



# II CEMACYC

II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe

29 octubre al 1 noviembre. 2017

Cali, Colombia

[ii.cemacyc.org](http://ii.cemacyc.org)



CIAEM  
CME  
desde - since 1961



## Aprendizaje personalizado de las funciones trigonométricas en educación secundaria

Jesús **Vilchez** Guizado

Universidad Nacional Hermilio Valdizán de Huánuco

Perú

[vilchez.j@pucp.edu.pe](mailto:vilchez.j@pucp.edu.pe)

Julia Ángela **Ramón** Ortiz

Colegio de Aplicación Rural de la Universidad Nacional Hermilio Valdizán

Perú

[angelaramonortiz@gmail.com](mailto:angelaramonortiz@gmail.com)

### Resumen

Esta investigación tuvo como objetivo optimizar el proceso de aprendizaje de la matemática y el uso de herramientas tecnológicas por los estudiantes del quinto grado de secundaria en el tópico de funciones trigonométricas, a partir de los resultados de un diagnóstico integral de los sujetos, procesos y medios que intervienen en el proceso educativo. Para dar solución a la problemática identificada se plantea implementar una estrategia de aprendizaje personalizado; conjeturándose que su implementación permite un aprendizaje significativo del tema por los estudiantes. El marco teórico que sustenta el estudio fue el constructivismo pedagógico. El proceso metodológico seguido fue de investigación-acción. El trabajo de campo se inicia con una evaluación de requisitos, seguido de evaluaciones de proceso y se concluye con una evaluación de salida, cuyos resultados empíricos permiten que la estrategia didáctica implementada motiva, dinamiza y desarrolla actitudes positivas para el aprendizaje significativo de la trigonometría en los estudiantes.

**Palabras clave:** Aprendizaje personalizado, funciones trigonométricas, modelo de aprendizaje, aprendizaje significativo.

### Introducción

La investigación en educación matemática tiene dos propósitos principales, uno puro a fin de entender la naturaleza del pensamiento matemático, la enseñanza y el aprendizaje a fin de usar tales comprensiones para mejorar la instrucción de las matemáticas como un conjunto de ideas, conocimientos, procesos, actitudes y, en general, de actividades implicadas en la construcción, representación, transmisión y valoración del conocimiento matemático que tiene lugar con carácter intencional (Rico y Sierra, p.79).

El aprendizaje de las Matemáticas se produce, principalmente, a través de la confrontación con ejemplos, más que a través de definiciones formales y técnicas (de hecho, afirman, es a través de los ejemplos que las definiciones cobran algún sentido, ya que las palabras técnicas matemáticas describen clases de objetos o relaciones con los que el aprendiz debe familiarizarse). A través de ejemplos que satisfagan ciertas restricciones puede alentar a los estudiantes a extender su pensamiento más allá de los ejemplos “típicos”. Se ve una gran fuerza en su efectividad como estrategia de enseñanza cuando los estudiantes se enfrentan a una nueva definición. Además, proponen grupos de tareas que requieran que los estudiantes generen ejemplos con combinaciones dadas de propiedades (Watson y Mason, 2005).

Uno de los tópicos más importantes pero a la vez que trae consigo dificultades para la asimilación de los conceptos y propiedades es el referido a las funciones trascendentes, de éstas, siendo el de mayor importancia en el nivel básico las funciones trigonométricas. En la realidad educativa donde se realiza el estudio, existen falencias en los actores del proceso educativo, tanto en el docente de matemática como en el estudiante.

Los *estudiantes muestran serias deficiencias en:* comprensión de lenguaje simbólico de la matemática, diferenciar una función de una relación, identificar el dominio y rango de una función, identificar relaciones de simetría entre puntos del plano cartesiano, trazar la gráfica de una función real, identificar las funciones pares e impares, periódicas y monótonas, entre otras...

*La mayoría de los docentes* inician el estudio de las funciones trigonométricas, en forma algorítmica, como razón entre los lados de un triángulo rectángulo, con escaso análisis de sus propiedades; no utilizan textos actualizados del nivel medio y superior para reforzar sus conocimientos; no hacen uso de conocimientos previos para abordar el tema, tampoco propician estrategias de aprendizaje activo, en la etapa de fijación de tareas propician aprendizajes colaborativos; también utilizan en forma esporádica las TIC para dinamizar el aprendizaje.

