



II CEMACYC

II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe

29 octubre al 1 noviembre. 2017

Cali, Colombia

ii.cemacyc.org



Los afijos en el lenguaje matemático

Sueli Cunha

Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)

Rio de Janeiro - Brasil

sueli.cunha@ime.uerj.br

Jaime Velasco

Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)

Rio de Janeiro – Brasil

jaimvelasco@ime.uerj.br

Resumen

En Educación Matemática, hay muchos trabajos sobre Alfabetización Matemática y tantos otros que se ocupan de la dificultad de comprensión de los símbolos matemáticos; es decir, aprender a “leer” una expresión matemática es tan importante como desarrollar el raciocinio matemático. Para leer, escribir y entender bien un lenguaje, es necesario conocer su gramática. El estudio de la Gramática del Lenguaje Matemático busca justamente la comprensión de su sintaxis y de su semántica; por ejemplo, la manera como se forman sus “palabras”. Como en español (portugués, francés, etcétera), en el Lenguaje Matemático se pueden también formar nuevas palabras por medio de *prefijos*, *sufijos* y tantos otros “afijos” (es decir, partículas que pueden ser añadidas a una palabra, o expresión, para formar otra). En esta comunicación, son presentados los *afijos* del Lenguaje Matemático y se hacen comparaciones con la gramática de la lengua española, cuando necesario.

Palabras clave: gramática del lenguaje matemático, educación matemática, alfabetización en matemáticas.

Resumo

Na área de Educação Matemática, há muitos trabalhos sobre Alfabetização Matemática e outros tantos que tratam da dificuldade de compreensão dos símbolos matemáticos; isto é, aprender a “ler” uma expressão matemática é tão importante quanto desenvolver o raciocínio matemático. E para bem ler, escrever e compreender uma linguagem, é necessário conhecer sua gramática. O estudo da Gramática da Linguagem Matemática busca justamente a compreensão de sua sintaxe e de sua semântica; por exemplo, a maneira como se formam suas “palavras”. Como em

español (em português, em francês, etc), na Linguagem Matemática também se podem formar novas palavras por meio de *prefixos*, *sufijos* e tantos outros “afijos” (isto é, partículas que podem ser acrescentadas a uma palavra, ou expressão, para formar uma outra). Neste artigo, são apresentados os *afijos* da Linguagem Matemática e é feita uma comparação com a gramática da língua espanhola, quando necessário.

Palavras-chave: gramática da linguagem matemática, educação matemática, alfabetização matemática.

Introducción

El Lenguaje Matemático, como en cualquier otro lenguaje, es una herramienta de comunicación entre dos partes: el emisor y el receptor. Una de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas es que, a veces, no hay comunicación; es decir, el receptor no comprende lo que el emisor dice. Según Danyluck (citado en Souza, 2010), “ser alfabetizado en matemáticas, entonces, es entender lo que se lee y escribir lo que se entiende...” (p. 2); y para leer, escribir y entender bien el Lenguaje Matemático (el *Matematiqués*), es necesario conocer su gramática, es decir, su sintaxis, su semántica, sus reglas.

Sin embargo, cuando se trata de analizar el Lenguaje Matemático, algunos trabajos son pensados en el estudio de la Lógica Matemática (o en el raciocinio lógico), mientras que otros son pensados en como traducir una expresión del Lenguaje Matemático a un lenguaje natural. Silveira (2014) se preguntó: “¿En la interpretación de textos matemáticos, en situaciones de enseñanza y aprendizaje, el alumno debe traducir palabra por palabra, símbolo por símbolo, o traducir el sentido de los textos?” (p. 63). En las matemáticas, a veces, traducir símbolo por símbolo es como traducir letra por letra de una palabra de una lengua natural a otra: no tiene sentido. Bélanger y De Serres (1998), concluyeron que es necesario, entre otras cosas, conocer el vocabulario y la estructura de los elementos de un lenguaje para que resulte comprensible.

