

ANÁLISE DA SECÇÃO DE UM CILINDRO ELÍPTICO APLICADA À DETECÇÃO DE FRATURAS EM SUBSUPERFÍCIES

Késsia R. G. Pereira - Aldenize R. Xavier
kessiar7@gmail.com - aldenizexavier@gmail.com
Universidade Federal do Oeste do Pará - Brasil

Tema: Matemática Inter-níveis.

Modalidade: CB.

Nível educativo: Não especificado.

Palavras-chave: cilindro elíptico, secção, detecção, fraturas.

Resumo

No âmbito das geociências, a relevância das análises feitas a partir das secções cilíndricas, consolida-se, por exemplo, na identificação de fraturas presentes em poços, ou seja, o maior domínio do conhecimento matemático sobre as curvas e ângulos resultantes do processo de secção, permite um “diagnóstico” mais preciso sobre o perfil geofísico de uma estrutura. Visto isso, o artigo busca realizar a análise matemática da secção do cilindro elíptico e da função que define o ângulo de inclinação do plano cortante em relação à base do cilindro. O estudo dos resultados da secção concretiza-se por meio da geometria analítica, plana e da trigonometria. A partir desse estudo, a detecção de fraturas em poços ovalizados (poços com formato de cilindro elíptico em razão da pressão presente no ambiente, por exemplo) torna-se otimizada, ou seja, munidos da função que define a curva resultante da secção e das características matemáticas dela, pode-se ter maior precisão do comportamento dos fluidos em tal região. Assim, o estudo é aplicado em uma área relevante, além de estar imerso em um dos desafios da matemática, como defendia Jean Dieudonné (1906-1992): “O princípio básico da Matemática Moderna é atingir a fusão completa das ideias geométricas e analíticas.”.

Introdução

A matemática nos fornece ferramentas capazes de potencializar a compreensão de tudo em nossa volta, haja vista que ela é uma ciência presente em todos os campos da atividade humana. Dessa forma, para o universo ser compreendido precisamente, se faz necessário o domínio da linguagem matemática.

Tal ciência possui um campo de diversidade, isto é, ela pode se manifestar por meio do sistema de numeração, da álgebra, aritmética, estatística, geometria, do cálculo, etc. A geometria é uma área de intensa presença no cotidiano de todos. Sua importância é tamanha a ponto de um dos mais célebres cientistas, Galileu Galilei (1564 —1642), afirmar que o entendimento de tudo se baseia na leitura dos caracteres matemáticos: triângulos, circunferências e outras formas geométricas. Inserido em tal contexto, está o estudo do cilindro elíptico.

O artigo busca realizar a análise da secção de um cilindro elíptico e da função que define o ângulo de inclinação do plano cortante em relação à base do cilindro. E posteriormente aplicar os conhecimentos adquiridos, com tal análise, no âmbito das geociências, mais precisamente na detecção de fraturas em subsuperfícies.

Cilindro Elíptico

Segundo Delgado (1997), um cilindro quádrico é uma superfície regrada S que satisfaz propriedades descritas abaixo:

- 1- Contém uma diretriz D que é uma cônica contida em um plano;
- 2- Para cada $P \in D$, a reta geratriz, L_p , passando pelo ponto P , é perpendicular ao plano que contém a diretriz D . Assim, as geratrizes são retas paralelas.

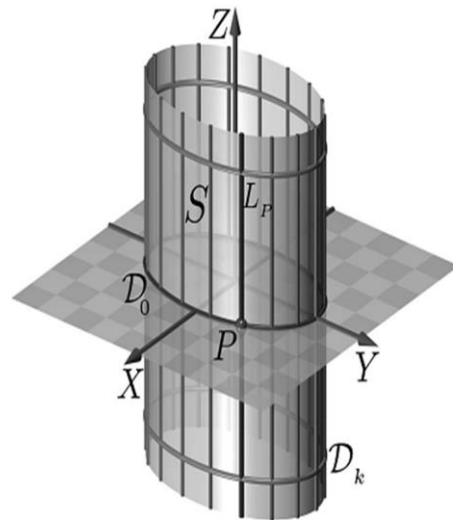


Figura 01 – Cilindro Elíptico.

Um cilindro quádrico é elíptico, parabólico ou hiperbólico, se a sua geratriz for uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole, respectivamente.

A fim de se obter a equação do cilindro elíptico, considera-se o caso em que a diretriz é a elipse definida por:

$$D: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

Considerando-se que diretriz está contida no plano $z = 0$, segue que as geratrizes possuem direção $\vec{v} = (0,0,1)$, a qual é normal ao plano $z = 0$.