Por ello, el presente trabajo está enfocado a desarrollar una propuesta didáctica orientado al aprendizaje personalizado de las funciones trigonométricas. En esta estrategia se toma en cuenta que los estudiantes aprenden de diferentes maneras y a diferentes ritmos. Cada estudiante tiene un “plan de aprendizaje” basado en cómo aprende, lo que sabe y en cuáles son sus habilidades e intereses de los estudiantes como sujetos del proceso de aprendizaje. Colaboran con sus profesores para establecer metas tanto a corto como a largo plazo, y están a cargo de su aprendizaje.

El proceso de aprendizaje personalizado, contempla cuatro modelos: los que utilizan el perfil del estudiante, que mantiene un registro actualizado de las destrezas, necesidades, motivaciones y metas de cada estudiante que ayudan a los maestros a entender a sus estudiantes, también los ayudan a tomar decisiones para tener un impacto positivo en el aprendizaje del estudiante; los que utilizan rutas de aprendizaje personalizado, donde se tiene expectativas altas de cada estudiante, busca cómo cada estudiante logra satisfacer sus expectativas, aquí los estudiantes pueden elegir cómo aprenden y tienen múltiples opciones para completar una tarea con la supervisión permanente del docente; los que consideran que el progreso se basa en la aptitud, evalúa a los estudiantes continuamente para supervisar su progreso hacia metas específicas, permite que el estudiante avance y reciba crédito al demostrar que es capaz de hacer lo que se propone y desarrollar varias habilidades al mismo tiempo; los que utilizan lugares de aprendizaje flexibles, adapta el lugar donde los estudiantes aprenden basándose en cómo aprenden mejor, incluye cosas como las condiciones físicas del salón de clases, cómo se asignan los maestros y cómo está estructurado el día escolar, (Morín, s/a).

En la estrategia didáctica implementada para el aprendizaje de las funciones trigonométricas se tuvo en cuenta, como referencia, los cuatro modelos del aprendizaje personalizado, la misma que fue importante para motivar, dinamizar y facilitar en los estudiantes el proceso de aprendizaje y posibilitar su participación activa en los distintos escenarios educativos, tales como en la asimilación del lenguaje algebraico, desarrollo de procesos inductivos y deductivos en el aprendizaje, la interpretación del lenguaje gráfico, resolución de ejercicios y en las evaluaciones. El desarrollo de los contenidos matemáticos que permitieron a los estudiantes la asimilación de definiciones, propiedades, teoremas, algoritmos y procedimientos analíticos, tuvo una secuencia sistémica como se muestra en la figura 1.

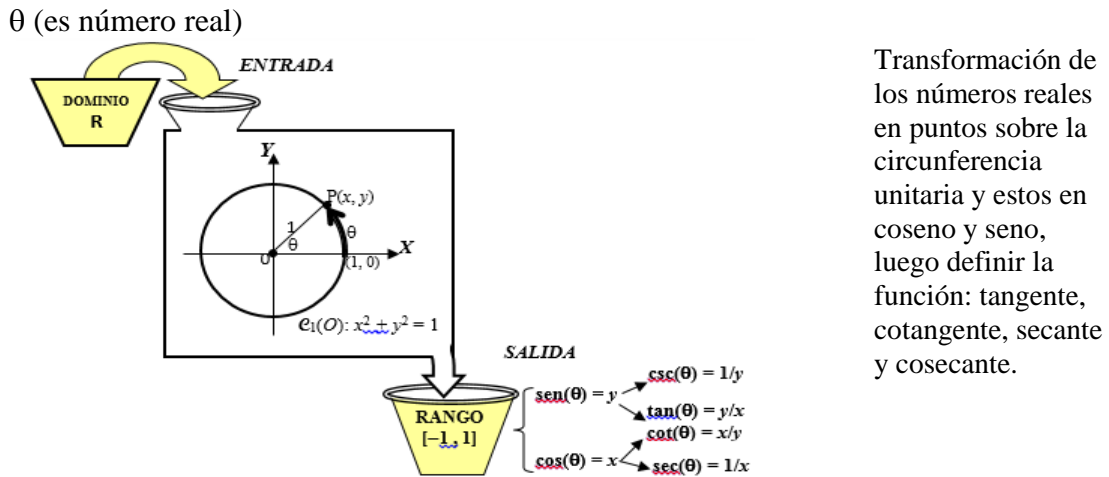


Figura 1. Máquina productora de las funciones seno y coseno de  $\mathbf{R}$  en  $[-1, 1]$

Los estudiantes de la secundaria, actualmente tienen una inclinación hacia la representación gráfica de las funciones, interactuando en forma permanente con los recursos tecnológicos. La intención de este trabajo no es solo presentar una estrategia de aprendizaje personalizado, sino también analizar el efecto del uso de herramientas tecnológicas y la práctica de trabajos colaborativos; la presentación del tema sigue una secuencia diferente a lo habitual, propicia el autoestudio y el trabajo personalizado en clase a través de actividades diseñados para un estudio eficiente de las funciones trigonométricas de manera algebraica, analítica y gráfica.

