

EL ORIGAMI COMO RECURSO DIDÁCTICO DE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA CON POLIEDROS. UNA PROPUESTA DIDÁCTICA.

Gladys C. Antunez – Marcela P. Villagra – Andrea C. Antunez
gantunez@ungs.edu.ar – mvillagr@ungs.edu.ar – aantunez@ungs.edu.ar
Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina

Núcleo temático: V. Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Modalidad: CB

Nivel educativo: Medio o Secundario (12 a 15 años)

Palabras clave: Origami, materiales didácticos, poliedros regulares.

Resumen

En este trabajo, presentaremos una propuesta didáctica para la enseñanza de contenidos de geometría tridimensional con actividades que involucran el uso del origami. En particular, la propuesta estará centrada en favorecer el aprendizaje de conceptos relacionados con los poliedros regulares. La versatilidad del tema para ser trabajado desde lo matemático, lo artístico y lo histórico, motivó su selección, y en esta propuesta intenta explotar tales características

El origami modular consiste en hacer figuras utilizando varios papeles que darán lugar a piezas individuales denominadas módulos. Cada módulo posee solapas y bolsillos que se usan para ensamblarlos entre sí. Los beneficios y cualidades del origami son varios, entre ellos, podemos citar el de motivar al estudiante a ser creativo, ya que le permite desarrollar sus propios modelos e investigar la conexión que tiene con la geometría plana y espacial.

La secuencia de actividades planteada busca favorecer la exploración y manipulación de poliedros como así también la elaboración de conjeturas sobre por qué son sólo cinco los poliedros regulares y su justificación mediante pruebas y argumentos visuales que emergen de dicha manipulación. Se presentarán posibles intervenciones del docente y de los estudiantes de nivel secundario para los cuales fue elaborada la secuencia.

Introducción

Desde sus raíces, la geometría ha crecido hacia una teoría de ideas y métodos mediante los cuales podemos construir y estudiar modelos físicos e idealizados, e incluso validar demostraciones. A pesar de ello, en la bibliografía escolar se observa que, en general, las actividades propuestas se orientan principalmente a estudios sobre figuras simples y planas o aplicaciones de fórmulas y definiciones, dejando de lado actividades que busquen

desarrollar estrategias propias de resolución de problemas geométricos o favorezcan el aprendizaje de herramientas de validación en este contexto.

Durante los últimos años, en el Museo Imaginario de la Universidad Nacional de General Sarmiento (Buenos Aires, Argentina), se vienen realizando actividades con niños y jóvenes visitantes en torno a la construcción de cuerpos geométricos con origami. Los resultados obtenidos evidencian un contexto fructífero para el aprendizaje de contenidos de la geometría tridimensional.

Teniendo en cuenta estos antecedentes, el objetivo de este trabajo es mostrar una propuesta para un contenido geométrico, con actividades donde los estudiantes manipulen material concreto. En particular, estamos interesados en mostrar una forma de ambientar una propuesta didáctica, exponiendo posibles resoluciones de los estudiantes y algunas sugerencias para las intervenciones del docente.

Fundamentos de la propuesta

El origami (o papiroflexia) modular es el arte de hacer figuras utilizando papel plegado. Con esta técnica se construyen piezas individuales denominadas módulos, con solapas y bolsillos que permiten ensamblarlos entre sí para luego construir una figura reconocible. Los beneficios de la utilización del origami en la enseñanza son varios. Entre ellos podemos citar el de motivar al estudiante a ser creativo, ya que puede desarrollar sus propios modelos e investigar la conexión que tiene con la geometría plana y espacial. (De la torre Mejía y Prada Vásquez, s.f.)

En esta propuesta desarrollaremos actividades organizadas en tres etapas:

- La visualización y reconocimiento de propiedades de poliedros.
- La exploración y construcción de posibles poliedros regulares usando piezas modulares de papel.
- La puesta en común de los resultados donde se espera la construcción de conjeturas y su validación visual.

La construcción de los poliedros con origami aquí presentada es considerada una *prueba visual* ya que permite expresar propiedades matemáticas o derivar resultados matemáticos, mediado por un proceso de visualización. En este trabajo, entendemos que la *visualización* es el proceso por el cual un individuo reconoce en el registro de acciones y

representaciones las reglas con las que fueron construidas y así extrae la información que le permite el descubrimiento y comprensión de la noción matemática involucrada. Según Giardino (2010), las inferencias informales del proceso de visualización son concluyentes cuando el receptor de la prueba visual conoce qué manipulaciones son legítimas y cuáles no lo son, lo cual es esperable en la puesta en común planteada.

