



# II CEMACYC

II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe

29 octubre al 1 noviembre. 2017

Cali, Colombia

[ii.cemacyc.org](http://ii.cemacyc.org)



## Hitos en la historia del concepto de límite

César Guillermo **Rendón** Mayorga  
Universidad Pedagógica Nacional  
Colombia  
[cgrendonm@upn.edu.co](mailto:cgrendonm@upn.edu.co)

### Resumen

A partir de una revisión de literatura especializada en la historia del límite se identifican hitos que puedan ser potenciales herramientas que aporten a la formación de profesores de matemáticas. Para tal fin, la metodología empleada es el análisis documental, a partir del cual se logró una perspectiva propia sobre la historia del límite en matemáticas, en la que resaltan algunos elementos específicos que son comunes y de relevancia en los documentos estudiados. Los hitos propuestos son: los infinitesimales versus las cantidades infinitamente pequeñas, las aplicaciones del límite, el concepto de continuo, la dicotomía entre límites e infinitesimales, la noción de aproximación, la generalización del límite y, finalmente, la simbología del límite. Aunque en la investigación a la cual se adscribe este trabajo los hitos determinados en el estudio documental se constituyen como categorías de análisis, estas no se presentarán aquí por cuanto no es el objeto de este documento.

*Palabras clave:* Historia de las Matemáticas, límite, historia del Cálculo, historia del Análisis Matemático, análisis documental,

### Introducción

Los elementos y aportes presentados en este trabajo forman parte de una tesis que se adelanta en el marco de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia). El objetivo central de dicha investigación es el diseño e implementación de una serie de tareas mediadas por la Historia de las Matemáticas (HM), que giren en torno al concepto de límite y sean dirigidas a la formación inicial de futuros profesores. No obstante, la finalidad del presente documento es describir los hitos que se identifican como más relevantes durante la evolución del concepto de límite, a partir de una reconstrucción propia de su historia, la cual es fruto de un análisis documental que buscaba capturar distintas interpretaciones y enfoques sobre la historia de dicho objeto matemático.

### *Hitos en la historia del concepto de límite*

Es claro que el concepto de límite es una formalización de una serie de ideas que hacían parte del Análisis matemático en sus inicios (González, 2003); en ese sentido se muestra como la materialización de los desarrollos que venían dándose en el Cálculo. El límite es a su vez, un nuevo punto de partida para otros objetos matemáticos como la derivada y la integral, los cuales están soportados precisamente sobre la idea de límite. Es esa dualidad de significado que comporta el límite (como *punto de llegada* y al mismo tiempo como *punto de partida*) la que lo convierte en foco de atención para su estudio.

Además de la importancia que la HM muestra en relación con el límite, es también un asunto que reviste relevancia en la educación matemática básica de Colombia por cuanto es un objeto que está asociado directamente a procesos de aproximación y variación que, se espera, desarrollen los estudiantes del país al terminar su educación escolar (Ministerio de Educación Nacional, 2006). Y, aunque el propósito de este trabajo no es ahondar en asuntos didácticos o pedagógicos sobre la enseñanza del límite, lo cierto es que la identificación de hitos históricos puede llegar a dotar de herramientas para los procesos de enseñanza – aprendizaje a los docentes de matemáticas, tal como es documentado por Jankvist (2009) y Guacaneme (2016) en general para la HM, y por Bagni (2005) y Medina (2001) para el caso específico de los límites. Este punto reviste toda la importancia del caso por cuanto el límite ha sido durante años objeto de análisis de la Didáctica de las Matemáticas por las dificultades y errores comunes que comporta su estudio y que han sido ampliamente reportados por la literatura especializada (Contreras & García, 2008; Lacasta & Wilhelmi, 2010; Contreras & García, 2011)

En este trabajo se pretende entonces, presentar los resultados de un estudio a la HM en busca de distintos hitos, herramientas, ideas, etc., que, eventualmente, puedan convertirse en una mirada más amplia y enriquecida sobre el concepto de límite para la mejora de los procesos de enseñanza – aprendizaje de dicho objeto matemático a través de la incorporación de tales ideas en la formación inicial del docente.

