - problema, sin la comunicación del conocimiento en juego. De esta manera, se modeliza a la devolución como un proceso realizado, dentro de una negociación que forma parte del Contrato Didáctico.
La Institucionalización, que es la parte complementaria a la Devolución, Brousseau (1988) lo define como "*la consideración oficial del objeto de enseñanza por parte del alumno, y del*

aprendizaje del alumno por parte del docente". El docente es el encargado de dar un estatus cultural a las producciones del alumno, es decir, definir las relaciones que pueden tener con el saber cultural o científico y con el proyecto didáctico.

ACTIVIDAD PROPUESTA

Materiales: Regla, lápiz, compás, semicírculo, cuerdas y hojas.

Objetivos de la actividad

- Establecer la relación que deben cumplir tres segmentos, para la construcción de triángulos.
- Interpretar y comprender cuáles son las condiciones para que una terna de números enteros positivos se corresponda con los lados de un triángulo rectángulo. (Recíproco del Teorema de Pitágoras).
- Valorar la importancia del Teorema de Pitágoras como herramienta útil para resolver diferentes situaciones.

Primer momento

En el inicio de la clase el docente hará un trabajo grupal, para llevarlos a la reflexión sobre cuestiones que deberán quedar acordadas previamente al trabajo con las ternas.
Se pretende evidenciar que conociendo tres segmentos cualesquiera no siempre es posible construir un triángulo, para ello los lados deberán cumplir una condición: la desigualdad triangular.

Consigna 1

Si tuvieras tres palitos de **cualquier medida**, ¿siempre es posible construir un triángulo?

Los alumnos podrán comprobar lo solicitado y dar respuesta a la pregunta, valiéndose de palitos, biromes, lápices, etc. Si llegaran a trabajar solo con objetos de las mismas medidas les será en principio, evidente construir el triángulo.
Podrán contestar que es posible. El docente ante la respuesta deberá advertir que el pedido es con "cualquier medida", es decir no necesariamente iguales por lo que preguntará:

Si ahora tuvieran palitos de diferentes longitudes ¿también podremos asegurar que se formará un triángulo?

Para responder a la pregunta los estudiantes pueden ir observando en qué casos se formarán los triángulos y en qué caso no.

Podrán decir:
- "depende de la medida", hay casos en donde "no se cierra".
- "Con dos largos y uno corto se forma"
- "Con tres iguales también"

O puede suceder que, como los elementos son de cualesquiera longitudes, los alumnos "acomoden" a su "conveniencia" y continúen sosteniendo que siempre se forma un triángulo. Ante esta posibilidad el docente deja en suspenso esta respuesta para discutir después de la segunda consigna y llegar a los acuerdos pertinentes.

Consigna 2

Cecilia y José están realizando la tarea y discutiendo la posibilidad de construir triángulos con las siguientes medidas de segmentos: a) 3 , 5 y 3 ; b) 5 , 12 , 13 c) 3 ; 1 y 1 ; d) 6 , 8 y 10 .
Cecilia asegura que es posible en todos los casos y José dice que no. ¿Quién tiene razón y por qué?

En el primer momento ha sido un trabajo limitado en la posibilidad de formar los triángulos independientes del valor de los segmentos, solo se podía decir "más largo", "más corto", "distintos", "iguales". En esta parte se comienza el trabajo con medidas de segmentos concretos y se pretende evidenciar que conociendo tres segmentos cualesquiera no siempre es posible construir un triángulo, para ello los lados deberán cumplir una condición: la desigualdad triangular.
Además se quiere destacar la representación de los lados de un triángulo como ternas de longitudes de segmentos para un trabajo posterior.

Luego de la ***puesta en común*** se deberán llegar a los siguientes acuerdos:
- No cualesquiera tres segmentos forman un triángulo.
- Tres segmentos forman un triángulo si se cumple que: "cada uno de ellos es menor a la suma de los otros dos y mayor que su diferencia"
- Cuando indiquemos por ejemplo (3, 6, 7), nos referiremos a las longitudes de los lados de un triángulo. Esta notación recibe el nombre de ternas y 3, 6 y 7 son las componentes de dicha terna.

