

## INTEGRAL DE LINHA DE CAMPOS VETORIAIS/TRABALHO REALIZADO: IMAGEM DE CONCEITO E DEFINIÇÃO DE CONCEITO

Juliano Cezar Ferreira – Orestes Piermatei Filho  
Juliano.ferreira@ifsudestemg.edu.br – orestes.piermatei@ufjf.edu.br  
IF Sudeste MG – Brasil, UFJF - Brasil

Tema: 1.4 Pensamento Matemático Avançado

Modalidad: CB

Nível educativo: Terciário - Universitário

Palabras clave: imagem de conceito. definição de conceito. integral de linha de campos vetoriais. maple.

### Resumen

*Este trabalho pretende expor alguns resultados de uma pesquisa de mestrado. O objetivo foi investigar elementos da imagem de conceito e definição de conceito, referentes à Integral de Linha de Campos Vetoriais, quando interpretado fisicamente como Trabalho Realizado. A teoria de imagens de conceito foi empregada como embasamento teórico para as discussões. Os dados foram coletados durante os Experimentos de Ensino por meio de questionários e entrevista a estudantes de Cálculo Diferencial e Integral III. Os resultados sugerem: estudantes de Física tendem a relacionar os conteúdos matemáticos com conceitos físicos; a visualização de campos vetoriais pode enriquecer ou gerar conflitos teóricos; a utilização de um software pode gerar novas compreensões; o planejamento de aulas para conteúdos matemáticos avançados deve contemplar a precisão da técnica matemática, mas também possibilitar o enriquecimento intuitivo dos conceitos envolvidos.*

### 1. Introdução

A maioria das pesquisas sobre o ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos relativos ao Ensino Superior tratam dos conceitos iniciais do Cálculo Diferencial (Giraldo, 2004, Benedetti, 2003 Barbosa, 2009, Marin, 2009, Tall e Vinner, 1981).

O interesse desse trabalho foi parte de uma experiência docente em sala de aula no ensino de Matemática. Particularmente no ensino do Cálculo Integral de Curvas sob a ação de Campos Vetoriais. A atenção concentrou-se na observação das concepções matemáticas dos estudantes sobre a Integral de Linha de Campos Vetoriais. Adotamos como referencial para análise dos dados a teoria das Imagens de Conceitos (Tall e Vinner, 1981) e o processo de visualização como parte da proposta do Pensamento Matemático Avançado (PMA)<sup>1</sup>.

A integração do Maple em algumas atividades teve o objetivo de induzir a evocação de diferentes imagens de conceitos ou até mesmo “novas” produções.

### 2. Referencial teórico

---

<sup>1</sup> Advanced Mathematical Thinking (AMT).

Pesquisadores (Tall, 1991-2008) há quatro décadas já realizavam trabalhos e, portanto, pesquisavam os fenômenos ocorridos no processo de ensino e aprendizagem da Matemática do ensino superior, mais especificadamente os objetos do Cálculo Diferencial. Esse grupo denominou-se Advanced Mathematics Thinking (ATM) e se propôs a partir de então focar suas investigações no campo da psicologia cognitiva inseridos na Educação Matemática identificando principalmente elementos específicos do pensamento matemático avançado que constitui o conhecimento matemático universitário no ensino superior.

Ao apresentar um conceito matemático para o estudante, ele poderá construir ideias e imagens mentais das quais poderão ser utilizadas em inúmeras situações acadêmicas e em diferentes momentos de trabalho com aquele conceito. Cada indivíduo constrói uma estrutura conceitual iniciada pela apresentação. Para tanto, os termos imagem de conceito e definição de conceito foram construídos e descritos por Tall & Vinner (1981) no sentido de elucidá-los e, portanto, facilitar um entendimento da estrutura cognitiva construída pelo estudante nos momentos de apresentação de novos conceitos matemáticos.

Há um estímulo na memória do estudante no momento em que ele ouve ou vê uma expressão como 'Campo Vetorial' e então ele evoca alguma imagem mental nesse momento associada aos termos (Vinner, 1991) que de modo geral não é a definição técnica conceitual, isto é, formal. É o que Vinner (1991) vai chamar de imagem de conceito<sup>2</sup>. O histórico de experiências escolares matemáticas do estudante, por exemplo, nesse caso é valorizado uma vez que as imagens mentais elaboradas na sua memória naquele momento podem fazer parte de um conjunto que contenha muitos objetos associados ao conceito assim como uma única imagem ou até mesmo nenhuma imagem.

