

## ABORDAJE CUALITATIVO-GRÁFICO Y ANALÍTICO DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS PRIMER ORDEN CON APOYO SOFTWARE MATHEMATICA 9.0

Lic. Norberto Gerardo Oviedo Ugalde  
[noviedo2008@gmail.com](mailto:noviedo2008@gmail.com) – [noviedo@itcr.ac.cr](mailto:noviedo@itcr.ac.cr)  
Instituto Tecnológico de Costa Rica - Universidad de Costa Rica

Tema: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden.

Modalidad: CB

Nivel educativo: Universitario

Palabras clave: Ecuación Diferencial, Abordaje Cualitativo, Abordaje Gráfico, Software Mathematica.

### Resumen

*El presente trabajo de investigación tiene como finalidad ofrecer una propuesta didáctica que ayude a fortalecer el aprendizaje de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (EDO1) mediante abordaje cualitativo-gráfico y analítico apoyado con software Mathematica 9.0, entendido este como una integración de distintos enfoques.*

*La propuesta didáctica producto de la indagación a realizar está dirigida a estudiantes universitarios matriculados en el curso Ma-1005 (EDO) que ofrece la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica (UCR).*

*El abordaje analítico predominante en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, se caracteriza, por consistir básicamente en el aprendizaje de técnicas algorítmicas que permitan resolverlas, generar un aprendizaje mecánico y sin sentido en el educando, e inhibirlo al entendimiento-interpretación de la solución(es) de una EDO1.*

*Por su parte el enfoque cualitativo, trata de investigar las propiedades de las soluciones (monotonía, concavidad, simetría, singularidades, existencia y unicidad de la solución, etc.) a partir de su propia expresión, sin necesidad de resolverla. Este tipo de estudio combinado con la visualización de campos direccionales, curvas solución (con uso software Mathematica 9.0) y expresiones algebraicas obtenidas de resolución analítica permitirá un mejor entendimiento e interpretación del comportamiento de las soluciones de las EDO1.*

### Introducción

Las ecuaciones diferenciales son una parte muy importante del análisis matemático, y modelan innumerables procesos de la vida real, con aplicaciones a la ciencia y a la ingeniería, tales como en la mecánica, la astronomía, ciencias físicas, química, biología, economía, etc.

Según Blanchard, (1994), el curso de ecuaciones diferenciales se centra exclusivamente en la manipulación de expresiones algebraicas, donde los alumnos aprenden a ser eficaces en las operaciones algebraicas (métodos o recetas de resolución) sin necesidad de entender e interpretar los conceptos. Los alumnos van a las clases sin motivación por no comprender, en gran parte, lo que están haciendo y, consecuentemente, no comprenden la relevancia de este aprendizaje para su vida profesional.

Poincaré y Lyapunov desarrollaron la llamada teoría cualitativa, que consiste en estudiar las propiedades de las soluciones de una ecuación diferencial sin resolverla. Este método permite obtener gran cantidad de información acerca de las soluciones, aún sin conocerlas.

Es común preguntarnos ¿Cómo sabemos que la información que obtenemos acerca de una ecuación diferencial es correcta? La respuesta consiste en utilizar todo lo que se tenga a disposición: desde soluciones analíticas (las que generalmente se hace tradicionalmente énfasis), cálculos numéricos y argumentos cualitativos-gráficos.

Debido a que la moderna tecnología permite trazar con rapidez campos de direcciones, graficar complicadas funciones y ver datos de manera ágil y veraz, ya es hora de que se evite los temas y materias que exigen estos procedimientos.

El uso apropiado de la tecnología es indispensable si se pretenden utilizar en el estudio de las ecuaciones diferenciales como herramienta, donde los estudiantes puedan colaborar activamente en el proceso de aprendizaje y se sienta motivado a pensar, experimentar y comprender. No obstante, esta tecnología es capaz de suministrar soluciones incompletas, equivocadas o incorrectas, de ahí la necesidad de examinar las soluciones desde más de un punto de vista u enfoque.

El analizar y utilizar técnicas cualitativas-gráficas con analíticas son esenciales en el abordaje de las (EDO1), pues en muchos casos es imposible encontrar las soluciones analíticas en términos de funciones familiares y más aun su interpretación, pues sus propiedades pueden resultar ambiguas como consecuencia de la forma de la solución analítica. La exploración visual (curvas solución, campos de direcciones,