### **Aspectos metodológicos**

La tesis a la cual se adscribe este documento responde a distintos aspectos de diversos enfoques metodológicos; específicamente el apartado que corresponde al estudio de la historia de los límites en matemáticas presenta una metodología de análisis documental. En ese sentido, para la identificación y caracterización de hitos en la historia del concepto de límite, se recolectaron 22 artículos de revistas, fechadas desde 1923 hasta 2016, evidenciando así, por un lado, la relevancia que ha existido por estudiar la historia de dicho objeto matemático a lo largo de varias décadas, y por otro, el espectro amplio de documentación que se quiso estudiar para la elaboración del análisis. La mayoría de los artículos fueron hallados a través de consulta en diversas bases de datos (Scopus, Jstore, Springer, Dialnet, etc.) con la intención que la calidad de estos ofreciera cierta confianza en el rigor y análisis histórico. Además de ello se optó porque hubiera diversidad en los idiomas de los artículos (español, inglés, portugués) con la finalidad de asegurar una diversidad geográfica en relación con las investigaciones descritas en cada documento.

Así pues, en resumen, la selección de los textos atendió elementalmente a tres criterios: el año de publicación, el idioma y que se tratara de una publicación indexada o memorias de eventos académicos. Es importante resaltar en este punto que los documentos se debían relacionar con la historia matemática del límite, en ese sentido se excluyó de esta búsqueda material documental que versara sobre asuntos didácticos, pedagógicos, etc.

Por otra parte, también se utilizaron algunos capítulos específicos de libros sobre Historia de las Matemáticas o Historia del Cálculo (Baron, 1969; Boyer, 1969; Edwards, 1979; Maor, 2003) los cuales aportaron algunos elementos específicos que permitieron enriquecer lo encontrado en los artículos. Finalmente, también se estudiaron dos tesis doctorales (Delgado, 1998; Mira, 2016) que permitieron contrastar la información que se iba recolectando con la que los autores de la tesis reportaban en sus escritos.

Luego de seleccionados los documentos la manera de estudiarlos consistió en dos fases. Primero se realizó una lectura general de cada documento para identificar qué temas abordaba y en cuáles asuntos hacía énfasis. Después se realizó una segunda (y tercera en algunos casos) lectura más específica a cada texto tratando de encontrar respuestas a preguntas como: ¿qué intenciones tiene el autor? ¿en cuál hito hace particular hincapié en la historia del límite? ¿cómo organiza la información histórica el autor?, etc., de cada segunda lectura se elaboró un resumen analítico para cada documento con el fin de poder organizar la información estudiada y acceder a ella con mayor facilidad.

Una vez estudiada toda la documentación hallada, fue posible encontrar puntos en común en algunos de los textos; estos permitieron la clasificación de la información en los momentos relevantes de la historia del concepto de límite que se presentan y se detallarán más adelante, a saber: los infinitesimales versus las cantidades infinitamente pequeñas, las aplicaciones del límite, el concepto de continuo, la dicotomía entre límites e infinitesimales, la noción de aproximación, la generalización del límite y, finalmente, la simbología del límite.

### **Resultados**

Después del estudio de los documentos encontrados y de su clasificación, se determinaron los siguientes aspectos que representan hitos de particular relevancia en la historia del concepto de límite:

1. *Los infinitesimales versus las cantidades infinitamente pequeñas (CIP)*: para Cauchy un infinitesimal es una entidad que puede ser comparada “en tamaño” con cualquier número real, con otros infinitesimales y con sus recíprocos y para el cual se cumple que  $-r < x < r$  siendo  $x$  el infinitesimal y  $r$  un número real cualquiera. Por otra parte, cuando los valores numéricos sucesivos de la misma variable disminuyen indefinidamente, de tal manera que caen por debajo de cualquier número dado, esta variable se convierte en lo que se llama *infinitamente pequeña* (Fisher, 1978). Estas definiciones sugieren una duda fundamental: ¿pueden las CIP de Cauchy, esas variables con límite cero, tomar valores infinitesimales? A partir de allí se genera una discusión que contrapone en orillas opuestas dos conceptos que no son fácilmente asimilables, por cuanto Cauchy no está trabajando con ellos dentro del conjunto de números reales (o el Análisis estándar) sino que, por el contrario, su dominio va “más allá” de los números reales, lo cual comporta una complejidad mayor en la tarea de comprender su trabajo.
2. *Las aplicaciones del límite*: el estudio de los documentos permite distinguir esencialmente dos tipos de aplicaciones en relación con los límites. Una clase de aplicación que refiere a situaciones importadas de otras áreas (esencialmente la Física) y que dotan de una utilidad particular al objeto límite; este tipo de aplicación será denominada *aplicaciones no matemáticas*. En otro sentido se evidencian también algunas aplicaciones del límite desde y para las matemáticas; estas serán denominadas

