

## **TRES TIPOS DE OBSTÁCULOS EN LA ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS**

*Carlos E. Correa J., Gonzalo F. Morales L.*  
UTPL. Ecuador  
cecorrea@utpl.edu.ec, gfmorales@utpl.edu.ec

**Palabras clave:** Obstáculos epistemológicos. Obstáculos ontogenéticos. Obstáculos didácticos.

### **Resumen**

El proceso educativo se lleva a cabo en un ambiente de relación entre personas. En esta relación, hay momentos en que una persona ejerce de emisor de la comunicación y otra persona lo hace como receptor de la misma. Los problemas de la comunicación pueden deberse al emisor, al receptor y/o al carácter del mensaje o información.

Muchas veces la información recibida es bien comprendida por el receptor. Sin embargo, al extrapolar esa información, se aplica a situaciones en que ya no tiene validez, por lo que se cometen errores inductivos por parte del receptor. Son los errores de origen epistemológico. Si el receptor no ha llegado al grado de maduración que se requiere para comprender y asimilar una información, va a caer en errores de origen ontogenético, que solamente los superará madurando neurofisiológicamente, es decir, madurando en edad y madurando en el desarrollo intelectual.

Finalmente, existen los errores de origen didáctico, los cuales se producen por una errónea información por parte del emisor, que bien pueden provenir del texto como del profesor.

### **Introducción**

Un aspecto importante en la enseñanza de las matemáticas es el atinente a los obstáculos de diversa naturaleza que se presentan y que conducen a errores de diferente orden. Descubrir el origen y las características de esos errores permitirá encontrar caminos pertinentes para su eliminación, así como reorientar las acciones de aula con propuestas didácticas más apropiadas. Nos vamos a referir aquí a tres tipos de obstáculos relacionados con su origen, sin que esto signifique agotar todas las posibilidades.

Ruiz (2003), a más de señalar que la teoría sobre los obstáculos epistemológicos tiene sus raíces en la obra del filósofo y epistemólogo Bachelard (1983), cita a Brousseau (1998) como el primero que introduce la noción de obstáculo en la didáctica de las matemáticas. Tomamos de ella la clasificación para hablar de los obstáculos de origen epistemológico, los de origen ontogenético y los de origen didáctico.

### **Obstáculos de origen epistemológico**

Los obstáculos de origen epistemológico están ligados al trabajo de construcción del conocimiento y los saberes matemáticos, especialmente aquellos que tienen que ver con la simbolización o, lo que llamaríamos, la sintaxis y la significación en matemáticas. El “lenguaje” específico utilizado en un determinado campo se lo traslada y se lo aplica mecánicamente en otro campo. Veamos unos ejemplos.

La experiencia con números naturales nos lleva a concluir que el cuadrado de un número es mayor o igual que dicho número. Y en realidad, solamente para el 1 su cuadrado es igual, mientras que para los demás casos, el cuadrado es mayor que el número. Este conocimiento, que es correcto en este caso, se convierte en un error cuando se trata de números decimales positivos menores que 1, como el caso de 0,3 cuyo cuadrado es 0,09.

Cuando se trata de la raíz cuadrada de un número se comete el error inverso, ya que se aplica el conocimiento correcto de que la raíz cuadrada de todo número natural es menor o igual que el número, a números decimales positivos menores que 1, en que ya no se puede decir lo mismo.

Al enseñar la escritura de números fraccionarios mixtos, el profesor indica que el número cinco enteros y dos tercios se escribe así:

$$5 \frac{2}{3}.$$

Mas, cuando se inicia el estudio del álgebra, una escritura como

$$a \ b/c$$

indica multiplicación de a por b/c, de tal forma que, siendo la misma estructura de simbolización en ambos casos, su significado es diferente, lo cual provoca una confusión persistente en los estudiantes no muy atentos a esa diferencia de significado. Quizás, entonces, sea más preciso escribir  $5 + \frac{2}{3}$  que  $5 \frac{2}{3}$ .