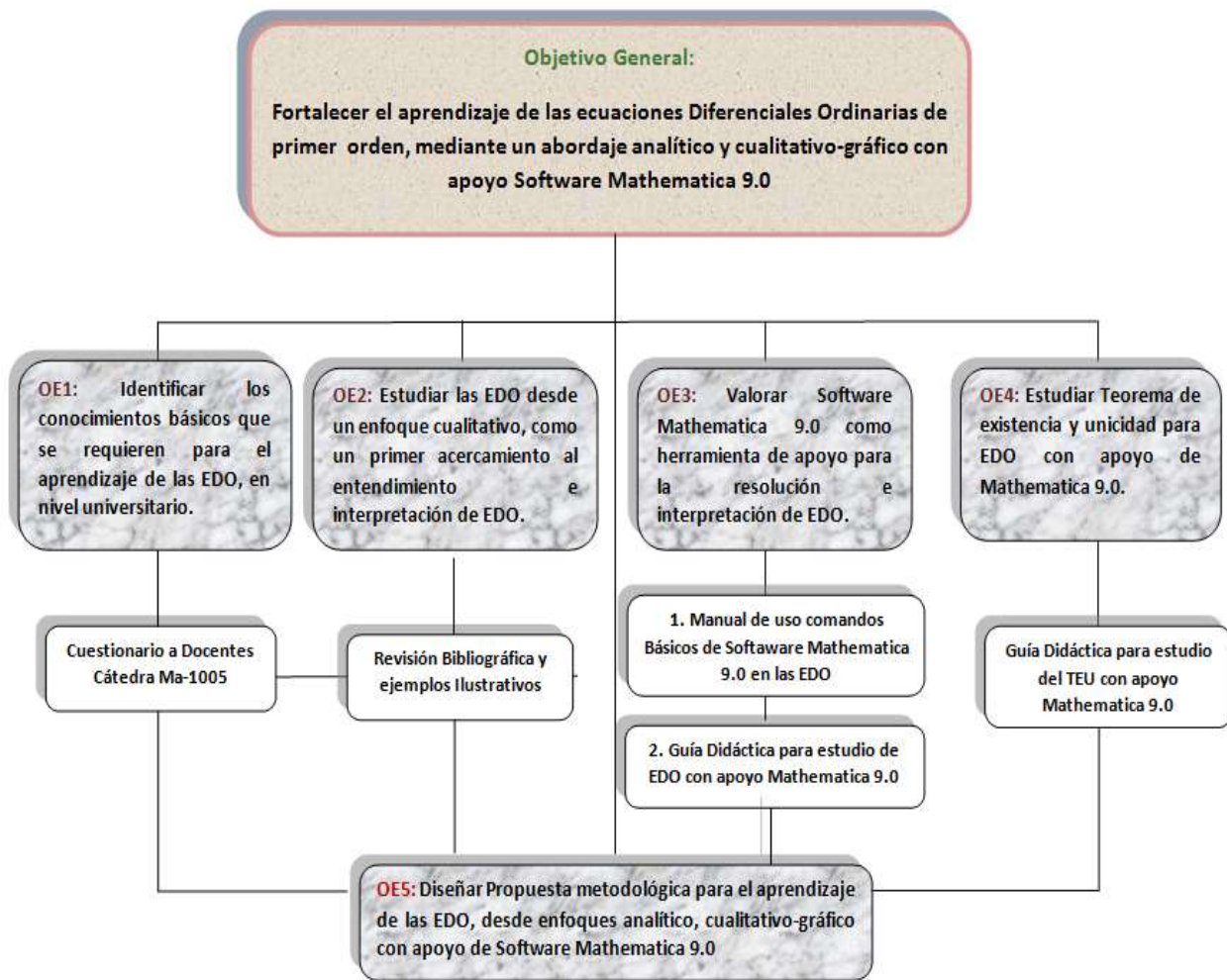
singularidades) de las soluciones brinda información muy valiosa a considerar con respecto al comportamiento de las soluciones.

En la Universidad de Costa Rica, la Escuela de Matemática imparte un curso de Ecuaciones Diferenciales Ma-1005 a estudiantes del área de Matemática Aplicada, cuya población casi en su totalidad es de carreras de ingenierías. Según cuestionario aplicado a profesores cátedra Ma-1005 e información recopilada sobre rendimiento académico, consta que existe muy bajas promociones de aprobación, en particular en el primer parcial, donde se evalúa resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (EDO1), teorema existencia y unicidad, problemas de aplicación. Asimismo resultados indican que la metodología dominante en el contexto de enseñanza de ecuaciones diferenciales, está fuertemente orientada hacia la solución algebraica.

El presente trabajo de investigación, pretende romper con ese esquema tradicional de enseñanza de las ecuaciones diferenciales, mediante el estudio de las EDO1 desde los enfoques analítico, cualitativo-gráfico con ayuda de Software Mathematica 9.0, esto con el fin de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, y ayude al entendimiento, exploración e interpretación de la(s) solución(es) de una EDO1.

A partir de este estudio, se pretende que el profesor sea un guía y facilitador; que el conocimiento matemático sea significativo para los estudiantes y que éstos puedan explorar las soluciones de las EDO1 desde distintos enfoques, desde un punto de vista integral.

