COVEM 2013 VIII CONGRESO VENEZOLANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Universidad Nacional Experimental Francisco de Miranda UNEFM
ASOVEMAT CAPÍTULO FALCÓN
Memorias Arbitradas
ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

RELACIONES ENTRE EL CONOCIMIENTO GEOMÉTRICO DOCENTE Y LOS PROCEDIMIENTOS DE CONSTRUCCIÓN DE TRAPECIOS CON GEOGEBRA

RUBIO Leonela y **PRIETO** Juan Luis

leonela.rubio@aprenderenred.com.ve; juan.prieto@aprenderenred.com.ve

Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática, Maracaibo, Edo. Zulia.

Centro de Estudios Matemáticos y Físicos (**CEMAFI**)-**LUZ**, Maracaibo, Edo. Zulia.

RESUMEN

Por lo general se piensa que la capacidad que tienen los profesores de memorizar definiciones matemáticas que luego verbalizan en las clases es suficiente para llegar a ser competente en el ejercicio de la práctica profesional. En realidad, este conocimiento de carácter memorístico es insuficiente para atender las demandas de la enseñanza, en especial para analizar el potencial de las tareas geométricas que son propuestas a los aprendices. Por esta razón, es necesario que los profesores cuenten con oportunidades para ampliar su comprensión de la geometría escolar y dispongan de información que explique las razones por las cuales no siempre se tiene éxito en la resolución de algunas tareas geométricas que pueden parecer fáciles, cuestión para lo cual los entornos dinámicos pueden ser de gran ayuda. En este trabajo se describe el caso de un profesor que participó en un taller ofrecido por el Grupo TEM en 2012, en el cual debía resolver tareas de construcción de trapecios con GeoGebra, utilizando su conocimiento sobre los elementos y propiedades de estos cuadriláteros y decidiendo la manera de vincular las herramientas del programa para obtener dibujos acordes con lo exigido. Los datos provienen de la construcción realizada por el participante y de su explicación de los pasos seguidos para realizar el dibujo. El análisis tuvo el fin de identificar algún atributo espacial añadido al objeto geométrico que no le es propio y determinar las implicaciones del conocimiento del profesor sobre la construcción, apoyándonos en las teorías de formación de conceptos geométricos de Vinner y de conceptos figurales de Fischbein. La secuencia de pasos definida por éste revela la influencia de su conocimiento del objeto representado al momento de construir el dibujo y cómo este saber obstaculiza el logro de una imagen consistente con los datos iniciales y la teoría geométrica.

Palabras clave: Conocimiento geométrico, profesores, trapecios, GeoGebra.

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

INTRODUCCIÓN

Se suele vincular la suficiencia para la enseñanza de contenidos geométricos con la capacidad del profesor de “verbalizar”, con cierta precisión, algunas características de los objetos que enseñan (p.e., un trapecio). Sin embargo, nuestra experiencia en la formación docente pone de manifiesto situaciones en las que este tipo de conocimiento del profesor no basta para actuar adecuadamente. Por ejemplo, al enfrentar tareas de construcción de figuras planas en las que se debe hacer uso de un Programa de Geometría Dinámica (PGD) encontramos profesores que elaboran secuencias de construcción que no siempre conducen a una solución correcta de lo propuesto, muy a pesar de su conocimiento sobre los objetos representados. En este contexto, las soluciones incorrectas de los profesores se caracterizan por ser “inconsistentes”, cuando el dibujo elaborado no representa al objeto evocado, o “incompletas”, cuando no se culmina el dibujo.

En ambos casos, el uso de un PGD ha puesto de manifiesto las dificultades que tienen los profesores para explicar y predecir el comportamiento dinámico de los dibujos geométricos que ellos mismos elaboran, a la luz de la teoría geométrica (Laborde, 1997). Una manera de ayudar a superar estas dificultades es mediante el diseño, puesta en práctica y mejora progresiva de experiencias formativas, apoyadas en el uso de un PGD, donde los profesores de Matemática tengan oportunidad de aprender a establecer fuertes vínculos entre el conocimiento geométrico escolar (la teoría) y los dibujos que evocan tales objetos. Sin embargo, esto requiere que los formadores comprendan las maneras de aprender a vincular lo visual y lo teórico en los entornos dinámicos, incluyendo las dificultades que se presentan.