En este mismo orden de cosas podemos hablar de la confusión entre expresiones como  $fx^2$ ;  $f^2 x^2$ ;  $(fx)^2$ ;  $f(x)$ ;  $[f(x)]^2$ ;  $f(x^2)$ . Y también aquellas en trigonometría:  $\text{sen } x$ ;  $\text{sen}^2 x$ ;  $\text{sen } x^2$ ;  $(\text{sen } x)^2$ ;  $\text{sen}^2 x^2$ ;  $\text{sen}(x+y)$ ;  $\text{sen } x + y$ ;  $\text{sen } x + \text{sen } y$ ; etc., o en los referentes a funciones logarítmicas:  $\log(x+y)$ ;  $\log x + \log y$ ;  $\log x + y$ ;  $\log x^n$ ;  $(\log x)^n$ ;  $L(x)$ ;  $L(x)^n$ ;  $\{L(x)\}^n$ ; etc., en que algunas formas son idénticas en su estructura pero tienen diferente significación o, son diferentes en su forma pero expresan lo mismo. No es raro que se repita continuamente el error de escribir

$$(\text{sen } x)^2 = \text{sen}^2 x^2$$

porque se toma como modelo la expresión

$$(ab)^2 = a^2 b^2.$$

En sí mismo, se considera que la expresión  $\text{sen } x$  representa la multiplicación de dos cantidades: **sen** y **x**, como acertadamente ocurre con  $ab$ .

En el estudio del álgebra ordinaria, los estudiantes llegan al conocimiento de que

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Este conocimiento, que es válido en ese campo, se convierte en un obstáculo cuando se refiere al campo de las matrices, pues se trata de una estructura algebraica diferente en la que no hay la propiedad conmutativa del producto de matrices. El estudiante deberá familiarizarse con los nuevos conceptos para entender que, en matrices,

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$\text{o que } (A - B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2;$$

expresiones en las cuales los productos  $AB$  y  $BA$  no son, necesariamente, iguales y no se las puede reducir. También ocurre que si  $AB = O$  no necesariamente implica que  $A = O$  o que  $B = O$ , como sí ocurre en álgebra ordinaria.

Al tratar los diferentes sistemas de numeración, surge también un obstáculo debido al manejo exclusivo de la base decimal, que conforma la idea de que el significado de los numerales es absoluto, lo que dificulta entender el significado de los símbolos en otra base. A un buen porcentaje de estudiantes les resulta incómodo entender un número como el 101 en base 2 porque están tan adaptados a leer en base 10 que funden en un solo concepto el número y el numeral.

En aritmética surgen obstáculos del mismo orden en casos como:  $3/7 + 2$  en que se suma el 3 y el 2 y se coloca el mismo denominador 7. O en la suma  $3/5 + 2/7$  en que se suele sumar numeradores y denominadores entre sí, colocando como respuesta  $5/12$ .

En la literatura sobre juegos matemáticos se suele encontrar una alusión a un error debido al olvido de una restricción de la ley cancelativa de la multiplicación. Se trata de lo siguiente: Demostrar que  $2 = 1$ .

Para ello, se procede de la siguiente manera:

Sea  $a = b$ .

Multiplicando ambos miembros por  $a$ :  $a^2 = ab$ .

Restamos ahora  $b^2$  en ambos miembros y obtenemos:  $a^2 - b^2 = ab - b^2$ .

Procedemos a factorar ambos miembros:  $(a + b)(a - b) = b(a - b)$ .

Cancelamos el factor  $a - b$  en ambos miembros y nos queda:  $a + b = b$ .

Si ahora hacemos  $a = b = 1$ , tenemos que  $1 + 1 = 1$ , es decir,  $2 = 1$  que era lo que queríamos demostrar.

Verdaderamente, la deducción es impecable. Solamente que hay un error epistemológico: la ley cancelativa tiene una restricción: no se puede cancelar el factor cuando es cero. Y, si hemos partido del supuesto de que  $a = b$ , entonces el factor  $a - b$  es igual a cero, con lo cual no hay cómo aplicar esta ley.