*aplicaciones matemáticas*. Antes de mencionar tales aplicaciones, es importante resaltar que las *aplicaciones no matemáticas* son muchas menos que las *matemáticas*; este hecho puede tener explicación en que, para la época en que se desarrollaban los límites (siglos XVII y XVIII, principalmente), las Matemáticas respondían en sus avances a situaciones provenientes de áreas como la Mecánica, Óptica, Química, etc. En ese sentido, algunos autores como Ímaz y Moreno (2009) consideran que no es sino hasta Cauchy, y su teoría del Análisis, que empieza a gestarse lo que se vendría a conocer como “matemático puro”, entendido como aquellos matemáticos que buscaban responder a problemas no necesariamente ligados a o surgidos en otras ciencias.

Por lo anterior, es que previo a Cauchy es más difícil advertir aplicaciones del límite que no estén ligadas a otras disciplinas diferentes a las Matemáticas. Al respecto de cada tipo de aplicación se han identificado en los documentos los siguientes ejemplos:

- *Aplicaciones no matemáticas*:
    - Variación de velocidad.
    - Variación de aceleración.
    - Cálculo de áreas y superficies (esto, aunque parece esencialmente geométrico, y en consecuencia matemático, hace referencia a los trabajos de Cavalieri, quien no necesariamente estaba trabajando para aportar a las matemáticas *per sé*).
    - Determinación de rectas tangentes a curvas (refiere principalmente a trabajos de Newton y Descartes quienes tienen preocupaciones más físicas que matemáticas en sus trabajos).
  - *Aplicaciones matemáticas*:
    - Determinación de un número irracional como el límite de una sucesión de números racionales.
3. *El concepto de continuo*: este concepto a través de la revisión documental efectuada adquiere importancia porque es una definición que, en sus inicios remontados esencialmente a la cultura griega, introduce someramente las nociones de infinito actual y potencial (las paradojas de Zenón), asunto que se relaciona de forma inmediata con una noción naciente de procesos infinitos o límites infinitos (Durán, 2010). Por otra parte, una vez formalizado el Cálculo Infinitesimal, el continuo llega a entenderse en el sentido de la completitud que comporta el conjunto de números reales (axioma de densidad), y, por su parte, la continuidad pasa a ser una propiedad de las funciones que para su conceptualización se sirve del límite como objeto matemático riguroso. En un principio, la continuidad se estudia sobre las funciones “en general” y a partir de los trabajos de Fourier pasa a ser una propiedad local de las funciones que se cumple en determinados intervalos para los cuales se define la función.

Es en ambas direcciones que se reporta la literatura hallada. Por un lado, Jones (1987) comenta algunas concepciones relativas al continuo griego. Por su parte, Felscher (2000) aborda la definición de continuo sugerida por Bolzano, la cual ya cuenta con cierto grado de formalidad matemática.

4. *Dicotomía entre límites e infinitesimales*: para hacer claridad en lo que respecta a este hito, vale la pena aclarar dos momentos que atraviesa la historia del concepto de límite. Un primer momento pone a los límites como noción naciente en medio de la informalidad, pues no cuentan con bases conceptuales que los fundamenten, y en la orilla opuesta a los infinitesimales que, aun sin tener absoluta rigurosidad, sí consistían un objeto matemático más familiar para los matemáticos de la época. Después, un segundo momento cambia los papeles y pone a los límites como un objeto dotado del formalismo propio del Cálculo posterior a Cauchy y Weierstrass, y en la posición contraria ubica a los infinitesimales, como concepto matemático que puede ser abolido de las matemáticas dado que carece de la rigurosidad exigida para ese momento.
5. *La noción de aproximación*: dado que a través de la historia el concepto de límite ha estado ligado al de infinito, y este último se ha relacionado en diversas ocasiones con procesos que implican movimiento o continuidad (*i.e.* paradojas de Zenón, indivisibles de Galileo, fluxiones y fluentes de Newton, etc.), entonces la noción de aproximación emerge de forma natural como un elemento que aporta a la discusión sobre la fundamentación de la idea de límite durante su historia.