Además, para que un conjunto de acciones sea aceptado como prueba matemática, deberá cumplir las condiciones de confiabilidad, consistencia y repetibilidad mencionadas por Torres Alcaraz (2004) siguiendo lo desarrollado por Borwen, y Jörgenson (2002). Estas características se evidencian en las actividades guiadas que estamos proponiendo. Las consignas están planteadas para que, luego de las primeras acciones de experimentación, se pueda garantizar la comprensión de las reglas a través de la enunciación explícita de los condicionantes en la construcción de los poliedros regulares. En este caso particular, se puede ver cómo el estudiante a partir de la manipulación con las baldosas comprende que, respetando la definición de poliedro regular, la suma de los ángulos de las caras que convergen en el vértice tiene que ser menor a 360° . Así descubre que no son infinitos estos poliedros, y aún más, que puede explorar rápidamente con la misma técnica todas las posibilidades. Asimismo, mediante la manipulación, los estudiantes van construyendo la conjetura de que para cada tipo de polígono regular sólo pueden construirse los que ellos hicieron. Esta experimentación cumple también con las condiciones de confiabilidad, consistencia y repetibilidad pues cada vez que algún estudiante repite la inspección, el resultado no varía. Además, el estudiante puede llegar a encontrar consistencia con conocimientos que ya tenga adquiridos, como por ejemplo los de teselación (saber que se puede embaldosar con triángulos, cuadrados, hexágonos).

Al utilizar modelos geométricos en origami se hace uso también del razonamiento visual que define Meavilla Seguí (2005), ya que ayuda a pensar los condicionantes para resolver el problema, invita a “hacer” construyendo los poliedros regulares y finalmente permite comprender por qué son solo cinco este tipo de cuerpos geométricos.

Por otro lado, la propuesta incentiva a realizar una demostración de convicción propia, empírica, perceptiva, exhaustiva y pura, siguiendo la clasificación de las categorías de demostración sobre las que trabaja Rodríguez Díaz (2006). Es una demostración de

convicción propia pues, a pesar de la presencia de un educador que orienta, son los propios estudiantes los que deben convencerse y convencer a los demás de su conjetura. Es una demostración empírica y perceptiva ya que la convicción proviene en su mayor parte de la experiencia física y sensitiva de ensayar varias veces la construcción de poliedros regulares, favoreciendo el reconocimiento visual de los condicionantes necesarios. Como además hay una comprobación empírica de tales condicionantes podemos clasificar la demostración como pura. Por último, la demostración se clasifica como exhaustiva pues se analizan todos los casos posibles. Cada grupo se convence de que no puede construir más poliedros regulares con las baldosas que se han facilitado, comparten el resultado con el resto de los compañeros y se convencen que no tiene sentido ensayar con polígonos regulares de más lados.

Actividades, desarrollo e intervenciones posibles

Se propone desarrollar actividades tipo taller en el ámbito áulico para estudiantes de la escuela secundaria, dedicándole un tiempo aproximado de tres horas. La actividad será conducida por el docente que oficiará de “preguntón experimentado” centrado en motivar la formulación de inquietudes y no tanto en dar las respuestas, aunque orienta en la reflexión. Se trabajará en grupos de 3 o 4 estudiantes.

Los materiales a utilizar son: cuerpos geométricos (poliedros cóncavos y convexos) construidos en papel con origami o en cartón (decorados con pintura, espejos, cartones de colores, etc); baldosas (oficiarán de las caras de los poliedros) triangulares, cuadradas, pentagonales, hexagonales y heptagonales y bisagras construidas en origami (metiéndose en cada baldosa, constituirán de alguna manera las aristas). Se podrá usar cinta de papel para fijar mejor los poliedros construidos para manipularlos con mayor facilidad.

Los **objetivos centrales** que se pretende que alcancen los estudiantes son:

- Conocer distintos poliedros y sus características. Distinguir los poliedros regulares de otros poliedros.
- Tomar conciencia de la imposibilidad de construir más de cinco sólidos regulares.
- Utilizar los conceptos de regularidad de figuras geométricas planas y espaciales, y de vértice de un poliedro para la construcción de estos cuerpos.
- Construir en forma colaborativa estructuras (en este caso poliedros).