En atención a lo anterior, este trabajo describe las dificultades que tuvo un profesor de Matemática para elaborar una secuencia de pasos de construcción de un trapecio con GeoGebra (un tipo de PGD) que le condujera a un dibujo consistente con la teoría y los datos de la tarea. El caso aquí descrito forma parte de un universo más amplio de casos referidos a los cuadriláteros que hemos ido reseñando en trabajos previos (Rubio y Prieto, 2012). Esta información se considera relevante en tanto aporta datos para mejorar el diseño de nuestras secuencias formativas en Geometría con GeoGebra.

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

MARCO TEÓRICO

Según Vinner (citado por Gutiérrez y Jaime, 1996), aprender correctamente un objeto geométrico supone ser capaz de identificar: (i) el concepto matemático asociado, (ii) la imagen del concepto que se crea en la mente y (iii) la definición del mismo. Por lo general, cuando pensamos en un objeto geométrico, nuestra mente evoca su imagen, es decir, el conjunto de dibujos que asociamos a éste y que nos ayudan a recordar la definición del mismo, sus características y propiedades.

En consecuencia, si una persona cuenta con una variedad de representaciones mentales (dibujos) que reflejan las cualidades más importantes de un objeto geométrico, entonces se dice que el sujeto tiene una imagen del concepto completa que le coloca en condiciones favorables para la construcción de representaciones gráficas de dicho objeto.

Por otro lado, Fischbein (1993) propone tres categorías de entidades mentales en lo que se refiere a figuras geométricas: *La definición, la imagen y el concepto figural*. Según Piéron, (citado por Fischbein, 1993) la definición de un objeto geométrico es la "representación simbólica (casi siempre verbal) que se utiliza en el proceso de pensamiento abstracto y que posee un significado general correspondiente a un conjunto de representaciones concretas, con respecto a lo que tienen en común"; en cambio, la imagen es la representación sensorial del objeto. Por otra parte, el concepto figural es un constructo manejado por el razonamiento matemático, desprovisto de características sensoriales pero que muestra las propiedades figurativas del objeto.

En otras palabras, el concepto figural es una imagen totalmente controlada por una definición, que es consecuencia de integrar la teoría (definición) y lo figural (imagen).

Al momento de realizar una tarea geométrica, lo ideal sería usar este constructo pero, normalmente, es la imagen asociada al concepto la que predomina. Por esta razón, en ocasiones el aprendiz no es capaz de elaborar secuencias que den respuesta a las exigencias de la tarea, dada la escaza comprensión del objeto geométrico involucrado.

Estos referentes teóricos nos permiten identificar las causas por las cuales el profesor realiza una construcción inconsistente de un trapecio en un entorno de GeoGebra. Dado que la construcción del dibujo requiere del establecimiento de una secuencia de pasos (reflejada en el uso de primitivas del programa), consideramos la inconsistencia de un

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

dibujo geométrico como una consecuencia del predominio del aspecto figural del objeto representado sobre lo conceptual, en la conformación del concepto por parte del profesor.

METODOLOGÍA

Esta investigación contó con la participaron de veintiún profesores de Matemática en ejercicio que cursaron un taller de formación en la "Enseñanza de Cuadriláteros con GeoGebra", ofrecido por el Grupo TEM en diciembre de 2012. El taller buscaba mejorar la comprensión de los participantes en cuanto a las características y propiedades básicas de los cuadriláteros. Durante su desarrollo, los participantes debían utilizar el GeoGebra para resolver un conjunto de tareas de construcción referidas a los contenidos mencionados (ver Figura 1).

PARTE I. TAREAS DE CONSTRUCCIÓN DE CUADRILÁTEROS

Tareas de trapecios

1. La base mayor de un trapecio isósceles mide 12 cm, su altura es de 4 cm y sus diagonales miden 9 cm. Construye el trapecio y describe los pasos que has utilizado para construirlo: ____________________

   ____

   ____

   ____

Figura 1. Ejemplo de tarea de construcción de trapecios con GeoGebra

La resolución de una tarea de este tipo se acompañaba de la explicación de algún participante de la secuencia de pasos para lograr un dibujo que cumpliera con las condiciones dadas. Las explicaciones ofrecidas por los participantes fueron grabadas en video con la intención de capturar el desarrollo del momento. Los datos de la investigación proceden de las respuestas de los participantes al momento de las explicaciones. Consideramos que una respuesta del profesor está compuesta de un archivo GeoGebra (dibujo elaborado) y de la explicación correspondiente a su construcción. Específicamente se analizó la respuesta de un profesor a la tarea mostrada en la figura 1, para lo cual éste elaboró un dibujo inconsistente del trapecio. Para conservar el anonimato de este profesor, nos referiremos a él como Juan.