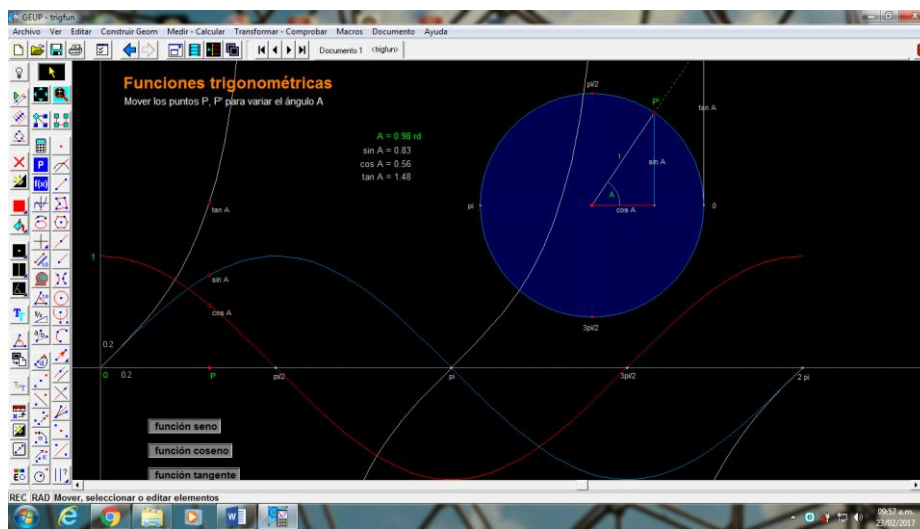


Figura 2. Gráfica de la función coseno, seno y tangente en correspondencia con puntos sobre la circunferencia unitaria.

## Metodología

Teniendo en cuenta la clasificación hecha por Sierra Bravo (2007), el tipo de investigación desde el **grado de abstracción** es una investigación **descriptiva** ya que su principal objetivo se basa en describir y analizar el desempeño académico de los estudiantes durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de la trigonometría. En el **grado de generalización** es una **investigación acción**, porque se centra en generar cambios en el proceso de aprendizaje y no coloca tanto énfasis en lo teórico. Trata de unir la investigación con la práctica a través de la resolución de problemas haciendo el uso pertinente del software matemático. Con **relación al tiempo** es una investigación **sincrónica**, puesto que se hace un estudio analítico de la evolución del proceso didáctico en seis sesiones de clase. Con **relación al lugar** es una investigación **de campo** porque se centró en hacer el estudio donde el fenómeno se da de manera natural.

El trabajo de campo estuvo sustentado en la realización de actividades tanto del profesor como del alumno, donde cada uno cumplen sus roles de acuerdo a un plan previamente establecido, con la finalidad de lograr aprendizaje más eficiente de los estudiantes. En la investigación interviene un conjunto de tradiciones y métodos que conlleva en todo momento reflexionar sobre nuestra práctica pedagógica permitiendo la administración y la solución de problemas del proceso de aprendizaje, desde una perspectiva metodológica participativa, a través de una propuesta pedagógica alternativa, basado en un plan de acción, la misma que permitió superar los problemas detectados en el ámbito pedagógico y académico, Tójar (2006).

El proceso de investigación tuvo tres etapas bien marcadas y concatenadas: *planificación y diseño de contenidos y la estrategia didáctica, proceso de implementación y desarrollo de actividades*. El trabajo de campo de la experiencia se llevó a cabo durante el segundo semestre del año escolar en concordancia con el currículo escolar y estuvo a cargo de los docentes investigadores. La aplicación de la propuesta se rige exclusivamente, por las sesiones que se formulan a través de materiales impresos con tratamiento personalizado; la misma que sirve de guía al docente a lo largo de todo el periodo de la intervención, orientando su trabajo diario de clase, la utilización de los recursos tecnológicos son principalmente para identificar algebraica y gráficamente propiedades de las funciones trigonométricas. Para el diseño, recolección de información, análisis de datos, ejecución, y posterior evaluación de la propuesta.