En esta comunicación, son presentados los *afijos*, una manera que formen nuevas palabras, basado en una palabra denominada *primitiva*. Además, es interesante observar que, considerando el aspecto lingüístico del Lenguaje Matemático, son identificados también algunos dialectos. Según el Diccionario Inverso de la Real Academia Española (DIRAE), el dialecto es un “sistema lingüístico considerado en relación al grupo de los varios derivados de un tronco común”; así, en el Lenguaje Matemático se identifican los dialectos *algebrés*, *logiqués*, *geometriqués* (relativo al álgebra, lógica y geometría, respectivamente), entre otros. En este texto se considera, a veces, las particularidades de los dialectos.

Los afijos

En la lengua española, como en algunas otras lenguas, se pueden formar nuevas palabras, a partir de una palabra *primitiva*, añadiendo afijos (*prefijos*, si son añadidos al inicio de la palabra primitiva; *sufijos*, si son añadidos al final de la palabra primitiva; entre otros). Normalmente, los sufijos pueden modificar la clase gramatical de la palabra primitiva, mientras que los prefijos dan un nuevo significado a las palabras (Bechara, 2004; Martínez, 2010). Por ejemplo: en español, el sufijo *ción*¹, normalmente forma sustantivos que derivan de verbos, como *clasificación* (que significa la acción y efecto de *clasificar*), *comunicación* (que significa la acción y efecto de

¹ *ción* en español (*comunicación*) corresponde a *ção* en portugués, *tion* en francés e inglés (*communication*), *zione* en italiano (*comunicazione*).

comunicar), alfabetización (que significa la acción y efecto de *alfabetizar*); mientras que el prefijo *in/im* (entre otros), “niega” el significado de la palabra primitiva, como en *infeliz*, *imposible*. “Conociendo bien los prefijos y sufijos se comprenden fácilmente palabras nunca oídas o leídas anteriormente y se enriquece sin esfuerzo el vocabulario” (Océano, 1994, pp. 7-8).

En el lenguaje matemático, también hay *afijos*; es decir, símbolos que representan “la misma modificación de una ‘palabra’ primitiva o que dan otro significado a una palabra primitiva”. Sin embargo, además de prefijos y sufijos hay *sobrefijos*, *suprafijos* e *infracijos* (Cunha, 2017a), que son definidos a seguir.

Prefijos

Como en la lengua española (portuguesa, francesa, italiana, etcétera), en el Lenguaje Matemático, los prefijos se añaden al inicio de la “palabra” primitiva, modificando su significado. Por ejemplo, el símbolo “ \sim ” es un prefijo de negación en el dialecto *logiquês*; es decir, indica el sentido contrario, el opuesto de la palabra original. Así, si una proposición lógica representada por p es *verdadera*, la proposición $\sim p$ es *falsa*; por otro lado, si p es *falsa*, la proposición $\sim p$ es *verdadera*.

Sufijos

En el Lenguaje Matemático, como en la lengua española (portuguesa, francesa, italiana, etcétera), los sufijos se añaden al final de la “palabra” primitiva. Sin embargo, en el Lenguaje Matemático, es dado un nuevo significado a la palabra primitiva. Siguen algunos ejemplos de sufijos del Lenguaje Matemático:

1. “!” es un símbolo del Lenguaje Matemático que, cuando usado como *sufijo*, tiene diferentes significados, según el contexto:
 - a. “ \exists ” es un símbolo del alfabeto del Lenguaje Matemático (un *cuantificador existencial*) que significa “existencia de al menos un elemento, en un conjunto, que satisface una determinada propiedad”. Su sintaxis es: “ \exists *variable* | *propiedad*” (donde “|” es un símbolo que significa “tal que” o “con la condición de que”); si queremos indicar que existe “un único”, debemos añadir el sufijo “!”; así, $\exists!$ significa “*existe solamente un elemento que satisface la propiedad descrita*”;
 - b. en $n!$, donde n es un número natural, el símbolo “!” significa “*el factorial de n* ”, es decir, “el producto de todos los enteros positivos que son menores que o iguales a n ”; así, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$ y genéricamente, $n! = n \times (n - 1) \times \dots \times 2 \times 1$.
2. el símbolo “ -1 ”, en \square^{-1} , es un sufijo que significa “el inverso de \square ”. Así,
 - a. si x es un número racional, diferente de cero, entonces x^{-1} es el inverso de x , es decir $x \times x^{-1} = 1$;
 - b. si f es una función real (es decir, una función cuyo dominio y contradominio están contenidos en el conjunto de los números reales), biyectiva, entonces f^{-1} es la función inversa de f , o sea, si x pertenece al dominio de f y al dominio de f^{-1} , entonces $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$.
3. el símbolo “’”, en f' , es un sufijo que significa “la derivada de la función f ”.
4. un índice que indica la posición de un elemento, como en:

- a. una sucesión ordenada (o una secuencia); se escribe x_i , para indicar que es el elemento que está en la posición “ i ” de la secuencia. Por ejemplo: si los alumnos de una clase son representados por la secuencia finita *Ana, Andrés, Antonio, Catalina, Juan, Pablo, Pedro, Ramón, Ricardo y Verónica*, entonces
 - i. *Juan* es el quinto elemento de esta secuencia; así, se puede escribir, en *Matematiqués*, $a_5 = \textit{Juan}$;
 - ii. el conjunto de las niñas de esta clase es formado por los elementos a_1, a_4 y a_{10} .
- b. una matriz con m filas y n columnas, que es representada como $A_{m \times n}$; el elemento que se encuentra en la columna j (j menor que o igual a n) de la fila i (i menor que o igual a m) es representado por a_{ij} .

Es interesante observar que el tamaño de una matriz (es decir, el número de filas y el número de columnas) es también indicado por un sufijo ($m \times n$).

5. el conjunto de números enteros (que contiene a los naturales, sus inversos aditivos, u opuestos, y el cero) es representado por $Z = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$;
 - a. si queremos excluir los enteros *positivos* (es decir, trabajar únicamente con $\{\dots, -4, -3, -2, -1, 0\}$), debemos representar este conjunto por Z_- , que representa los llamados *números enteros no positivos*;
 - b. análogamente, si queremos excluir los enteros *negativos* (es decir, trabajar únicamente con $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$), debemos representar este conjunto por Z_+ , que representa los llamados *números enteros no negativos*;
 - c. pero, si queremos excluir únicamente el cero (es decir, trabajar únicamente con $\{\dots, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, \dots\}$), debemos representar este conjunto por Z^* , que representa los llamados *números enteros no nulos*. En este caso, el sufijo “ $*$ ” significa *excluir el cero*.

Es interesante observar que a veces los sufijos aparecen *en lo alto* (como en los ejemplos 2 y 5c) y otras veces aparecen *abajo* (como en los ejemplos 4, 5a y 5b). En el primer caso, son llamados *sufijos superiores*; en el segundo, *sufijos inferiores*.

Sobrefijos

En español, el prefijo *sobre* es un elemento de composición que indica *superposición*, es decir, acto y efecto de superponer o poner algo encima de otra cosa; superponer es sinónimo de sobreponer (DIRAE). Un *sobrefijo* en el Lenguaje Matemático es un símbolo que es puesto encima de otro símbolo. Por ejemplo, el símbolo “/” es un sobrefijo de negación (es decir, indica el sentido contrario, el opuesto de la palabra original) en los siguientes casos:

1. “ \in ” es un símbolo del alfabeto del Lenguaje Matemático (un *operador relacional*) que significa “pertenencia a conjuntos”. Su sintaxis es de la forma “*elemento* \in *conjunto*” y la expresión $a \in A$ puede ser leída como “*a pertenece a A*” o como “*a es elemento de A*”. Para expresar lo contrario, es decir, que “*a no pertenece a A*” o “*a no es elemento de A*”, es necesario usar el sobrefijo de negación “/” y escribir $a \notin A$, dado que “ \notin ” significa “negación de \in ” o “*no pertenencia a conjuntos*”.
2. “ \subset ” es un símbolo del alfabeto del Lenguaje Matemático (un *operador relacional*) que

significa “inclusión de conjuntos”²; su sintaxis es de la forma “conjunto \subset conjunto” y la expresión $A \subset B$ puede ser leída como “ A es subconjunto de B ” o “ A está incluido en B ”. Para expresar lo contrario, es decir, que “ A no es subconjunto de B ”, es necesario usar el sobrefijo de negación “/” y escribir $A \not\subset B$, dado que $\not\subset$ significa “negación de \subset ” o “no inclusión de conjuntos”.