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

El procedimiento de análisis de los datos se realizó en dos fases. En la primera fase se analizó la construcción mostrada en el archivo GeoGebra con el propósito de (i) determinar el número de pasos de la secuencia, las primitivas de construcción utilizadas y las relaciones entre éstas para efectos de la construcción, e (ii) identificar aquellos pasos donde se aprecian decisiones incorrectas del profesor que añaden al dibujo características espaciales impropias en relación a la teoría geométrica. En la segunda fase se analizó la explicación del profesor, centrando la atención en las razones de los pasos incorrectos detectados en la fase anterior, con el fin de identificar el atributo figural añadido al objeto geométrico que no corresponde con éste y determinar así las implicaciones de su conocimiento sobre la construcción.

RESULTADOS

Juan se dispuso a construir un trapecio con GeoGebra cuya base mayor midiera 12 cm, sus diagonales 9 cm y su altura 4 cm. En su construcción, Juan procede de la siguiente manera (ver Cuadro 1):

Cuadro 1: Secuencia de pasos asociada a la tarea propuesta a Juan

Paso N°	Primitiva del GeoGebra usada	Descripción del uso
1	Segmento de Longitud Fija	Dibuja el segmento $\overline{AB}$ de 12 cm de longitud.
2	Circunferencia dados su Centro y Radio	Dibuja una circunferencia centrada en A y de radio igual a 9 cm.
3	Circunferencia dados su Centro y Radio	Dibuja una circunferencia centrada en B y de radio igual a 9 cm.
4	Intersección de Dos Objetos	Determina los puntos C y D de intersección entre las circunferencias centradas en A y en B.
5	Recta que pasa por Dos Puntos	Traza la recta $\overleftrightarrow{CD}$.
6	Intersección de Dos Objetos	Determina el punto E de intersección de $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overline{AB}$.
7	Circunferencia dados su Centro y Radio	Dibuja una circunferencia centrada en E y de radio igual a 4 cm.
8	Intersección de Dos Objetos	Determina los puntos F y G de intersección entre $\overleftrightarrow{CD}$ y la circunferencia centrada en E.
9	Tangentes	Traza la recta tangente a la circunferencia de centro E por el punto G.

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

10	Intersección de Dos Objetos	Determina el punto H de intersección de las circunferencias centradas en B y en E.
11	Intersección de Dos Objetos	Determina el punto I de intersección de las circunferencias centradas en A y en E.
12	Polígono	Dibuja el cuadrilátero $AHIB$.

Durante su explicación, Juan reconoce que este procedimiento no le condujo a un dibujo representativo de un trapecio con las condiciones dadas (ver Figura 2), lo cual confirmó al usar la herramienta *Distancia o Longitud* para medir la altura del cuadrilátero construido. El análisis de la secuencia permitió identificar una decisión de construcción incorrecta de Juan, situada en los pasos 10 y 11.

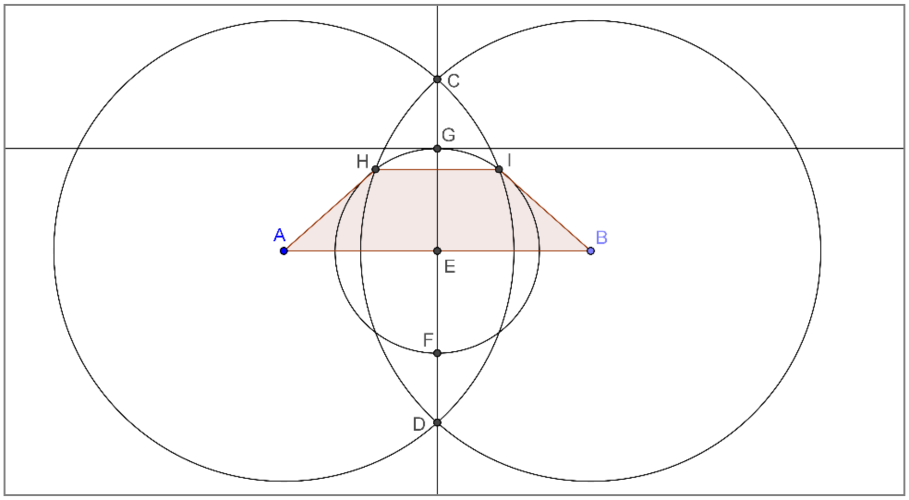

Figura 2. Dibujo del trapecio elaborado por Juan

La explicación dada por Juan respecto de los pasos 10 y 11 permite inferir que el profesor culminó su construcción tomando en cuenta sólo la condición de la tarea referida a las diagonales del trapecio, ignorando la altura que éste debía tener. Específicamente, Juan sostuvo lo siguiente: "*elegí esos puntos (H e I) porque las diagonales del trapecio que se forma miden 9 centímetros*".