Segundo momento

Se formarán grupos de 3 o 4 alumnos. En cada caso se les pedirá que registren los procedimientos, como también las justificaciones en una hoja.
Cada grupo expondrá sus respuestas en una puesta en común. Habrá espacios de trabajo colectivo con la puesta en común, donde las producciones serán acordadas conjuntamente. Luego el docente hará un resumen de todo lo trabajado y pactado en la clase, para pasar a la formalidad del conocimiento a través de la institucionalización.

Consigna 3

Los "tiradores de cuerdas" en el antiguo Egipto eran los encargados de subdividir las tierras, luego de la crecida anual del río Nilo. Utilizaban un procedimiento para trazar ángulos rectos. Se habían dado cuenta que, tomando una cuerda a la que hacían 12 nudos, todos a la misma distancia, la estiraban entre estacas colocadas en sus nudos de junturas y encontraban un ángulo recto (es decir consideraban como unidad de medida la distancia entre dos nudos, que correspondía a un segmento de recta, y los vértices del triángulo estaban en uno de sus nudos).

Traten de averiguar cómo se las arreglaban para construir ángulos rectos con estas cuerdas.

En esta consigna se le entregará a cada grupo las cuerdas con 12 nudos unidas en sus extremos. A partir de la misma con movimientos diferentes hallarán la forma de obtener un ángulo recto, en este caso existe una sola ubicación de cada nudo para formar el ángulo requerido.

De esta manera se pretende que los alumnos comprueben que para encontrar el ángulo recto, necesariamente sus lados se corresponden a un triángulo rectángulo, teniendo en cuenta la unidad utilizada de la distancia entre nudos: 3, 4 y 5. Al efectuar los movimientos correspondientes en la búsqueda “del ángulo” al ubicar los nudos, queda determinado un único triángulo rectángulo, ya que pueden formarse también otros triángulos al desplazar la cuerda, es por ello que el docente luego trabajará esta cuestión.

Luego de la ***puesta en común*** se llegarán a los siguientes acuerdos:
- con la cuerda de 12 nudos se puede construir un único triángulo rectángulo, aunque se ubique en distintas posiciones.
- Se halla un ángulo recto cuando se forma con la cuerda un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5.
- La terna (3, 4, 5) corresponde a los lados de un triángulo rectángulo. Siendo 3 y 4 los catetos y 5 la hipotenusa que pertenece al lado de mayor longitud.

Consigna 4

Los indios y los chinos utilizaban un procedimiento similar a los egipcios para obtener ángulos rectos, encontraron otros valores 8, 15 y 17 y también 9, 12 y 15. ¿José duda si es cierto que con esos valores se formaban ángulos rectos?. Lo ayudan a verificarlo.

En este caso la consigna apunta a destacar que existen otros valores además del analizado anteriormente, que permiten formar triángulos rectángulos.

Luego de la ***puesta en común*** se deberán llegar a los siguientes acuerdos:
- se puede verificar a través de la construcción que los valores dados forman triángulos rectángulos.
- La terna (9, 12,15) corresponde a un triángulo rectángulo.
- La terna (9,12,15) corresponde a los lados de un triángulo rectángulo, donde cada uno de ellos, es el triple de los segmentos que forman el triángulo rectángulo (3,4,5)
- A partir de ternas conocidas se puede obtener otras ternas multiplicando a cada elemento de la misma por un número entero positivo.

Trabajo colectivo

Luego de la puesta en común y de los acuerdos arribados el docente iniciará un diálogo:
-¿con cualquier terna de valores se pueden encontrar ángulos rectos?. El docente dejará un momento de reflexión.