En este apartado se describirá la secuencia de tres actividades.

Actividad 1: Cuerpos, figuras y espacio. Convexidad y concavidad. (30 minutos).

Se propondrá la exploración de algunos poliedros artísticos con el objetivo de caracterizarlos, identificando otros ejemplos en la vida cotidiana.

Consigna del docente: *Mencionar qué características tienen los siguientes objetos geométricos.*

A continuación, algunas imágenes de los cuerpos que se presentarán:



Fig 1: Poliedro cóncavo, poliedro estrellado de Kepler-Poinsot, Dodecaedro, Icosaedro de cartapesta, poliedro arquimediano, poliedro convexo no regular.

El docente podría realizar algunas primeras preguntas con el fin de motivar la necesidad de definir elementos del cuerpo para así poder describirlo: cara, vértice, cuerpo geométrico y poliedro. Luego, se recomienda guiar la descripción con preguntas sobre las diferencias y similitudes entre estos cuerpos indagando sobre las relaciones entre un polígono (lados, vértices) y un poliedro (caras, vértices, aristas), convexidad y concavidad, poliedros convexos y poliedros regulares. La intención de estas intervenciones es la explicitación de la definición de poliedros regulares, condición necesaria para orientar la siguiente actividad.

Actividad 2: Construcción de poliedros regulares con origami (120 minutos).

Luego de una breve introducción sobre qué es el origami, se invitará a los estudiantes a construir poliedros regulares con los materiales aportados por el docente. Cada grupo recibirá varias bisagras y baldosas: triangulares, cuadradas, pentagonales, hexagonales y heptagonales.

Consigna del docente: *Utilizando las baldosas entregadas a cada grupo, construir algunos poliedros regulares.*

El docente mostrará el proceso de unir dos baldosas con una bisagra y, seguidamente, sus intervenciones deberán estar dirigidas a que los estudiantes vayan registrando las dificultades y avances en la construcción.

El primer paso en la construcción es lograr armar el primer vértice del poliedro ensamblando baldosas del mismo tipo. Este objetivo fuerza al proceso comparativo de los distintos vértices contruidos y puede ser guiado por el docente con preguntas sobre los tipos de vértices encontrados, las medidas de los ángulos de la figura usada, la cantidad de figuras posibles para lograr el vértice y las limitaciones en la cantidad que surgen en el proceso constructivo. El segundo paso en la construcción es formar el poliedro incorporando más caras al primer vértice poliedral hasta cerrar el cuerpo. Aquí el docente podría preguntar si lo obtenido se corresponde con un poliedro regular para guiar a los estudiantes a una reflexión sobre la definición inicial.

A continuación se muestran algunas construcciones que pueden obtener los estudiantes.

Las figuras 2, 3 y 4 muestran el proceso de construcción hasta obtener el tetraedro, a partir de un primer vértice con tres triángulos.



Fig. 2,3 y 4



Fig. 5, 6, 7, 8 y 9
Las figuras

Las figuras 5 y 6 muestran que con cuatro triángulos es posible comenzar construyendo un primer vértice poliedral. Las figuras 8 y 9 corresponden a dos vértices de un mismo poliedro construido con 6 triángulos. Observar que en un par de vértices convergen tres caras y en los otros tres vértices convergen cuatro caras, por lo que no es un poliedro regular. El docente debería prever esta situación para intervenir con una pregunta al respecto. La figura 7 muestra el único poliedro regular que puede obtenerse a partir de un vértice poliedral con cuatro triángulos: el octaedro.



Fig. 10, 11, 12, 13 y 14

Con cinco triángulos podemos lograr un primer vértice poliedral que uniéndolo con otro vértice poliedral del mismo tipo y completando el cuerpo, se obtiene un único poliedro regular: el icosaedro (ver fig. 10, 11 y 12). Las fotos 13 y 14 muestran lo que ocurre al intentar con 6 o más triángulos. Los estudiantes podrían concluir: si la suma es mayor o igual a 360° entonces no es posible lograr la concavidad necesaria para conformar el vértice poliedral.

La construcción con cuadrados es similar a la anterior. Se obtiene el cubo usando un vértice poliedral conformado por tres cuadrados.

Con baldosas pentagonales, se observa que sólo es posible la construcción de un único poliedro regular: el dodecaedro.