A continuación se exponen Objetivo General, Objetivos Específicos y además instrumentos relacionados por aplicar.



*Figura1: Esquema de Objetivo General y Específicos e instrumentos*

### Conocimientos previos para aprendizaje EDO1

Si se considera que el primer elemento que dinamiza un proceso de aprendizaje son los conocimientos previos, se hace necesario y de vital importancia explorarlos para lograr una mejor conexión y comprensión en los educandos de conceptos asociados a las EDO1. En este sentido Ausubel afirma “*El factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese en consecuencia*”.

De este modo para David Ausubel un aprendizaje tiene significatividad en el educando, si le permite relacionar el nuevo conocimiento con el conocimiento que ya posee.

## **Estudio cualitativo de Ecuaciones diferenciales Ordinarias de primer orden.**

Con Henri Poincaré (1854-1912) y Alexander Liapunov (1857-1918) se inicia, a mediados del siglo XIX, y continuando hasta nuestros días, la etapa “cualitativa” en el desarrollo de las ecuaciones diferenciales. Se trata de investigar las propiedades de las soluciones de una ecuación diferencial a partir de su propia expresión.

El estudio directo de la ecuación diferencial a partir de las propiedades de la derivada junto a los teoremas de existencia y, sobre todo, unicidad, nos permite obtener una información muy valiosa sobre la gráfica de las soluciones de una ecuación diferencial que en la mayor parte de los casos no es fácil conseguir a partir de las soluciones analíticas de las mismas (cuando estas estén disponibles).

Al respecto Tall (1986) puso de manifiesto la importancia de utilizar el estudio cualitativo de las soluciones de ecuaciones diferenciales, para interpretar correctamente su proceso de resolución.

## **Uso de Software como herramienta para resolución e interpretación de EDO1**

Trabajos como los de Buchanan y otros (1991), Gollwitzer (1991), Moreno y Laborde (2003), y Blanchard (1994) han mostrado que gracias a diversos paquetes computacionales que permiten visualizar campos de direcciones, curvas solución, y la expresión algebraica de las soluciones de algunas ecuaciones diferenciales es posible mejorar su aprendizaje.

El tener un software de características específicas como recurso didáctico en el aula, va a posibilitar la visualización de los campos de direcciones, gráficas de familia de soluciones, soluciones particulares y singularidades de las EDO1, y poder hacer un análisis de dichas soluciones.

Por su parte Software Mathematica 9.0, es una herramienta de cálculo simbólico sencilla de usar y eficaz, incorpora un lenguaje de programación que permite implementar algoritmos numéricos, algebraicos, gráficos, incluso la realización de animaciones, con la ventaja adicional que supone el poder utilizar todos los comandos y

funciones propias del programa en este lenguaje, enriqueciéndolo valiosamente. Estas y muchas más son las razones de que el sistema sea usado por profesores, informáticos, ingenieros e investigadores en una extensa multitud de campos.

Si bien es cierto Mathematica 9.0 es un software con grandes potencialidades para la resolución y visualización de EDO1, al igual existen otros software como Maple, Matlab, Maxima, entre otros con las mismas condiciones y potencialidades. Para nuestro propósito se usará Software Mathematica 9.0 dado que la Escuela de Matemática de UCR cuenta con su licencia y además está disponible para los estudiantes con tan solo estar matriculado en algún curso de dicha escuela y no se le está aprovechando como herramienta valiosa para el aprendizaje de las EDO en el curso.

### **Teorema de existencia y unicidad en EDO1**

El no poder expresar analíticamente solución de una EDO1 como por ejemplo  $y' = e^{-x^2}$  no significa que no exista solución para esta ecuación, y de hecho existe porque existe la integral  $\int e^{-x^2} dx$ . Ejemplos como este puede hacer pensar a los estudiantes que algunas ecuaciones diferenciales no tienen soluciones, sin tener en cuenta el teorema existencia y unicidad.

Al hablar de las soluciones de problemas de condiciones iniciales con mucha frecuencia se podría preguntar cual función es la solución del problema, cual no es solución y si será única. Saber que la solución de un problema de condiciones iniciales es única es muy valioso, tanto desde el punto de vista teórico como práctico, ya que si no se supiera que la solución es única, entonces debería preocuparse por encontrar todas las soluciones posibles.