A imagem de conceito é algo não-verbal associado em nossa mente ao nome do conceito. Pode ser uma representação visual do conceito, caso o conceito tenha representações visuais; pode ser também uma coleção de impressões ou experiências. (Vinner, 1991, p. 68)

Portanto, é notável que uma imagem de conceito esteja vinculada a um indivíduo específico e a sua reação a certo termo pode depender ainda do contexto no qual ele está

---

<sup>2</sup> Alguns autores utilizam os termos imagem conceitual e definição conceitual.

inserido no momento da apresentação. Nesse caso Tall & Vinner (1981) introduzem a imagem mental evocada para descrever a parcela da memória utilizada num determinado contexto. A compreensão de um conceito passa pela formação de uma imagem conceitual associada ao objeto de conhecimento. Ao apresentar um conceito em matemática por meio de uma definição formal<sup>3</sup>, esperamos que o aprendiz forme ou construa imagens de conceitos associadas a essa definição para assim afirmarmos que houve uma assimilação do conhecimento e, portanto, ele compreendeu o conceito. A partir de então ele poderá utilizar essa compreensão em diferentes contextos sem, por exemplo, fazer uso da definição formal.

Definição de conceito<sup>4</sup> é a definição verbal que explica o conceito (Vinner, 1991) sendo muito raramente semelhante às definições matemáticas formais associadas aos conceitos.

As definições de conceitos dadas pelos estudantes por meio da descrição verbal da imagem de conceito do objeto de conhecimento apresentado podem ser esperadas pelos professores dentro de um quadro formado, por exemplo, pelas habilidades de construir essa definição a partir de uma compreensão mais profunda do conceito.

Nesse trabalho, investigamos as compreensões matemáticas de estudantes numa abordagem favorável a integração de uma tecnologia da informação e comunicação, o Maple. De modo específico, pretendíamos, por meio de tarefas matemáticas mobilizar elementos da imagem de conceito referente à Integral de Linha de Campos Vetoriais.

A teoria apresentada acima sugere, em particular, que a abordagem de um conceito matemático deve incluir diferentes representações, quando possível, no sentido de propiciar a realização de conexões entre as unidades cognitivas<sup>5</sup> (Tall & Tony Bernard, 1997, apud Giraldo, 2002).

Dreyfus (1991) revela que em muitos processos, os aspectos matemáticos e psicológicos podem ser raramente separados entre si. As imagens mentais e as imagens matemáticas estão intimamente ligadas aqui. É esta ligação entre a Matemática e a Psicologia que tornam os processos interessantes e relevantes para a compreensão da aprendizagem e pensamento em Matemática avançada.

---

<sup>3</sup> Entende-se aqui por *definição formal* aquela aceita pela comunidade matemática dentro de um dado contexto social, histórico e teórico.

<sup>4</sup> Neste texto utilizaremos a formulação na qual a definição de conceito está incluída na imagem de conceito.

<sup>5</sup> Unidade Cognitiva seria cada porção da estrutura cognitiva associada a um dado conceito, no qual o indivíduo é capaz de focar atenção de uma vez. (Giraldo, 2002)

A visualização é um processo pelo qual as imagens ou representações mentais ganham existência, diz Dreyfus (1991). Mariotti & Pesci (1994, apud Costa, 2002), chamam de visualização o pensar espontaneamente acompanhado e apoiado por imagens. Zimmermann e Cunningham (1991, apud Costa, 2002), dizem que a visualização está relacionada com os mais diversos ramos da Matemática e é multifacetada – com raízes na Matemática e com aspectos históricos, filosóficos, psicológicos, pedagógicos e tecnológicos importantes.

A visualização não é mais relacionada simplesmente aos efeitos ilustrativos, mas também pode ser reconhecida como um componente chave do raciocínio (profundamente envolvimento com o conceitual e não o meramente perceptivo), resolução de problemas, e mesmo em provas matemáticas (Arcavi, 2003).

### **3. Metodologia e alguns resultados**

Este trabalho está baseado nos resultados de uma pesquisa realizada em 2012 e é fruto de uma pesquisa desenvolvida durante o mestrado profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora. Adotamos na pesquisa uma metodologia qualitativa que engloba os aspectos metodológicos de experimentos de ensino.

A pesquisa desenvolveu-se com a participação de sete estudantes do curso de Física. Alguns já haviam sido aprovados em Cálculo Diferencial e Integral III e os outros estavam cursando a disciplina. Os encontros constituíram duas etapas (Etapa 1 e Etapa 2). No presente trabalho (por limitações de espaço), nos restringiremos a análise da Etapa 2 bem como a citação de apenas alguns exemplos das respostas dadas.