Más específicamente, la importancia de la aproximación se hace latente cuando el término se emplea en distintas definiciones de límite, tal como lo reseñan García, Serrano y Díaz (2002) quienes mencionan las acepciones que desarrollan D’Alambert y Cauchy acerca de los límites, las cuales se sirven explícitamente de la aproximación.

6. *La generalización del límite*: solamente en uno de los documentos estudiados (Medrano y Pino-Fan, 2016) es referida la historia más reciente del concepto de límite. Específicamente se trata el asunto de cómo el límite es extrapolado a distintas estructuras topológicas, asunto que obliga a generalizar el concepto de límite para cualquier caso, generalización que se recoge en el concepto matemático de *filtro*.
7. *Simbología del límite*: En este ítem es importante señalar que la mayoría de documentos consultados sobre historia abordaban muy poco el asunto de la simbología del límite. En todo caso, aquellos que referencian tal asunto, esencialmente comentan la notación moderna *épsilon – delta* introducida por Weierstrass y que formaliza la idea de límite. Solamente Felscher (2000) muestra una diferencia entre la notación moderna de límites para sucesiones y para funciones de dominio en los números reales, pero en todo caso se alude de igual forma a la simbología de Weierstrass.

Ante el anterior panorama durante la búsqueda y el estudio de documentos, se decidió indagar por artículos o libros que trataran específicamente el asunto de la historia de las notaciones en el Cálculo. En ese camino el autor más fructífero hallado fue Cajori (1923) quien dedica un apartado de su texto al estudio sobre la evolución de la notación del límite. En su artículo menciona diversas maneras de simbolizar el límite a través de la historia. Particular importancia revisten las notaciones de Weierstrass y de Leathem. Para el caso del primero, emerge la necesidad de decir a qué valor se acerca la variable a la cual se le calcula el límite (antes de Weierstrass esto no se hacía de forma explícita); así es como se crea la expresión “ $\lim_{x=a} f(x)$ ” para expresar “el límite cuando  $x$  se aproxima a

$a$ ". También se encuentra " $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty$ "; sin embargo, esta última expresión tiene un problema que soluciona Leathem (y que es subrayado por Hardy) y es que en el índice del límite decir que " $n = \infty$ " implica decir que cualquier cosa es igual a infinito, lo que no supone mucha coherencia. Es ante tal enconamiento que nace la notación moderna de utilizar la flecha para indicar la aproximación de la variable, por ejemplo, Hardy escribe la expresión  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$  para señalar dicho asunto.

### Conclusiones

Posterior a la realización del análisis documental lo primero que llama la atención es que, previo al estudio de los artículos, había una idea sobre algunos temas o hitos históricos que quizás iban a aparecer con particular énfasis (por ejemplo, el método de exhaustión griego, las fuentes y las fluxiones de Newton, el cálculo de áreas y superficies, etc.), y aunque en efecto su presencia se dejó ver en los textos, lo cierto es que su protagonismo fue mucho menor al esperado. Este asunto reviste importancia por cuanto permite evidenciar que aquellas preconcepciones probablemente guiadas por la enseñanza de las matemáticas recibidas durante años, no necesariamente se corresponden con los temas que se abordan en la literatura especializada de la Historia de las Matemáticas (Guacaneme, 2016).

En relación con lo anterior, otra conclusión que se infiere de la identificación de hitos relevantes en la evolución histórica del concepto de límite, es que los mismos no se corresponden a episodios particulares de la historia. Por el contrario, los hitos que se advirtieron, en general, versan cada uno sobre un momento histórico y en consecuencia son una serie de circunstancias en las que se ven envueltos matemáticos de cada época. En ese sentido es complejo elaborar un listado de sucesos específicos que se constituyan como los más importantes en la historia del límite; al respecto, parece más enriquecedor conocer el contexto y la continuidad que ha tenido ese camino histórico.

Para concluir también es importante señalar que lo presentado en este documento corresponde con una parte primaria de una tesis asociada la cual a la fecha todavía está en desarrollo, por lo cual no se trató de ninguna manera de hacer un listado exhaustivo ni definitivo sobre los hitos en la historia del límite, en ese sentido lo propuesto aquí es naturalmente perfectible y susceptible de ser modificado.