Então, para cada ponto $P = (x, y, 0)$ e D , a reta $L_p = \{(x, y, t) | t \in \mathbb{R}\}$ está contida no cilindro. Fixando-se um valor $t = k$ e tomando-se em cada reta L_p o ponto $P_k = (x, y, k)$, ou seja, considera-se o conjunto de pontos $D_k = \{(x, y, k) | (x, y, 0) \in D\}$.

Já que as coordenadas x e y dos pontos de D_k são as mesmas que as coordenadas x e y dos pontos D , tais coordenadas satisfazem $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e, fixando-se a terceira

coordenada com valor igual a k , os pontos de D_k são pertencentes ao plano $z = k$.

Logo, D_k é o conjunto dos pontos que satisfaz o sistema D :
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = k. \end{cases}$$

Como tal sistema representa a elipse contida no plano $z = k$, de centro $(0,0,k)$, e coincide com a elipse D por deslocamento de plano, então qualquer que seja o valor de $k \in \mathbb{R}$, tem-se que o cilindro elíptico proposto é a superfície quádrlica cujas secções planas, obtidas de sua intersecção com planos paralelos ao plano XY , são elipses do mesmo tipo, independentemente da coordenada z . Ou seja, a única condição imposta a um ponto $P(x,y,z)$ para pertencer a esse cilindro é que

$$S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Então, esta é a equação do cilindro elíptico.

Aplicações do estudo das secções cilíndricas

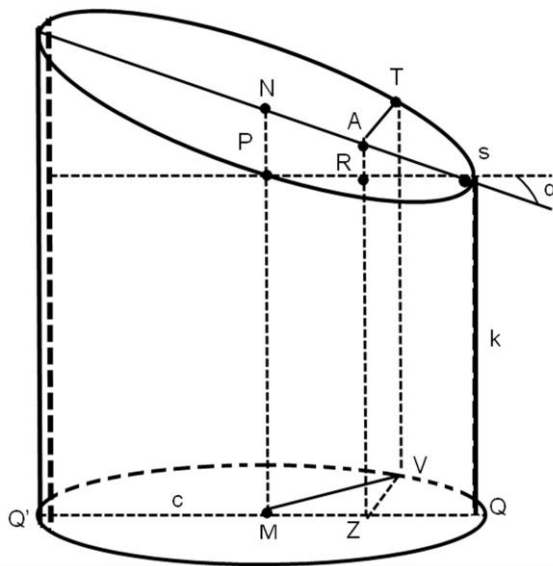
A forma cilíndrica está amplamente presente em nosso cotidiano, em razão disso a análise das secções cilíndricas toma caráter importante. É possível visualizar suas aplicações na indústria (fabricação de peças), na engenharia (engenharia mecânica, por exemplo, no que diz respeito à construção de tubulações), nos estudos geológicos, geofísicos, etc.

No âmbito das geociências, a relevância das análises feitas a partir das secções cilíndricas, consolida-se, por exemplo, na identificação de fraturas presentes em poços, ou seja, o maior domínio do conhecimento sobre as curvas e ângulos resultantes do processo de secção, permite um “diagnóstico” mais preciso sobre o perfil geofísico de uma estrutura.

A importância da detecção de fraturas em poços é devido a possibilidade das fraturas funcionarem como um caminho alternativo para o escoamento do fluido presente no ambiente, muitas vezes tornando o escoamento mais veloz.

Na implementação de obras como estradas, barragens e túneis a análise das fraturas presentes em ambientes rochosos é de extremo valor, haja vista que fluidos presentes em tais locais podem escoar por essas falhas e enfraquecer as estruturas dessas construções, comprometendo a segurança ou desempenho das funções das instalações.

Secção, ângulo e curva



Ao cortar um cilindro elíptico com um plano oblíquo à base, o resultado é um tronco (Figura 2). A região superior do tronco também possui a forma de uma elipse. Tal plano gera um ângulo α , o qual indica a inclinação do plano em relação à base do cilindro. Para calcular o valor de α , faz-se as seguintes manipulações:

Ao tomar os triângulos SAR e NPS , e munidos dos conceitos trigonométricos,

Figura 02 – Cilindro elíptico seccionado. surge que

$$\cos \alpha = \frac{RS}{AS} = \frac{PS}{NS} = \frac{MQ}{NS} = \frac{c}{NS}$$

O ângulo α é OPV (Oposto Pelo vértice) ao ângulo $A\hat{S}R$.