### **4. Síntese da Análise dos Dados**

Esta pesquisa teve o objetivo de “ouvir” as concepções e formas de conceber dos estudantes sobre conceitos específicos do Cálculo Integral. Estruturamos a síntese em categorias sugeridas por Meyer (2003)<sup>6</sup> e adaptadas para nosso objeto matemático.

---

<sup>6</sup> O objetivo de Meyer (2003) foi investigar elementos da imagem conceitual (termo utilizado pela autora) relativas ao conceito de derivada quando interpretado geometricamente por estudantes que já cursaram as disciplinas Cálculo I e II.

- Elementos da imagem de conceito associados a respostas inválidas, do ponto de vista matemático;

1) A Integral de Linha de Campos Vetoriais é concebida como somatório do Trabalho realizado por uma Força;

2) As representações  $\int_{\sigma} F \cdot dr$  e  $\int_{\sigma} F \cdot ds$  são equivalentes;

3) A função vetorial descreve a Força;

4) A Integral de Linha é nula quando o sentido da trajetória é o mesmo do campo de força.

5) A Integral de Linha é a Área ou Volume.

- Elementos da imagem de conceito identificados nas respostas dos estudantes que poderiam ser enriquecidos;

1) O Cálculo da Integral de Linha de Campos Vetoriais fornece o Trabalho realizado.

2) A Integral  $\int_{\sigma} F \cdot dr$  é uma soma dos pequenos Fdr.

A análise relativa às respostas fornecidas às questões das Atividades 3 e 4, levantou possíveis relações existentes entre a definição de conceito, referente a Integral de Linha de Campos Vetoriais, quando interpretada fisicamente como trabalho realizado, e elementos da imagem de conceito, relativas ao referido conceito, inferidos a partir das respostas fornecidas. Neste sentido, encontramos:

1) A resposta do sujeito apresenta uma definição de conceito diferente da definição de Integral de Linha de Campos Vetoriais mas coerente com os elementos que compõem a imagem de conceito evocada para responder algumas questões propostas.

2) A resposta do sujeito apresenta uma definição de conceito que se aproxima da definição formal mas não é consultada para a formulação das respostas fornecidas às demais questões.

A animação realizada pelo movimento da partícula segundo a curva sob a ação de um campo vetorial proposta numa das questões gerou facilmente a constatação do sinal da Integral sobre essa curva.

## 5. Algumas Conclusões

Analisando as imagens de conceitos evocadas e confrontando-as com as definições de conceito referentes à Integral de Linha de Campos Vetoriais, observou-se, em alguns casos certa incoerência. Corroborando com o sustentado por Vinner (1991),

identificamos sujeitos que expressaram uma definição de conceito, referente à Integral de Linha de Campos Vetoriais, quando interpretado fisicamente como trabalho realizado, que não foi consultada por esses sujeitos, ao responder as questões propostas. Isso evidencia aquilo que foi descrito por Vinner (1991), a saber: os estudantes, mesmo inseridos em um contexto técnico no qual não consultar definições pode levá-los a cometer erros, não consultam sua definição de conceito relativo a um conceito. Mas, em contrapartida, mobilizam elementos da imagem de conceito, referente a esse conceito, para responder as questões.

A visualização proporcionada pela utilização do Maple em algumas questões como estímulo visual parece ter contribuído para ativar outras partes da imagem de conceito referente a Integral de Linha de Campos Vetoriais quando interpretado fisicamente como trabalho realizado.

Assim, a proposta de integrar ferramentas que possam facilitar a visualização no processo de ensino e aprendizagem é, no mínimo, enriquecedora, pois favorece a ligação entre as imagens mentais e as imagens matemáticas (Dreyfus, 1991).

## **6. Considerações finais**

No nosso estudo, tivemos um objetivo específico: investigar recortes possíveis da porção das imagens de conceitos referentes à Integral de Linha de Campos Vetoriais quando interpretada fisicamente como trabalho realizado de estudantes de Cálculo III. Tanto o planejamento das tarefas quanto nosso papel de investigador foi orientado por esse objetivo. Nesse sentido, os resultados não são genéricos, mas aplicáveis a contextos com características semelhantes.