Para la recolección de información sobre el proceso didáctico se elaboró una rúbrica para la evaluación del aprendizaje conceptual y otra para la evaluación del aprendizaje procedimental que se estructura con la finalidad de medir el nivel del aprendizaje logrado. También se aplicó un test de opinión sobre la calificación de su aprendizaje sobre funciones trigonométricas con la estrategia de aprendizaje personalizado. Como el cuarto instrumento de colecta de datos elaborado y aplicado al grupo de estudio fue una encuesta de satisfacción. Por otro lado, para la evaluación de la evolución de la producción de los alumnos, se elaboró y administró en cada sesión una ficha de observación para tener evidencias sobre el trabajo en el aula.

### Desarrollo de la experiencia y análisis de resultados

**Desarrollo de la experiencia.** El desarrollo del tema de funciones trigonométricas responde a la siguiente pregunta ¿Cómo se definen las funciones trigonométricas, cuáles son sus propiedades, cómo se construyen sus gráficas, cuáles son sus principales aplicaciones? Toda la temática se desarrolló con ayuda de texto impreso preparado con el propósito a lograr aprendizajes significativos en el tema y con disponibilidad de ordenador individual con software matemático Derive6 y Geup7 instalado.

Las clases del tópico de funciones trigonométricas se desarrollaron durante seis semanas, con seis horas semanales de clase, distribuidas en bloques de dos horas por cada sesión:

- *Semana 1.* Función envolvente sobre la circunferencia unitaria, a partir de arcos orientados sobre la circunferencia y sus respectivas medidas.
- *Semana 2.* Funciones trigonométricas coseno y seno, identificación del dominio y rango, determinación de valores.
- *Semana 3.* Función trigonométrica tangente, cotangente, secante y cosecante, obtención de valores, sus propiedades fundamentales, relaciones entre funciones trigonométricas.
- *Semana 4.* Gráfica de las funciones trigonométricas, identificación de sus propiedades, cálculo de valores sobre la gráfica.
- *Semana 5.* Definición de funciones trigonométricas inversas, identificando sus propiedades y construyendo sus gráficas correspondientes.
- *Semana 6.* Identidades y ecuaciones trigonométricas: aplicaciones.

La evaluación de desempeños en el proceso y de actitudes frente a las actividades establecidas se dio de manera sistemática durante el desarrollo del tópico de funciones trigonométricas con lápiz y papel, como también a través de software matemático. La asistencia personalizada al estudiante se realiza tanto en las clases teóricas y prácticas en el aula, complementada con programación de horarios extracurriculares, asimismo todos los alumnos poseen la oportunidad de trabajar con el ordenador provisto de software matemático.

**Resultados.** En la aplicación de la estrategia didáctica diseñada y elaborada para el aprendizaje de las funciones trigonométricas en forma personalizada mediado por recursos tecnológicos durante seis semanas, a un grupo mixto de quince estudiantes cuyas edades oscilan entre dieciséis y dieciocho años; para la obtención de resultados empíricos se tuvo en cuenta dos rúbricas, una encuesta de opinión y otra de satisfacción:

**A. La rúbrica referida a las actividades de evaluación del aprendizaje conceptual de las funciones trigonométricas,** consistente en: identificación del rango, periodo y gráfica de las funciones trigonométricas, a partir de la manipulación del programa Geup7 y del Derive6, a partir de las cuales se identifican la correspondencia entre puntos de la circunferencia unitaria con la construcción de la curva correspondiente, los calificativos obtenidos por los estudiantes se resume en la tabla.

Tabla 1

*Resultado de la evaluación del aprendizaje conceptual de las funciones trigonométricas.*

ESTUDIANTE	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15
CALIFICATIVO	19	18	20	13	20	19	18	15	20	19	19	14	11	17	19
ESTADÍSTICOS	Moda = 19, Media = 17,40, Desv.Est. = 2,823, CV = 16,23%														

*Fuente:* aplicación de rúbrica (aprendizaje de conceptos) a los sujetos de estudio, 2016.

Los resultados que se exhiben en la tabla N° 1, indican que la implementación de actividades de aprendizaje con tratamiento personalizado influye significativamente en el proceso de aprendizaje conceptual durante el estudio de las funciones trigonométricas, toda vez que el estudiante maneja con solvencia los conceptos y propiedades de las funciones trigonométricas, obteniendo un promedio global del grupo de 17,40, con calificación en el sistema vigesimal, una desviación estándar de 2,823 y un coeficiente de variación de 16,23%.