Podríamos agregar los errores derivados de la concepción única de una operación, por ejemplo la resta no es sólo quitar, también puede entenderse como completar, no responde sólo a la pregunta ¿si a 7 le quitamos 5 cuanto queda? Sino también cuanto le falta a 5 para llegar a 7. Esto ocurre también con las demás operaciones inversas de división y raíz.

En todos estos casos, los errores cometidos no se deben en manera alguna a falta de conocimiento. La razón de la confusión está más bien en la aplicación de conceptos, procedimientos, principios, leyes, axiomas, escritura y significados que son válidos en un campo, pero que se vuelven inaplicables en otros campos porque cambian de significación o porque hay restricciones. El grado de persistencia de estos errores es tal que se requiere de una reorientación igual de persistente que empiece por diferenciar de manera clara los conceptos, procedimientos, restricciones, involucrados y los campos en que son aplicables.

### **Obstáculos de origen ontogenético**

Los obstáculos de origen ontogenético están ligados al desarrollo neurofisiológico de los sujetos (Ruiz, 2003). Según los estudios, especialmente de Piaget (1979), existe una evolución genética de las estructuras mentales mediante etapas diferenciadas pero continuas. Así, por ejemplo, damos a un niño dos bolitas de pasta para modelar de las mismas

dimensiones y peso. A una de ellas se la convierte en una especie de salchicha. Pues bien, el niño cree que la cantidad de materia ha variado, al igual que el peso y el volumen. Hacia los 7 años admite la conservación de la materia. Hacia los 9 reconoce la conservación del peso. Y hacia los 11 años reconoce la conservación del volumen.

Castelnuovo (1970) hace referencia a otra situación similar: se presenta al niño dos recipientes cilíndricos de vidrio iguales, conteniendo uno agua roja y el otro agua azul, al mismo nivel. Si se traslada el agua del segundo recipiente a un tercero también de vidrio pero más delgado, y si se le pregunta al niño si el primero y el tercer recipiente contienen la misma cantidad de agua, dirá que no. El sentido de conservación de la masa llegará a una edad de siete años, más o menos.

Uno de los ponentes recuerda la conversación sostenida con un amigo en la que reclamaba la falta de comprensión de una profesora de los primeros años. La profesora había colocado en la pizarra un 5 pequeño y un 2 grande. Luego les preguntó a las niñas ¿cuál de los dos números es mayor? Las niñas contestaban que el 2 y la profesora no lograba hacerles entender que el 5 es mayor que el 2. Si la profesora hubiera comprendido que una cosa es el significante (es decir, el símbolo, el numeral) y otra es el significado (el número), hubiera estado en mejores condiciones de indicar la diferencia de categorías y conceptos y de afrontar la situación.

Pero ahora veo algo que todavía en ese momento de la conversación no lo vi: al igual que la noción de conservación de la materia, debe haber una edad antes de la cual no será posible distinguir las nociones de significado y de significante y sería inútil pretender que los niños las comprendan, pues no se ha formado aún en ellos la estructura mental que permita hacer la diferencia. Con el paso del tiempo, estas nociones asoman en los niños de manera “natural”. Queda planteado este problema de tipo ontogenético para una investigación al respecto.

Ruiz (2003) alude a un ejemplo propuesto por Briand, J, y Chevalier, M. C. (1995) referente a la conservación de las colecciones de los objetos, que dice:

“Dadas las dos situaciones siguientes:

Colección A	Colección A
0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0
Colección B	Colección B
0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0

alumnos de una determinada edad admiten perfectamente que, en la primera situación, las dos colecciones A y B tienen la misma cantidad de elementos, mientras que en la segunda, sólo por tener la colección B sus elementos más expandidos, les conduce a afirmar que la cantidad de elementos de B es mayor que la de A. En este caso, la percepción espacial de la colección se impone a la lógica numérica. Se trata de errores cometidos por alumnos que están en un estadio del desarrollo cognitivo caracterizado por la falta de conservación de las cantidades”.