3. como fue dicho anteriormente, “ \exists ” es un símbolo del alfabeto del Lenguaje Matemático que significa “existencia de al menos un elemento, en un conjunto, que satisface una determinada propiedad”. Para expresar lo contrario, es decir, que “no existe ningún elemento, en un conjunto, que satisfaga una determinada propiedad”, es necesario usar el sobrefijo de negación “/” y escribir “ \nexists variable | propiedad”, dado que “ \nexists ” significa “negación de \exists ”.

De la misma forma, el símbolo “ \neq ”, que significa “distinto de”, “diferente de” o “no es igual a”, equivale al símbolo de “=” (que significa “es igual a”) con el sobrefijo de negación “/”.

Suprafijos

En español, el prefijo *supra* es un elemento de composición que significa *arriba* o *en cima de*. Un *suprafijo* en el Lenguaje Matemático es un símbolo que es puesto arriba de otro. Siguen algunos ejemplos de suprafijos del Lenguaje Matemático:

1. “—” es un símbolo del Lenguaje Matemático que, cuando usado como *suprafijo*, tiene diferentes significados, según el contexto:
 - a. en *geometriqués*, “—” significa “un segmento de recta comprendido entre dos puntos distintos” (los puntos que están abajo del símbolo); así, \overline{AB} representa “el segmento de recta entre los puntos A y B ”;
 - b. en un número racional periódico (es decir, un número racional que se caracteriza por tener cifras que se repiten indefinidamente, llamadas *período*), el suprafijo “—” indica justamente el período. Por ejemplo, $0,34343434\dots$ puede ser representado como $0,3\overline{4}$; así como, $2,43157157157\dots$ puede ser representado como $2,431\overline{57}$.
2. “ \rightarrow ” es un símbolo del alfabeto del Lenguaje Matemático que, cuando usado como suprafijo, en el dialecto *geometriqués*, tiene diferentes significados, según el contexto:
 - a. \vec{v} , denota un *vector geométrico*;
 - b. \overrightarrow{AB} es una “palabra polisémica”, es decir, que puede tener muchos significados distintos, según el contexto (DIRAE). Esa palabra puede
 - i. representar una *semirrecta* con origen en el punto A , pasando por el punto B ;
 - ii. denotar un *vector geométrico* donde el segmento orientado, con origen en A y extremo final en B , es uno de sus representantes.

Infracijos

En español, el prefijo *infra* es un elemento de composición que significa *inferior* o *abajo*.

² Hay diferentes notaciones para la relación de inclusión, elegimos esta porque nos parece más coherente con la noción de afijos que estamos estudiando, como será mejor discutido más adelante.

Un *infracifijo* en el Lenguaje Matemático es un símbolo que es puesto abajo de otro. Siguen algunos ejemplos de infracifijos del Lenguaje Matemático:

1. “ \leq ” es un símbolo del Lenguaje Matemático que, cuando usado como *infracifijo* significa “o igual a”. Así,
 - a. “ \leq ” es un símbolo del Lenguaje Matemático (un *operador relacional*) que significa “es menor que”; su sintaxis es de la forma “*cantidad* (constante, variable o incógnita) \leq *cantidad* (constante, variable o incógnita)”. Para expresar que los valores pueden, eventualmente, ser iguales, es necesario usar el infracifijo “ \leq ” y escribir, por ejemplo, $x \leq y$ para decir que “ x puede ser *menor que* o *igual a* y ”;
 - b. como fue dicho anteriormente, “ \subseteq ” es un símbolo del alfabeto del Lenguaje Matemático que significa “inclusión de conjuntos”. Sin embargo, si queremos decir que el conjunto A es un subconjunto de un conjunto B , pero que, eventualmente, A puede ser igual a B , es necesario usar el infracifijo “ \subseteq ” y escribir $A \subseteq B$ y leer “ A está contenido dentro de B ” o “ A es un subconjunto de B ”.