Das relações trigonométricas fundamentais conclui-se que:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{NS^2}{c^2}$$

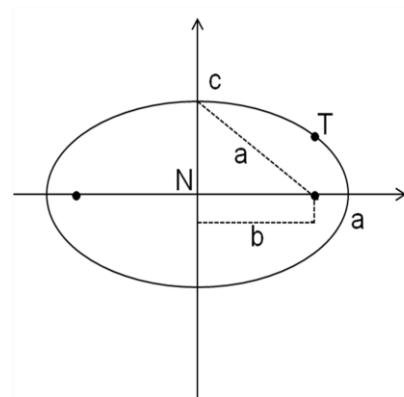


Figura 03 – Elipse, secção.

Ao fazer $NS = a$ tem-se

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{a^2}{c^2} - 1 = \frac{a^2 - c^2}{c^2} = \frac{b^2}{c^2} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{c}{b}$$

Analisando a elipse disposta nos semi-eixos a e c (Figura 3), percebe-se que b é a semidistância focal. Os focos estão sinalizados no eixo a . A partir disso e ao fazer $V\hat{M}Q = h$ (Ilustração, Figura 04), pode-se inferir,

$$RA = RS \operatorname{tg} \alpha = ZQ \operatorname{tg} \alpha = (QM - MZ) \operatorname{tg} \alpha =$$

$$(c - c \cos h) \frac{b}{c} = b(1 - \cos h)$$

$$y = \frac{Q'Q}{2} = MQ = PS = PR + RS$$

Chama-se $PR = MZ = m$.

$$RS = RA \operatorname{cot} \alpha$$

$$RS = b(1 - \cos \square) \operatorname{cot} \alpha$$

$$RS = b(1 - \cos \square) \frac{c}{b}$$

$$RS = c(1 - \cos \square)$$

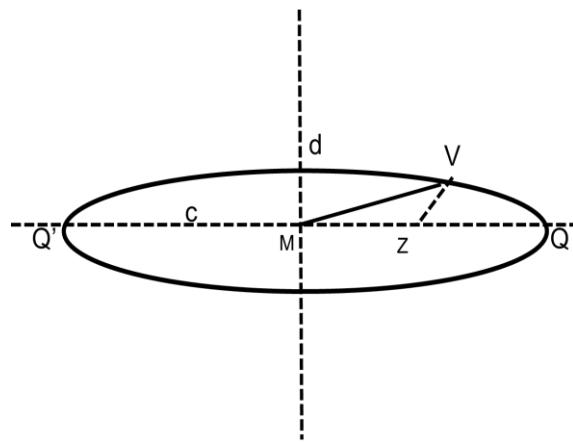


Figura 04 – Elipse da base inferior do cilindro.

$$y = Q'Q = 2m + 2c(1 - \cos \square)$$

A expressão do eixo maior em função de α é

$$y = Q'Q = 2m + 2b(1 - \cos \square) \operatorname{cot} \alpha$$

A relação entre o ângulo $V\hat{M}Q$ e o arco da elipse, de forma aproximada, pode ser descrita por meio de $V\hat{M}Q = \frac{2x}{3(c+d) - \sqrt{[(3c+d)(c+3d)]}}$, então a expressão do eixo maior em função do arco x , arco da elipse da base (Figura 04) é

$$y = Q'Q = 2m + 2c \left(1 - \cos \frac{2x}{3(c+d) - \sqrt{[(3c+d)(c+3d)]}} \right)$$

Então, a expressão do eixo maior em função de α e do arco x é

$$y = Q'Q = 2m + 2b \left(1 - \cos \frac{2x}{3(c+d) - \sqrt{[(3c+d)(c+3d)]}} \right) \operatorname{cot} \alpha$$

Onde x , é o valor do arco QV e y é o eixo maior $Q'Q$.

Ao ser seccionado, o tronco do cilindro elíptico adquire a forma abaixo (Figura 5), representada pela planificação. Partindo desse princípio e da expressão do eixo maior em função do arco x , concluí-se que o processo de secção implica em uma cossenóide.



Figura 05 – Planificação do tronco do cilindro.

A relevância do estudo direcionado à secção em cilindros com base elíptica ocorre pelo fato da existência de um campo de tensões em uma subsuperfície, ou as próprias características geológicas causarem efeitos à forma do poço. Em tal realidade, estão os poços ovalizados, ou seja, os poços são alargados elipticamente em razão desses fatores.

A fim de se ter uma melhor visualização da aplicação dos estudos das secções na detecção de fraturas, observa-se a seguinte imagem (Figura 06), nas qual fica evidente a semelhança entre a cossenóide, gerada a partir da elipse resultante da secção, e a fratura presente em uma subsuperfície.