Se espera que los alumnos observen lo trabajado anteriormente, para responder que: “no siempre se puede encontrar ángulos rectos”.
La inquietud que surgirá será: ¿cómo era posible que aseguren que las ternas de valores hallados permitan encontrar el ángulo recto?. El profesor manifestará que posiblemente éste era el cuestionamiento planteados por los griegos, quiénes intuían que podía existir una relación entre los valores de las ternas encontradas que aseguraban el ángulo recto y además que correspondía a los lados del triángulo rectángulo.

Los griegos tenían en claro que si armaban un triángulo rectángulo, obtenían el ángulo recto que buscaban, lo que se preguntaban entonces era ¿si el triángulo era rectángulo, qué relación había entre sus lados?.
Se deja un momento de reflexión para que los alumnos vuelvan a las ternas encontradas. Luego el docente dirá que: “los griegos hallaron la relación que existía entre sus lados,

elevando al cuadrado y sumando los lados de menor longitud (es decir los catetos) daba el lado de mayor longitud al cuadrado (es decir la hipotenusa).

El docente solicitará a la clase que prueben si se cumple la relación descubierta por los griegos con los valores de las ternas de las consignas anteriores que han dado triángulos rectángulos (3, 4, 5); (5, 12, 13), (6, 8, 10), (9, 12,15) y (8, 15, 17). Seguidamente expresará que "estas ternas" que cumplen la condición mencionada, se las llaman ***Ternas Pitagóricas***. Cada elemento de la terna se corresponde con las longitudes de los lados de triángulos rectángulos, lo cual fue comprobado por Pitágoras.

A la finalización del trabajo colectivo, se establecerán los siguientes acuerdos:
Si en una terna cualquiera se cumple que, la suma de los cuadrados de los dos primeros es igual al cuadrado del tercero, dichos valores se corresponden con las longitudes de los lados de triángulos rectángulos.
Las ternas (a, b, c) siendo a, b y c números enteros, que verifican la relación mencionada precedentemente, son llamadas ternas pitagóricas.
A continuación el profesor dirá: ¿con tres segmentos de longitud 1,5cm, 2cm y 2,5cm se podrá formar un triángulo rectángulo? ¿Cómo puedo saber?
Esta pregunta tiene la intención de que los alumnos reflexionen nuevamente sobre las longitudes, ahora valores decimales, probablemente los sorprenda en un primer momento, pero resultan cuestiones interesantes de tratar antes de dar la formalidad de la relación.

Institucionalización

El docente dará la formalidad al conocimiento que ha circulado, retomando primero todo lo discutido y acordado en cada consigna, para a continuación enunciar:

- "*Si en un triángulo, el cuadrado de uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, entonces el triángulo es rectángulo".*

Si en un triángulo de lados (a, b, c), se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$, el triángulo es rectángulo.

(Recíproco del Teorema de Pitágoras)

- La relación entre los lados del triángulo rectángulo nos conduce al Teorema de Pitágoras, el cual establece que: *"en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos".*

Dado un triángulo rectángulo de lados a, b y c, donde a y b son sus catetos y c la hipotenusa, se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$.

- A partir de este Teorema conociendo dos lados de un triángulo rectángulo es posible encontrar el tercer lado.

Actividades Complementarias

Las actividades propuestas están pensadas con la intención de continuar reflexionando a través de actividades que muestren la visión de instrumento útil del Teorema para la resolución de diferentes situaciones desde la matemática, como también de la vida cotidiana.

Analizar las siguientes situaciones presentadas, resolver y justificarlas:

1. Cecilia dispone de tres varillas de 6, 8 y 10 cm y dice que también puede construir un triángulo rectángulo, si aumenta 1 cm a cada lado del triángulo ¿Estás de acuerdo con esta afirmación?, ¿Por qué?
2. En un taller se construyó un marco cuadrado de 1,2 m de lado. A Pedro le parece que tiene alguna falla. ¿Cómo puede saber si está bien construido el marco? Justifique su respuesta.
3. Juan camina cada mañana 500 m hacia el sur y 100 m hacia el oeste para llegar a la escuela. Rosario camina 300 m hacia el norte y 300 hacia el oeste, y también llega a la escuela. Rosario dice que aunque caminan lo mismo, ella está más cerca de la escuela, ¿puede tener razón? (Sadovsky, Sessa, (2002)).
4. La diagonal de un cuadrado mide 50 cm. ¿Cuánto mide su lado?