Con respecto a la relación de inclusión, esta se define por “ A está contenido dentro de B si todo elemento de A es también un elemento de B ”. Según esta definición, todo conjunto es subconjunto de sí mismo. Por otro lado, el prefijo latino “*sub*” indica “inferioridad, subordinación”; entonces, se dice que “ A es un subconjunto *impropio* de A ” (dado que A es, realmente, igual a A y no “una parte” de A) y un conjunto A es un “subconjunto *propio* de B ” si “ A está contenido dentro de B ” pero “ A no es igual a B ” (es decir, “ A está estrictamente contenido dentro de B ”). Así, el símbolo “ \subseteq ” (más genérico) representa la “relación de inclusión o igualdad”, mientras que el símbolo “ \subset ” representa a “relación estricta de inclusión”.

Parasíntesis

La parasíntesis, en español, es el “proceso de formación de palabras en que intervienen simultáneamente la prefijación y la sufijación” (DIRAE). En el Lenguaje Matemático, puede decirse que *parasíntesis* es “el proceso de formación de palabras en que intervienen simultáneamente *dos o más* tipos de afijos”, considerando que hay otros tipos de afijos. Por ejemplo, analizando nuevamente el caso del conjunto de números enteros, $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, si queremos trabajar sólo con los enteros negativos (es decir, excluir los enteros positivos y el cero), debemos representar el conjunto $\{\dots, -2, -1\}$ por Z_-^* , dado que el sufijo superior “ $*$ ” significa *excluir el cero del conjunto* y el sufijo inferior “ $-$ ” significa *excluir los enteros positivos*. Siguen otros ejemplos de parasíntesis en el Lenguaje Matemático:

1. “ \sum ” es un símbolo del alfabeto del Lenguaje Matemático que representa “la suma de muchos sumandos”; su sintaxis es de la forma “ \sum (*sumandos*)”; donde hay diferentes formas de describir los sumandos, dependiendo del contexto. Así, considerando un conjunto finito A ,
 - a. para indicar “la suma de todos los elementos de A ”, se puede escribir

$$\sum_{x \in A} x;$$

- b. como A es finito, vamos a representar por n el número de elementos (es decir,

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$); de esta manera, para indicar “la suma de todos los elementos de A ”, se puede también escribir $a_1 + a_2 + \dots + a_n$; pero, se puede decir igualmente que “todos los elementos a_i de A , desde la posición **1** hasta la posición **n** , serán sumados”. En el Lenguaje Matemático, hay una forma compacta de representar esta última expresión, es decir:

$$\sum_{i=1}^n a_i.$$

En el primer caso, fue utilizado solamente un *infrafijo*³ ($x \in A$), mientras que en el segundo fue utilizado un *infrafijo* ($i = 1$) y un *suprafijo* (n).

- Lo mismo ocurre con “el producto de muchos factores”. En este caso, esta operación es representada por el símbolo “ \prod ” del alfabeto del Lenguaje Matemático, cuya sintaxis es de la forma “ \prod (*factores*)”, habiendo también diferentes formas de escribir los factores.
- En álgebra *de conjuntos*, la operación de *unión de conjuntos* (que es la “reunión, en un único conjunto, de todos los elementos de *dos* conjuntos”) es representada por el símbolo “ \cup ”, cuya sintaxis es “*conjunto* \cup *conjunto*”. Si queremos representar la unión de los conjuntos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, donde $n \geq 2$, se puede escribir:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i.$$

- Lo mismo ocurre con la operación de *intersección de conjuntos* (que es la creación de un nuevo conjunto, formado por los elementos comunes a *dos* conjuntos). Esta operación es representada por el símbolo “ \cap ”, cuya sintaxis es “*conjunto* \cap *conjunto*”. Si queremos representar el conjunto formado por los elementos que son comunes a n ($n \geq 2$) conjuntos, se puede escribir:

$$\bigcap_{i=1}^n A_i.$$

Es interesante observar que esos símbolos pueden ser escritos utilizando sufijos inferiores ($\sum_{x \in A} x$) o una parasíntesis formada por sufijos inferiores y superiores ($\sum_{i=1}^n a_i$, $\bigcup_{i=1}^n A_i$, $\bigcap_{i=1}^n A_i$). De esta manera, estas últimas representaciones se dicen *sinónimas* de las primeras, dado que son diferentes representaciones con el mismo significado (Cunha, 2017b), recordando que “sinónimo”, en español, significa una palabra o una expresión, que tiene el mismo significado que otra.