### **Importancia combinación de enfoques**

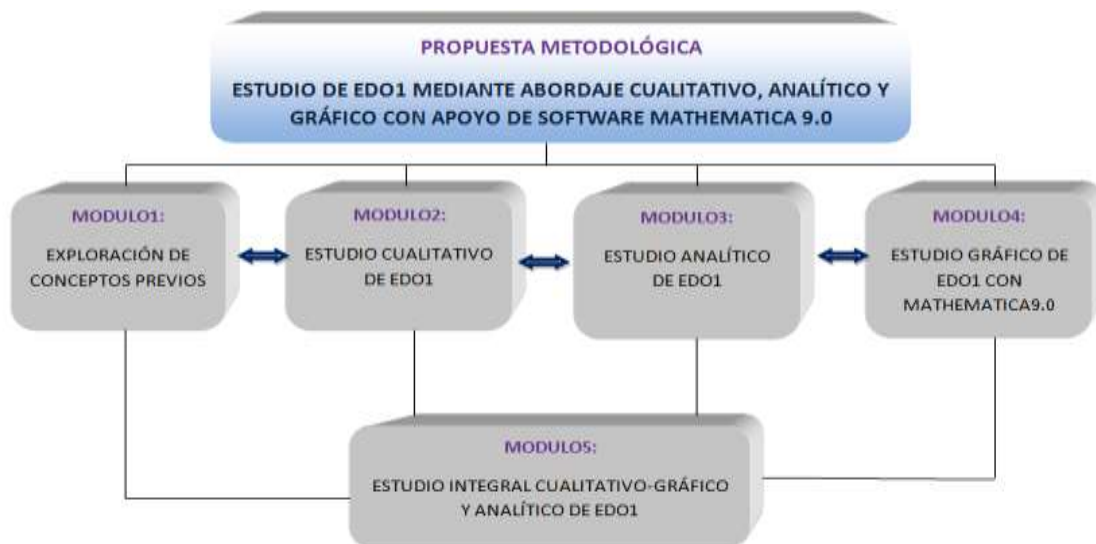
El abordaje de las EDO1, desde un punto de vista integral no sólo permite una mejor comprensión de las soluciones, sino también en el sentido de que cuando algún enfoque está insuficiente, el otro puede ayudar. Es por lo tanto importante la complementariedad de los diferentes enfoques (cualitativo-gráfico-analítico), como

forma de subsanar y hacerle comprender mejor al educando, situaciones de aprendizaje en las que uno u otro enfoque muestra dificultades y lo pueden llevar a resultados erróneos, como incluir soluciones que no son o dejar algunas como las singulares por fuera, no tener claro aspectos sobre dominio de las soluciones, entre otros.

Al respecto Duval (1998) señala que existe un encasillamiento en el uso de un solo registro de representación semiótica, además indica que se requiere, al menos, la coordinación de dos registros de manera espontánea para alcanzar la comprensión de un concepto.

### Propuesta Metodológica

Producto de la indagación realizada y resultados obtenidos de nuestra investigación en objetivos específicos 1, 2 y 3, se pretende plantear una propuesta basada en cinco módulos como así se muestra en figura 2, esta pretende romper con esquemas meramente tradicionalistas utilizados o predominantes en los salones de clase, es por ello que es estructurado de una manera distinta y sea una propuesta integral basada en enfoques no solo el analítico o tradicional sino se vea complementado con los cualitativo-gráfico apoyado con Mathematica 9.0.



**Figura 2: Esquema de Propuesta Metodológica**

En las guías didácticas de trabajo dadas en los distintos objetivos de la investigación y los módulos de la propuesta, además de ser validadas por expertos se pretende:

1. Seguir un enfoque mixto donde se combine método tradicionalista con el método constructivista.
2. Realizarlas en parejas con compañero del lado, dando paso a la interacción y discusión de los conceptos asociados.
3. Incentivar el uso recursos computacionales como una herramienta auxiliar para que los alumnos logren exteriorizar sus ideas, reflexionarlas, visualizarlas y discutir las.

### **Referencias bibliográficas**

- Abell Martha L. y Braselton James P. (2004). *Differential Equations with Mathematica*. Third edition. Elsevier Academic Press, USA.
- Blanchard, P. (1994). *Teaching Differential Equations with a Dynamical Systems Viewpoint*. *The College Mathematics Journal*, 25(5), pp. 385-395.
- Buchanan, J.L., Manar, T.J. y Lewis, H. (1991), en Zimmermann, W. y Cunningham, S. (eds.). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Mathematical Association of America, USA, pp. 139-146.
- Gollwitzer, H. (1991). *Visualization in differential equations*, en W. y Cunningham, S. (eds.). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Mathematical Association of America, USA, pp. 149-156.
- Lomen D. y Lovelock D. (2000). *Ecuaciones Diferenciales a través de gráficas, modelos y datos*. Primera edición. Compañía editorial Continental, México.
- Moreno J. y Laborde, C. (2003). *Articulation entre cadres et registres de représentation des équations différentielles dans un environnement de géométrie dynamique*. Actes du Congrès Européen ITEM, Reims, France.
- Tall, D. (1986). *Lies, Damn Lies and Differential Equations*. *Mathematics Teaching*, 114, pp. 54-57.