5. El siguiente problema se encontró en un libro muy antiguo. Traten de resolverlo. Tengan en cuenta que "codos" es una medida de longitud.
   "Si un bambú de 32 codos de altura ha sido roto por el viento de tal manera que su extremo superior queda apoyado en el suelo a una distancia de 16 codos de su base, ¿a qué altura del suelo se rompió". (Bosani V, Carnelli G, Lamela C, Itzcovich H, 2006).

Conclusiones

- Comenzar la actividad discutiendo las condiciones que deben cumplir tres segmentos para que formen un triángulo, conducirá a la presentación de la *desigualdad triangular*, no solo como "una condición más de las que regularmente algunos autores presentan" sino como un momento oportuno para discutir el porqué, cualquier medida de tres segmentos no siempre permiten construir un triángulo. Se piensa que es necesario antes del inicio del Teorema de Pitágoras tener en claro estas relaciones entre lados, ya que, cuando se trabaje con el triángulo rectángulo deberán cumplirán otras más.

- Una visión diferente para abordar el estudio del Teorema de Pitágoras es comenzar a analizar la relación que deben cumplir los lados, para que el triángulo sea rectángulo. Iniciar el estudio del Recíproco del Teorema, permitirá comprender el porqué de la existencia de dicha relación y el motivo de su surgimiento, indagar, discutir, reflexionar sobre estas cuestiones dará sentido al estudio en cuestión.

Referencias Bibliográficas

- Berté, A (1999). *Matemática Dinámica*. Buenos Aires. Argentina. Red de Formación Docente Continua Ministerio de Cultura y Educación de la Nación. Publicación original: Mathématiques dynamique. Editions Nathan-Paris (1993).
- Bosani V.- Carnelli G.- Lamela C. - Itzcovich, H.; Novembre A. (2006). *Matemática 8.* Buenos Aires. Argentina. Editorial Tinta Fresca.
- Boyer, C. (1994). *Historia De La Matemática*. Madrid. España. Editorial Alianza. Versión española de Mariano Martínez Pérez.
- Brousseau, G. (1987): *Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática*. Irem. Francia. Traducción realizada con autorización del autor por: Fregona Dilma y Ortega

Facundo. Publicada por la Facultad de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad de Córdoba. Argentina.

- Colerus, E, (1943). *Historia de la Matemática. De Pitágoras a Hilbert*. Alemania Traducción directa del original alemán por Caplan, N. Buenos Aires. Argentina. Ediciones progreso y cultura.
- Chemello, G. (1992). *La Matemática y su Didáctica*. *Nuevos y Antiguos Debates*. Buenos Aires Argentina. Editorial Aique.
- Chorny, F., Krimker, G., Salpeter, C. (2004). *Pitágoras 8. Matemática*. Buenos Aires. Argentina. Proyecto Mundo para todos. Ediciones SM.
- *Dispositivo Curricular* (1998). Posadas, Misiones. Argentina Tercer ciclo. Ministerio de Cultura y Educación de la Provincia de Misiones.
- NAP (2006) *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios de Matemática*. Tercer ciclo de la educación general básica/ nivel medio (7mo, 8vo y 9no). Buenos Aires. Argentina. Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología.
- Panizza, M. (2003): *Conceptos básicos de la Teoría de Situaciones Didácticas en enseñar Matemática en el Nivel Inicial y 1º ciclo de EGB*. Buenos Aires. Argentina. Editorial Paidós.
- Sadovsky, P, Sessa C. (2002). Actualización de programas de nivel medio. Programa de matemática, primer año. Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Secretaria de Educación, Dirección General de Planeamiento. Dirección de Currícula.