Reflexiones Finales

Estos son algunos ejemplos de afijos en el Lenguaje Matemático. Hay muchos otros. El objetivo de este trabajo es presentar una parte de la Gramática del Lenguaje Matemático y, siempre que sea posible, hacer un paralelo con la gramática de lenguas naturales (el español, en

³ Es interesante observar que, a veces, un afijo puede ser una *expresión matemática*, como en este caso.

este caso). Sin embargo, es interesante observar que, así como en algunos lenguajes naturales, en *Matematuês* hay también palabras sinónimas así como hay también palabras *polisémicas*.

El estudio de los afijos ayuda a comprender el significado de una palabra que resulta de la composición de otras, pues aunque no se conozca su significado, basta conocer el significado de la raíz de la palabra. Por ejemplo, el sufijo “mente”, en español, forma adverbios, principalmente de modo, a partir de un adjetivo, dando el significado de “de manera” (como en *claramente* – “de manera clara”; *ampliamente* – “de manera amplia”). Además, cuando se conoce la traducción de un afijo de la lengua española, por ejemplo, en otra lengua, es más fácil comprender el significado de la mayoría de las palabras en esa otra lengua; es decir, el sufijo “mente” en español, corresponde al sufijo “ly” en inglés, “ment” en francés e igualmente “mente” en portugués y en italiano. Así, los sufijos “ly”, “ment” y “mente” forman adverbios (que significan “de manera”) en sus respectivas lenguas.

Análogamente, conocer el significado de un sufijo en Lenguaje Matemático, ayuda a comprender el significado de una expresión matemática. Por ejemplo, el sufijo superior “-1” significa “el inverso de” y; conociendo el concepto de inverso, es posible determinar el inverso de una expresión dada. Cuando se comprende bien la gramática del Lenguaje Matemático, no es más necesario memorizar fórmulas.

Referencias y bibliografía

- Bechara, E. (2004). *Moderna gramática portuguesa*. Rio de Janeiro, Brasil: Editora Lucerna.
- Bélangier, M. & De Serres, M. (1998). Les erreurs langagières en mathématiques. *Correspondance*, 3(4). Recuperado de <http://correspo.ccdmd.qc.ca/Corr3-4/Math.html>.
- Cunha, S. (2017a). Considerações sobre a Aprendizagem Contínua do Matematuês – a Linguagem Matemática. En M. G. B. Maia & G. F. Brião (Orgs), *Alfabetização Matemática: perspectivas atuais* (pp. 45-60). Curitiba, Brasil: Editora CRV.
- Cunha, S. (2017b) Ler, Escrever e Compreender a Linguagem Matemática. En M. G. M. Paiva (Org). *Psicopedagogia Clínica e Aplicada ao Ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: Letra Capital, (en prensa).
- DIRAE. Diccionario de la lengua española de la Real Academia Española. Recuperado de <http://dirae.es>
- Martínez, M.T. (2010). Tratamiento de la formación de palabras en gramáticas del español del siglo XIX. *Revistas ELUA. Estudios de Lingüística Universidad de Alicante*, 24, 305-325, Recuperado de https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/21720/1/ELUA_24_12.pdf
- Océano. (1994). *Gramática Práctica: Ortografía, Sintaxis, Correcciones, Dudas*. Barcelona, España.
- Silveira, M.R.A. (2014). Tradução de textos matemáticos para a linguagem natural em situações de ensino e aprendizagem. *Educ. Matem. Pesq.*, 16(1), 47-73. Recuperado de <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download/15338/pdf>.
- Souza, K.N.V. (2010) Alfabetização Matemática: Considerações sobre a Teoria e a Prática. *Revista de Iniciação Científica da FFC*, 10(1). Recuperado de <http://www.bjis.unesp.br/revistas/index.php/ric/article/download/273/259>