Independientemente de las críticas que puedan hacerse a la teoría de Piaget, es claro que hay etapas de formación de las estructuras del pensamiento. Por ejemplo: no es posible que un niño de 7 años pueda realizar una argumentación abstracta, de tipo lógico-formal, así como tampoco es posible que un niño de dos años pueda comprender el concepto de número u oración gramatical.

### Obstáculos de origen didáctico

Hay también obstáculos de origen didáctico. Son aquellos que se producen en el ejercicio y las decisiones del docente o en el tratamiento generalizado de ciertos temas, así como en la presentación de los temas en los textos escolares. Pueden surgir debido a la dificultad de explicación o a la falta de comprensión de los conceptos, las nociones, los procedimientos, etc., por parte de los docentes y de los autores.

He aquí un procedimiento que provoca confusiones en los estudiantes y que se encuentra hasta en los textos de matemáticas. Se trata de la resolución de ecuaciones. Muy pocos profesores y muy pocos textos la explican desde los axiomas de las igualdades. Más bien se dan “reglas” entre las que se cuenta aquella de que “cuando se pasa una cantidad de un miembro a otro, se la pasa con signo contrario”.

En primer lugar, nunca se hace una distinción entre los signos de cantidad (+ y -) y los signos de operación (+, -, x, /, etc.). Así, el estudiante cambia el signo del coeficiente al “pasarlo” de un miembro a otro y, de la igualdad

$$2x = 7,$$

deduce la siguiente:

$$x = 7 - 2,$$

$$\text{o también: } x = 7 / -2.$$

Una explicación más aclaratoria sería si a la regla se la enuncia así: “cuando se pasa una cantidad de un miembro a otro, se la pasa con el *signo de la operación contraria*”. O mejor aún: “cuando se pasa una cantidad de un miembro a otro, se la pasa haciendo *la operación inversa*”.

Pero esto es solamente cortar el nudo gordiano y no resolverlo. El problema de fondo estriba en que se aplica una regla “práctica” que elimina el razonamiento deductivo para introducir un concepto arbitrario que no tiene ningún apoyo matemático, lo cual trataré de explicar a continuación.

Una igualdad matemática expresa la equivalencia de dos valores. Este concepto tiene un ejemplo o equivalencia física en el equilibrio de una balanza de dos platillos. Nuestra experiencia sensorial nos permite captar los axiomas que luego serán aplicados en la igualdad matemática, por ejemplo: si sumamos un mismo peso (o masa) a los dos platillos de la balanza, se mantendrá el equilibrio. Igual cosa si restamos pesos iguales en cada platillo. Axiomas que los podemos generalizar, con las restricciones del caso, de la siguiente manera: “si hacemos una misma operación en los dos platillos de la balanza, se mantendrá el equilibrio”.

Ahora bien, es artificioso e incomprensible sostener que se pueda “pasar” pesos de un platillo a otro sin que se altere el equilibrio. De cualquier manera que se haga ese “pase”. Y, consecuentemente, lo mismo ocurre con una igualdad matemática. La falta del conocimiento o del manejo de los axiomas de las igualdades ha hecho que se invente una regla “práctica” que introduce tergiversaciones en los conceptos matemáticos. Claro que una regla como la indicada ayuda a salir del paso a los docentes. Pero genera conocimientos, conceptos y procedimientos totalmente alejados del correcto manejo de las matemáticas.