Finalmente, la realización de este trabajo y el estudio de la información recolectada, ponen de manifiesto la necesidad que existe en relación con el conocimiento funcional de la Historia que debería tener un docente de matemáticas (en ejercicio o en formación) para una mejor praxis de su labor (Galante, 2014). Dicho conocimiento no solamente es para tener una visión distinta sobre determinados objetos, conceptos o procesos matemáticos a partir del estudio de su historia, sino, como lo señalan Torres, Guacaneme y Arboleda (2014), para pensar el conocimiento histórico en virtud de la funcionalidad que pueda tener en la actividad del docente, entendiendo al profesor como responsable de promover el aprendizaje de las matemáticas.

### Referencias

- Bagni, G. (2005). The historical roots of the limit notion: cognitive development and the development of representation registers. *Canadian Journal of Science Mathematics and Technology Education*(4), 453-468.

*Hitos en la historia del concepto de límite*

- Baron, M. (1969). *The Origins of the Infinitesimal Calculus*. Oxford: Pergamon Press.
- Boyer, C. (1969). *Tópicos de Historia da matemática para uso em sala de aula: Cálculo*. Sao Paulo: Atual Editoria Ltda.
- Cajori, F. (1923). The History of Notations of the Calculus. *Annals of Mathematics*, 25(1), 1-46.
- Contreras, A., & García, M. (2008). La trayectoria institucional de un proceso de estudio sobre el límite de una función. *Investigación en educación matemática XII* (págs. 391-402). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Contreras, A., & García, M. (2011). Significados pretendidos y personales en un proceso de estudio con el límite funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14(3), 277-310.
- Delgado, C. (1998). *Estudio microgenético de esquemas conceptuales asociados a definiciones de límite y continuidad en universitarios de primer curso*. Bellatera: Universitat Autònoma de Barcelona (Tesis Doctoral).
- Durán, A. (2010). *La verdad está en el límite. El Cálculo Infinitesimal*. Navarra: Contenidos Editoriales y Audiovisuales S.A.
- Edwards, C. H. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer Verlag.
- Felscher, W. (2000). Bolzano, Cauchy, Epsilon, Delta. *The American Mathematical Monthly*, 107(9), 844-862.
- Fisher, G. (1978). Cauchy and the Infinitely Small. *Historia Mathematica*, 5(3), 313-331.
- Galante, D. (2014). The Use of the History of Mathematics in the Teaching Pre-service Mathematics Teachers. *REDIMAT*, 3(2), 110-120.
- García, G., Serrano, C., & Díaz, H. (2002). *La aproximación una noción básica en el cálculo. Un estudio en la educación básica*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- González, K. (2003). Origen, destierro y renacimiento de los infinitesimales. *Revista Educación y Pedagogía*, 15(35), 29-36.
- Guacaneme, E. (2016). *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas*. Cali: Universidad del Valle (Tesis doctoral).
- Ímaz, C., & Moreno, L. (2009). Sobre el desarrollo del Cálculo y su enseñanza. *El Cálculo y su Enseñanza*, 99-112.

*Hitos en la historia del concepto de límite*

- Jankvist, U. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 235-261.
- Jones, C. (1987). Las paradojas de Zenón y los primeros fundamentos de las Matemáticas. *MATHESES*, 3(1), 3-14.
- Lacasta, E., & Wilhelmi, M. (2010). Deslizamiento metadidáctico en profesores de secundaria. El caso del límite de funciones. *Investigación en Educación Matemática XIV* (págs. 379-394). Lleida: SEIEM.
- Maor, E. (2003). *The Facts on File Calculus Handbook*. New York: Facts on File.
- Medina, A. C. (2001). Concepciones históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas. *Tecne, Episteme y Didaxis*, 1(9), 44-59.
- Medrano, I., & Pino-Fan, L. (2016). Estadios de comprensión de la noción matemática de límite finito desde el punto de vista histórico. *REDIMAT*, 5(1), 287-323.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos Colombianos de Matemáticas*. Bogotá D.C: Ministerio de Educación Nacional.
- Mira, M. (2016). *Desarrollo de la comprensión del concepto de Límite de una función. Características de trayectorias hipotéticas de aprendizaje*. Alicante: Universidad de Alicante (Tesis Doctoral).
- Torres, L., Guacaneme, E., & Arboleda, L. (2014). La Historia de las Matemáticas en la formación de profesores de Matemáticas. *Quipu, Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología*, 16(2), 203-224.