Tomando como referência as análises em nossa pesquisa, acreditamos que a exploração dos conceitos matemáticos avançados podem enriquecer as imagens de conceito dos estudantes permitindo que estes operem em diferentes contextos. A pesquisa ainda sugere que estudantes de Física tendem a relacionar os objetos matemáticos com conceitos físicos; a visualização de campos vetoriais pode enriquecer ou gerar conflitos teóricos; a utilização de um Software pode gerar novas compreensões. Nessa perspectiva, percebemos que o planejamento de aulas para conteúdos matemáticos avançados deve contemplar a precisão da técnica matemática, mas também possibilitar o enriquecimento intuitivo dos conceitos envolvidos.

Os resultados da investigação ainda apontam determinadas posturas quanto às abordagens desses conteúdos em sala de aula. Sobretudo quando se trata da estrutura formal das definições matemáticas que são pouco compreensivas mesmo para estudantes matriculados em disciplinas de Cálculo mais avançado, como foi o caso da pesquisa. Abordagens alternativas podem atuar de forma efetiva nas imagens de conceitos dos estudantes levando a desdobramentos nas concepções da própria atividade de aprender matemática.

Por fim, entendemos que a estrutura formal da matemática precisa ser assimilada. Mas ao distinguir o objeto matemático de ensino do objeto matemático técnico, a Teoria das Imagens de Conceito (Tall & Vinner, 1981) sugere que essa assimilação não seja suficiente. Produzir matemática não é reproduzir sua organização formal. Essa organização formal é um estado presente da Matemática. E no processo de aprendizagem, esse estado deve ser desequilibrado possibilitando uma nova reconstrução do objeto de conhecimento.

## 7. Referencias bibliográficas

- Arcavi, A. (2003). The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, n. 52, p. 215-241.
- Barbosa, S. M. (2009). Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra da cadeia – 2009, 199 f. Tese (doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro.
- Benedetti, F.C. (2003). Funções, Software Gráfico e Coletivo Pensantes - 2003, Dissertação (mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro.
- Buteau, C., Marshal, N., Jarvis, D. H. & Lavicza, Z. (2010). Integrating Computer Algebra Systems in post-secondary mathematics education: Preliminary results of a literature review. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 17(2), 57-68. [Full-text available with permission granted by IJTME] *International Journal for Technology in Mathematics Education*, Volume 16, No 2.
- Costa, C. “Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: Visualização”. *Anais do Encontro da Seção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação*, p. 257-273, Coimbra, Portugal, 2002.
- Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In David Tall (Org.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25–41). Dordrecht: Kluwer.



- Giraldo, V., Carvalho, L.M., Tall, D.O. (2002). Conflitos Teórico-Computacionais e a Imagem Conceitual de Derivada. In L.M. Carvalho and L.C. Guimarães, História e Tecnologia no Ensino da Matemática, vol.1, p. 153 - 164, Rio de Janeiro, Brasil. 2003. Disponível em: <<http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2003b-giraldo-carv-rj.pdf>> Acesso em: 25 de outubro de 2011.
- Giraldo, V. (2004). Descrições e Conflitos Computacionais: O Caso da Derivada. Tese de Doutorado do Curso de Engenharia de Sistemas e Computação. COPPE-UFRJ. Rio de Janeiro.
- Marin, D. (2009) Professores de Matemática Que Utilizam Tecnologias de Informação e Comunicação no Ensino Superior. Dissertação (mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro.
- Meyer, C. (2003). Derivada/Reta Tangente: Imagem Conceitual e Definição Conceitual. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC, São Paulo.
- Tall, D. O. ( Ed. ) ( 1991 ). Advanced Mathematical Thinking. Londres: Kluwer Academic Publisher.
- \_\_\_\_\_. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In: David Tall (Org.), Advanced mathematical thinking (pp.61-75). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- \_\_\_\_\_. (1992). A Transição para o Pensamento Matemático Avançado Funções, Limites, Infinito e Prova, traduzido por Pinto, M.M.F. Departamento de Matemática – Faculdade de Educação, UFMG. Publicado em Grows D. A. (ed) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Macmillan, New York, p. 495 – 511. 1992. Disponível em: <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1992e-trans-toamt.pdf>. Acesso em: 13 out. 2011.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, pp. 151-169.
- Vinner, S. (1991). O papel das definições no ensino e aprendizagem de matemática. Traduzido por Márcia Pinto e Jussara Araújo. In: Tall, D. The Role of Definitios in the Teaching and Learning of Mathematics. Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. cap. 5, p. 65 – 81. 1991.
- \_\_\_\_\_. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., v. 14, n. 3, p. 293-305, 1983.