**B. Rúbrica referida a la evaluación del aprendizaje procedimental y uso de conceptos en la resolución de problemas,** desde una perspectiva algebraica, gráfica y analítica de las funciones trigonométricas, los calificativos obtenidos se resume en la tabla 2.

Tabla 2

*Resultado de la evaluación de las actividades de aprendizaje procedimental de las funciones trigonométricas.*

<b>ESTUDIANTE</b>	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15
<b>CALIFICATIVO</b>	20	17	18	17	20	20	19	14	20	18	19	12	11	19	20
<b>ESTADÍSTICOS</b>	<b>Moda = 20, Media = 17,60, Desv.Est. = 2,971, C.V. = 16,88%</b>														

*Fuente:* aplicación de rúbrica (aprendizaje procedimental) a los sujetos de estudio, 2016.

Los resultados que se exhiben en la tabla N° 2, indican que la implementación de la estrategia de aprendizaje personalizado influye significativamente en el proceso de aprendizaje procedimental durante el estudio de las funciones trigonométricas, toda vez que, el estudiante realiza con solvencia la identificación de propiedades y, resolución de problemas en forma algebraica y gráfica; obteniendo un promedio global del grupo de 17,60, con calificación en el sistema vigesimal, una desviación estándar de 2,971 y un coeficiente de variación de 16,88%.

**C. Resultado del Test de Opinión,** de los 10 ítems que se formuló respecto a su aprendizaje de las funciones trigonométricas con tratamiento personalizado, mayoritariamente respondieron en forma positiva a favor del uso de la estrategia didáctica y el uso del recurso tecnológico, que repercutió en el grado de motivación hacia el aprendizaje de la matemática, debido a que la interacción con el ordenador para el desarrollo de tareas matemáticas les fue muy novedoso, repercutiendo en su competencia matemática. Los resultados se muestran en las tablas N° 3.

Tabla 3

*Resultados del test de opinión referido al proceso de aprendizaje personalizado de las funciones trigonométricas.*

Ítem	REACTIVOS				
	Excelente	Buena	Regular	Mala	Total
01	5	6	3	1	15
02	6	6	2	1	15
03	7	5	3	0	15
04	5	6	3	1	15
05	5	6	3	1	15
06	6	5	3	1	15
07	6	7	2	0	15
08	6	5	3	1	15
09	6	5	3	1	15
10	6	5	3	1	15
<b>TOTAL</b>	<b>58</b>	<b>56</b>	<b>28</b>	<b>8</b>	<b>150</b>
<b>TOTAL</b>	<b>38.67</b>	<b>37.33</b>	<b>18.67</b>	<b>5.33</b>	<b>100.00</b>

*Fuente:* aplicación del test de opinión sobre la estrategia didáctica a los sujetos de estudio, 2016.

Según el resumen que se hace en la tabla N° 3, la mayoría que representan el 38,67% de los estudiantes consideran como excelente el modelos de aprendizaje personalizado; mientras que el 37,33% manifiestan que su aprendizaje logrado fue buena; por otro lado el 18,67% cataloga el aprendizaje personalizado como regular, y sólo el 5,33% de los estudiantes manifestaron que la estrategia de aprendizaje fue mala.

**D. Los resultados obtenidos en el cuestionario de satisfacción,** en los ítems referidos a la **satisfacción sobre el contenido de aprendizaje desarrollado,** 12 de los estudiantes que representan a la mayoría respondieron estar muy satisfechos respecto al desarrollo del tema por parte del docente con la participación activa de los estudiantes, los tres estudiantes restantes consideran estar satisfechos.

Respecto a la **estrategia didáctica,** 09 estudiantes encuestados manifiestan estar muy satisfecho, 04 manifiestan estar satisfechos y sólo 1 manifiesta estar poco satisfecho; debido a las restricciones que se tiene para acceder al software matemático en el laboratorio de informática que permitan reforzar sus aprendizajes.

Respecto al **desempeño del Profesor** en la clase de matemática haciendo uso del recurso didáctico y tecnológico, once de los quince, mostraron su satisfacción plena puesto que fue para ellos la primera experiencia de llevar una clase de matemática teniendo como herramienta el software matemático; los cuatro restantes manifestaron que están satisfechos, puesto que la enseñanza personalizada permite un estudio interactivo.

En lo que se refieren a **su desempeño personal,** en los seis ítems planteados en este rubro, el 75% de los estudiantes encuestados consideran estar muy satisfechos, el 20% manifiestan estar satisfechos y sólo un 5%, expresa estar poco satisfecho. En global, podemos afirmar que la mayoría de los estudiantes estuvieron de acuerdo con su aprendizaje personalizado de las funciones trigonométricas.