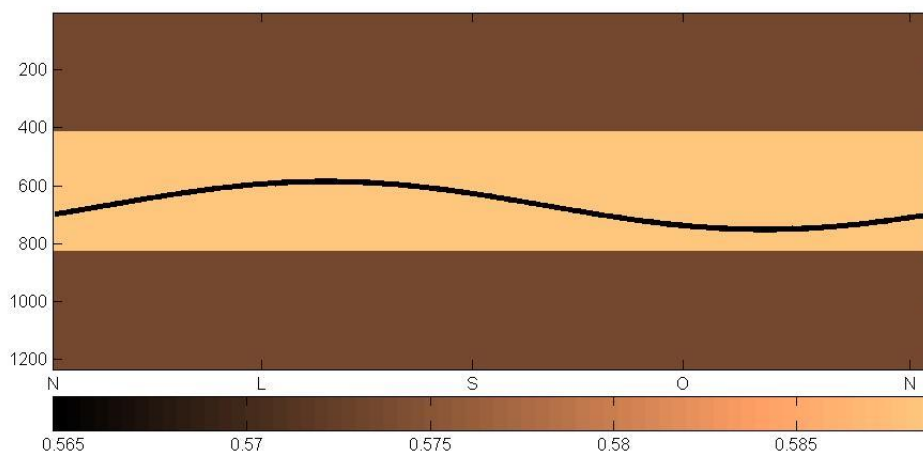


Figura 06 – Imagem sintética de uma subsuperfície.

Conclusão

Durante o trabalho notou-se que vertentes da geometria revelaram-se interligadas no desenvolvimento e compreensão do tema: geometria analítica, no que diz respeito à análise do resultado da secção e à base do cilindro; a geometria plana, por meio do uso da semelhança de triângulos para a determinação das funções pertinentes ao ângulo desejado e a geometria analítica espacial, no âmbito da definição de cilindro elíptico. A trigonometria também foi amplamente utilizada através das relações trigonométricas.

O estudo da secção cilíndrica é justificado pela extensa presença da forma cilíndrica no dia-a-dia da indústria, engenharia, geociências, etc. Na área das geociências, a identificação de fraturas em rochas, poços, solos, etc., pode ser definida e melhor estudada por meio dos artifícios promovidos pelas análises das secções, ou seja, a análise matemática confere maior precisão a tal processo.

A análise da secção cilíndrica resultante em uma elipse, ou seja, quando o plano de secção é oblíquo às bases, permitiu inferir, por meio das operações matemáticas, e posteriormente através da planificação, que uma cossenóide é gerada em tal espécie de secção. O uso desse conhecimento se mostra relevante na detecção de fraturas, em razão da semelhança na forma geométrica e pela maioria das fraturas possuírem esse formato.

Por meio da pesquisa implementada viu-se que o estudo feito é aplicado em uma área de grande utilidade para a sociedade, além de está imerso em um dos desafios da matemática, pois como defendia Jean Dieudonné (1906- 1992): “O principio básico da Matemática Moderna é atingir a fusão completa das ideias geométricas e analíticas.”. Com o término do trabalho ratificou-se a noção da significativa importância da matemática e da sua vasta utilização, ou seja, percebeu-se que tal ciência está presente nos lugares mais improváveis, até mesmo embaixo da terra.

Referencias bibliográficas

Delgado, J.; Frensel, K.; Santo, N. do E. (1997). *Geometria Analítica Espacial. Cilindros quádracos e identificação de quádracos*. (p.237-238). Disponível em: <http://www.professores.uff.br/kowada/ga/ead/ga2V1aula9.pdf>. Acesso: 02/02/13.

Fischetti, A.C.(2003) *Modelamento e correção de descentralização das imagens de tempo de trânsito*. (Tese de mestrado, UFPA). Disponível em:

[http://www.cmig.ufpa.br/Disserta%C3%A7%C3%B5es/2003/Anna%20Carmela%20F.%20Ferreira%20\(M\).pdf](http://www.cmig.ufpa.br/Disserta%C3%A7%C3%B5es/2003/Anna%20Carmela%20F.%20Ferreira%20(M).pdf). Acesso: 28/08/12.

Neto, E.R. (2004). *Geometria*. Druck, S. Hellmeister, A.C. Peixoto, C. M. (Ed.), *Corte e costura*. (p.140-14). Brasília. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_3_3.pdf. Acesso: 12/09 /12.

Ruela, A.; Guerra, C. *Detecção de fraturas em imagem de perfis geofísicos de poço com morfologia matemática*. III Simpósio Brasileiro de Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação, Recife, Brasil, 2010. Disponível em: http://www.ufpe.br/cgtg/SIMGEOIII/IIISIMGEO_CD/artigos/FotoeSR/SR_e_PDI/A_4.pdf. Acesso: 05/09/12.