DISCUSIÓN

En este caso, el profesor pone de manifiesto el uso de su conocimiento sobre las diagonales y la altura de los trapecios al momento de establecer la secuencia de pasos de construcción con el GeoGebra. Tal conocimiento se muestra vinculado a la imagen

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

del concepto del profesor sobre los objetos evocados, la cual a su vez parece ser más completa para el caso de las diagonales del trapecio que para la altura del mismo, predominando así la primera sobre la segunda al momento de realizar la tarea.

Juan, al final de su construcción, desvía su atención de la recta tangente a la circunferencia centrada en E, a otros objetos auxiliares de la construcción que no eran importantes para el momento, lo cual hace imposible que el dibujo obtenido sea consistente. Estudiando la secuencia de pasos seguida por Juan se pudo apreciar su capacidad de ubicar en forma separada los vértices faltantes para las condiciones de la tarea referidas a (i) las diagonales y (ii) la altura del trapecio. Sin embargo, la dificultad del profesor se manifiesta al momento de establecer las relaciones necesarias para integrar los dos requerimientos dados en un solo dibujo. Lo anterior puede deberse a que el participante posee vínculos fuertes entre la definición del concepto de diagonales y la imagen mental de las mismas, pero los establecidos entre la definición del concepto de altura de un trapecio y su respectiva imagen mental son débiles para generar el razonamiento necesario que permita culminar satisfactoriamente la tarea. Es por esto que al momento de hallar los puntos H e I Juan hace caso omiso de la recta construida en el paso anterior, predominando el concepto de diagonal sobre el de altura.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

A través de esta investigación pudimos concluir que el éxito en el proceso de construcción de un cuadrilátero con GeoGebra yace en el hecho de poseer una imagen del concepto en cuestión “completa”. En este sentido, para construir un trapecio no es suficiente con la memorización de algunas de sus características y propiedades básicas, sino que además se necesita transferir esa información a un contexto más “visual” y transformarla en una herramienta útil para tomar decisiones sobre la secuencia de pasos con GeoGebra que conduzcan a una construcción consistente con los datos iniciales. Lamentablemente, muchos de los profesores que participan en nuestros talleres llegan con imágenes del concepto muy precarias que les imposibilitan la tarea de realizar construcciones en GeoGebra que soporten la prueba del arrastre.

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

Sería recomendable entonces insistir en una mayor interacción con las posibles imágenes de los objetos geométricos que deben ser enseñados, que ayude a los profesores a reconocer las características y propiedades verdaderamente pertinentes para el estudio que se realice, con el propósito de enriquecer cada vez más la imagen del concepto que se tenga. Esto sugiere que los profesores sean sometidos a experiencias formativas en las cuales deban reflexionar sobre las características esenciales de los objetos geométricos escolares, como una forma de ampliar su comprensión de estos objetos y garantizar una enseñanza mucho más eficaz con sus alumnos.

Éste es uno de los aspectos donde la tecnología aventaja considerablemente al clásico entorno de regla y compás, puesto que con sólo arrastrar alguna construcción por uno de sus puntos es posible, no sólo estudiar la consistencia del dibujo obtenido con la teoría geométrica, sino también mostrar al aprendiz cientos de dibujos del objeto en un corto tiempo y de una manera muy sencilla. Quizás de esto se derive la idea de que mientras más representaciones poseamos de un objeto geométrico, más conocemos al objeto en sí.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Carreño, E. y Climent, N. (2010). Conocimiento del contenido sobre polígonos de estudiantes para profesor de matemática. *PNA*, 5(1), pp. 11-23.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de magisterio. En J. Giménez y otros (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria,* pp. 143-170. Granada: Comares.

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, pp. 139-162.

Laborde, C. (1997). Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría. En L. Puig (Ed.), *Investigar y Enseñar. Variedades de la Educación Matemática*, pp. 33-48. México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamericana.

ISBN: LSX068-2014-370658
Depósito legal: ISX 7092015510454

Rubio, L. Y Prieto, J.L. (2012). Conocimiento geométrico de los profesores y resolución de tareas de construcción de paralelogramos con GeoGebra. Trabajo presentado en la *Conferencia Latinoamericana de GeoGebra*, Noviembre, Montevideo. Disponible en: http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/24.pdf.