Tomemos la ecuación

$$3x + 7 = 13.$$

La analogía de esta igualdad con una balanza de dos platillos nos permite decir que en un platillo hay 3 pesas iguales desconocidas y una pesa de 7 unidades, mientras que en el otro platillo hay una pesa de 13 unidades. Podemos, entonces, retirar 7 unidades de cada platillo sin que se altere el equilibrio. Matemáticamente lo expresamos así:

$$3x + 7 - 7 = 13 - 7$$

que, luego de realizar operaciones, queda:

$$3x = 6.$$

Si ahora tomamos la tercera parte de cada platillo, es decir, una de las pesas desconocidas en el primer platillo y la tercera parte de 6 en el segundo platillo, no se perderá el equilibrio de la balanza y lo expresaremos así:

$$3x / 3 = 6 / 3,$$

es decir,  $x = 2$ .

Las reglas “prácticas” no expresan, muchas veces, lo que realmente se quiere que expresen. Y aun en el caso de que estén bien construidas, su utilización propende a un aprendizaje mecánico y memorístico, alejado del conocimiento ágil, razonado, metódico, deductivo, creativo, de las matemáticas. Una pequeña confusión en la aplicación de la regla y los resultados serán totalmente equivocados. Mientras que el conocimiento de los axiomas y el manejo adecuado de los mismos, permite, no solamente resolver acertadamente las ecuaciones, sino la formación de un razonamiento deductivo que podrá ser aplicado a diferentes circunstancias, habilitando al estudiante para que pueda llegar al estadio de desarrollo cognitivo que le corresponde.

Podríamos poner también el ejemplo de la resta vertical, donde, cuando no alcanza la cifra del minuendo para restar la cifra del sustraendo se pide “prestado” de la cifra siguiente, en el siguiente paso esa unidad que se pidió al minuendo se la devuelve al sustraendo aumentándolo en 1, lo correcto sería no hablar de “préstamo” sino restarle 1 a la cifra del minuendo puesto que ya se la consideró para aumentar la cifra anterior.

Otro error didáctico que podemos encontrar hasta en libros muy serios de matemáticas es el que se refiere a los ejes del plano cartesiano. Sabemos que el conjunto de los reales es un conjunto ordenado que va desde  $-\infty$  hasta  $+\infty$ , es decir, hay un solo sentido. Por otro lado, la recta numérica es una recta dirigida, por lo que tiene también un solo sentido de los

dos que puede tener una recta, lo cual se simboliza con una cabeza de flecha hacia uno de los lados. Convencionalmente, se ha considerado la escala horizontal o eje de las  $x$  con sentido hacia la derecha.

Por lo tanto, solamente se debe colocar la cabeza de flecha hacia la derecha. Sin embargo, hay docentes y libros que colocan la cabeza de flecha en los dos sentidos, lo cual lleva a pensar al estudiante que los números negativos parten desde el cero y van hacia la izquierda y que los números positivos parten desde el cero y van hacia la derecha. Esto lo coloca al cero como doble punto de partida dando lugar a una construcción mental que lleva a equívocos como, por ejemplo, pensar que el  $-8$  es mayor que el  $-3$  porque está más distante de cero. Igual cosa ocurre con el eje vertical.

En el tema de conjuntos podemos encontrar algunos errores como los siguientes:

**a) La determinación de un conjunto.** Cuando se trata de determinar un conjunto, los docentes suelen proponer ejemplos como los siguientes: el conjunto de ideas de una persona; la naturaleza es un conjunto; el conjunto de agua de un recipiente. En ninguno de estos ejemplos se encuentra bien determinado el conjunto porque tampoco están bien determinados los elementos concretos que pertenecen al conjunto.

**b) La definición de conjunto infinito.** Se suele confundir un conjunto infinito con un conjunto numeroso cuyos elementos no se avanzan a contar, es decir, la confusión se basa en la imposibilidad física de contar los elementos. Se propone, entonces, equivocadamente, el ejemplo de los granos de arena o el conjunto de las gotas de agua del mar como conjuntos infinitos.

¿Qué decir del conjunto de las estrellas del firmamento? ¿Es finito o infinito? La respuesta depende de si el universo es finito o infinito, respectivamente. Según cálculos de científicos, se ha llegado a determinar que el universo está constituido por alrededor de  $10^{82}$  átomos. De ser así, el conjunto de las estrellas del universo sería finito, aunque su número sería sumamente grande.