### Conclusiones

Los hallazgos empíricos obtenidos en el proceso de la investigación nos indican que la estrategia didáctica empleada evidenció una comprensión eficiente del tema durante la intervención, es decir, el estudio de las funciones trigonométricas a partir de puntos en la circunferencia unitaria del plano cartesiano, considerando conocimientos previos de geometría y álgebra elementales, es una alternativa al aprendizaje usual de las funciones trigonométricas a partir de razones entre los lados de un triángulo rectángulo, donde algunos conceptos, propiedades, representaciones gráficas, resultan insuficientes y poco consistentes.

Una implicación inmediata de la estrategia didáctica empleada, en lo que respecta al aprendizaje procedimental, permite la interacción directa profesor y alumno, facilitando el desarrollo de capacidades de intuición, de abstracción y de razonamiento, relacionando con situaciones reales y con aplicaciones en la solución de problemas, propiciando el aprendizaje activo, además posibilita la traducción del lenguaje algebraico en el lenguaje gráfico haciendo uso de software matemático, poniéndose en práctica los procedimientos viables para el aprendizaje. Los logros obtenidos en el aprendizaje de las funciones trigonométricas, fueron satisfactorios tanto para el estudiante como para el docente.

En el aspecto actitudinal, los resultados obtenidos indican que los alumnos fueron capaces de realizar actividades autónomas, en forma individual y grupal, empoderándose del trabajo colaborativo como forma natural de su aprendizaje, resuelven problemas sobre trigonometría conjugando las formas algebraicas e intuición gráfica con uso pertinente del software matemático,

en un desempeño flexible; asumiendo con responsabilidad el estudio del tema; que a posteriori puede utilizarlos en diversas situaciones de su actividad personal y social.

### Aporte de la investigación

En resumen, la estrategia de aprendizaje personalizado se puede replicar en otros contextos educativos durante en el proceso de estudio de las funciones trigonométricas, así como otros temas de la matemática escolar haciendo uso pertinente del software matemático para dinamizar y motivar el aprendizaje y el autoaprendizaje de los estudiantes, sustentado en sus propiedades algebraicas y representaciones gráficas; hecho que conlleva al logro de aprendizaje significativo y eficiente del tema.

### Referencias y bibliografía

- Barnett, R. (1995). *Precálculo. Álgebra geometría analítica y trigonometría*. México D.F.: Editorial Limusa S.A.
- De Guzman, M. & Gil, D. (1993). *Enseñanza de las ciencias y la Matemática. Tendencias e innovaciones*. Madrid: Editorial popular, S.A.
- National Council of Teacher of Mathematics (1992). *Estándares curriculares y evaluación educativa para la educación matemática* (NCTM), USA: Federación de profesores de matemática.
- Nichols, E. (1974). *Trigonometría Moderna*. México: Editorial Continental.
- Ogalde, I. (2003). *Los materiales didácticos, medios y recursos de apoyo a la docencia*. México D.F.: Trillas.
- Morín, A. (s/a). *Aprendizaje personalizado*. Recuperado de <https://www.understood.org/es-mx/school-learning/partnering-with-childs-school/instructional-strategies/personalized-learning-what-you-need-to-know>.
- Rico, L.; Sierra, M. y Castro, E. (2000). *Didáctica de la matemática. Las disciplinas didácticas entre las ciencias de la educación y las áreas curriculares*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Rico, L. (1995). *Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas*. Revista EMA 1995, Vol. 1, N° 1, 4-24. Recuperado de [http://funes.uniandes.edu.co/984/1/1Rico1995Consideraciones\\_RevEMA.pdf](http://funes.uniandes.edu.co/984/1/1Rico1995Consideraciones_RevEMA.pdf). Consultado 15/06/2016.
- Santaló, L. y Llinares, S. (1994). *La enseñanza de las matemáticas en la educación Intermedia. Tratado de educación personalizada*. Madrid: Rialp, S.A.
- Pereira de Gómez, M. (1976). *Educación personalizada. Un proyecto pedagógico en Pierre Faure*. México D.F.: Editorial Trillas.
- Sierra Bravo, R. (2007). *Metodología y Técnicas de Investigación Social*. Madrid: Editorial Thomson.
- Watson A. y Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*, Mahwah, NJ, USA, Lawrence Erlbaum Associates.
- Tójar J. (2006). *Investigación cualitativa comprender y actuar*. Madrid: Editorial la Muralla.