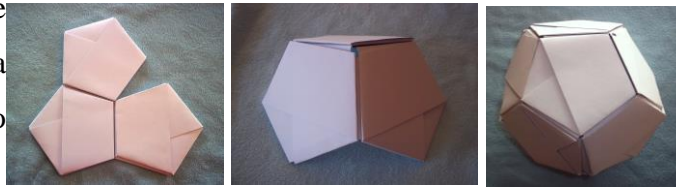


Fig. 15, 16 y 17

Finalmente, en el ensayo con las baldosas heptagonales, aparece el conflicto evidente de no lograr construir ningún vértice poliedral.

Actividad 3: Reordenando ideas y algo más (tiempo estimado: 30 minutos).

Una vez arribado a los cinco poliedros regulares y frente a la imposibilidad de construir otros, surge el siguiente planteo: Es claro que hay cinco poliedros regulares y los estudiantes ya habrán visto cómo son, pero ¿podría haber más?, ¿o son sólo cinco?, y si lo son ¿por qué son sólo cinco?

Se realizará también una reflexión sobre de la imposibilidad de construcción de más de cinco poliedros regulares, que incluya la enunciación de conjeturas y la justificación de las mismas, las cuales podrían pensarse como pistas para estructurar una demostración matemática. Sería interesante, en esta reflexión final, hacer evidente las argumentaciones trabajadas en las actividades anteriores desde un enfoque abstracto.

Conclusiones finales

El presente trabajo muestra una forma de abordar ciertos temas de geometría tridimensional con recursos materiales concretos de fácil construcción. Esto posibilita el encuentro de propiedades de los cuerpos, más generales de aquellas que se pueden deducir ilustrando con lápiz y papel o con gráficos tridimensionales, debido a que en el mismo proceso de construcción se piensa y se conjetura sobre tales características.

En particular, mostramos cómo la actividad de construcción de poliedros con origami propone a los estudiantes el desafío de llegar al conocimiento como respuesta a preguntas que se modifican en función de las evidencias concretas que ofrecen las estructuras intermedias construidas (como, por ejemplo, los vértices poliedrales).

Elementos teóricos de la Educación Matemática como pruebas visuales, razonamiento visual, demostraciones empíricas, procesos de exploración-conjetura-demostración, nos han abierto posibilidades muy interesantes para la enseñanza de la matemática de un modo participativo. Mediante la manipulación, los estudiantes van construyendo sus hipótesis y convenciéndose a través de la experimentación. A la hora de compartir resultados se favorece la presentación de una prueba visual a sus compañeros para convencerlos a ellos también, y además, como las reglas son compartidas, todos deberían poder comprender la prueba. Esto genera una particular comunidad de validación de esos conocimientos matemáticos.

Somos conscientes de que la secuencia implica una dedicación por parte del docente para la preparación del material concreto. Aún así, consideramos que una vez superada esta posible dificultad, los materiales pueden conservarse (en el caso de los módulos artísticos de la primera actividad) o reconstruirse/reciclarse fácilmente (en el caso de las baldosas) y a bajo costo.

Referencias bibliográficas

Antúnez, G. (2015). Poliedros regulares y origami en un museo interactivo de ciencia. Universidad Nacional de General Sarmiento.

Borwen, P. y Jörgenson, L. (2002). Visible Structures in Number Theory. *The American Mathematical Monthly*, 108(5), 897-910. Recuperado el 15 de mayo de 2012 de <http://www.cecm.sfu.ca/~loki/Papers/Numbers/>

De la torre Mejía, H. y Prada Vásquez, A. (sf 2014). *El origami como recurso didáctico para la enseñanza de la geometría*. Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. <http://funes.uniandes.edu.co/992/1/31Taller.pdf> consultado 27/03/2016.

Giardino V. (2010). Intuition and Visualization in Mathematical Problem Solving. Springer, Topol 29, 29-39.

Meavilla Seguí, V. (2005). Razonamiento visual y Matemáticas. *Rev. Sigma*, 27, 109-116.

Rodríguez Díaz, F. (2006). *Análisis de demostraciones en entornos de lápiz y papel y de Cabri por estudiantes de la Licenciatura en Matemática*. Recuperado el día 15 de Julio de 2014 de <http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/apregeom/archivos2/Rodriguez06.pdf>

Torres Alcaraz, C. (2004). Lo visual y lo deductivo en las matemáticas. *Miscelánea Matemática* 40, 1-27.