No solamente surge el error de confundir un conjunto numeroso con un conjunto infinito debido a la imposibilidad de contar sus elementos, sino también cuando se piensa que un conjunto está creciendo continuamente, lo cual es equivocado, ya que es necesario considerar estático al conjunto. Así, se da como ejemplo de conjunto infinito el conjunto de plantas del planeta, porque se piensa que continuamente está creciendo el número de ellas.

**c) La definición de subconjunto.** El error proviene de confundir un elemento (que se lo debe considerar indivisible como elemento) y las partes de ese elemento cuando en un segundo momento se lo define como conjunto. Por ejemplo: si se considera el conjunto unitario  $A = \{\text{árbol}\}$ , es costumbre proponer subconjuntos como  $B = \{\text{ramas, raíces, frutos, flores}\}$  en donde el conjunto  $B$  sería:  $\{\text{partes del árbol}\}$ . Realmente solo se pueden determinar 2 subconjuntos de  $A$ : el conjunto vacío y el conjunto  $\{\text{árbol}\}$ . (Se supone que el conjunto  $A$  está bien definido puesto que se refiere a un árbol concreto. De otra manera, no estaría bien definido). La confusión proviene de considerar al árbol como elemento y como conjunto a la vez.

En este apartado, Ruiz hace alusión a que la presentación ostensiva que llevan a cabo los profesores de las figuras geométricas, constituye un verdadero obstáculo didáctico para los procesos de prueba y demostración en geometría. Los alumnos mantienen durante mucho tiempo una profunda confusión entre el simple dibujo que <muestra>, basta con mirar, y la construcción geométrica fundada en propiedades, proporciones y teoremas geométricos. (Ruiz, 2003, p. 54)

### **Conclusión**

Los conocimientos que adquirimos conforman en nosotros ciertas estructuras mentales que nos permiten luego utilizarlos en situaciones similares. Pero esta extrapolación no siempre es satisfactoria y aplicable y caemos en errores que, al no ser detectados y rectificadas tempranamente, se convierten en obstáculos difíciles de vencer y que indisponen el ánimo para continuar adelante. Estos errores son normales e inevitables y no debemos desalentarnos, especialmente nosotros como docentes. Lo correcto es enfrentarlos y descubrirlos. Así pues, cada vez que un estudiante nos dé una respuesta equivocada, busquemos qué y cómo es lo que ha entendido para poder reorientarlo adecuadamente. Ese análisis nos permitirá darnos cuenta del origen de ese obstáculo y proponer una explicación nueva que evite caer en el mismo error a nuevos estudiantes.

En el caso de los errores ontogenéticos, debemos tener presente que no todos los estudiantes tienen el mismo ritmo de crecimiento y desarrollo cognitivo. La presentación paciente, profusa y detallada de ejercicios y ejemplos permitirá una maduración de sus estructuras mentales.

Finalmente, los obstáculos de origen didáctico son los más lamentables, pues se supone que los docentes deberíamos estar preparados como para no caer en errores de esa naturaleza. En todo caso, la consulta en diferentes fuentes, los debates, los cursos de mejoramiento docente, la asistencia a eventos de todo orden, etc., nos ayudarán a rectificar nuestros errores y sustentar mejor nuestros conocimientos.

### **Referencias Bibliográficas**

- Bachelard, G. (1983). *La formación del espíritu científico*. México: Siglo XXI.
- Briand, J. & Chevalier, M. C. (1995). *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques*. París: Hatier.
- Brousseau G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- Castelnuovo. E. (1970). *Didáctica de la matemática moderna* (p. 23). México: Trillas.
- Piaget. J. (1979). *Seis estudios de psicología* (p. 72). Barcelona: Seix Barral.
- Ruiz. M. (2003). En Chamorro M. (Coord.) *Didáctica de las Matemáticas* (pp. 52 – 55). Madrid: Pearson Prentice Hall.