POLINOMIOS Y SISTEMAS DE ECUACIONES EN EL AULA A PARTIR DE ANTIGUOS TRATADOS DE ARTILLERÍA DE LOS SIGLOS XVIII Y XIX: NÚMEROS FIGURADOS Y APILAMIENTOS DE NARANJAS

Carlos Dorce
cdorce@ub.edu
Facultad de Matemáticas, Universidad de Barcelona, España

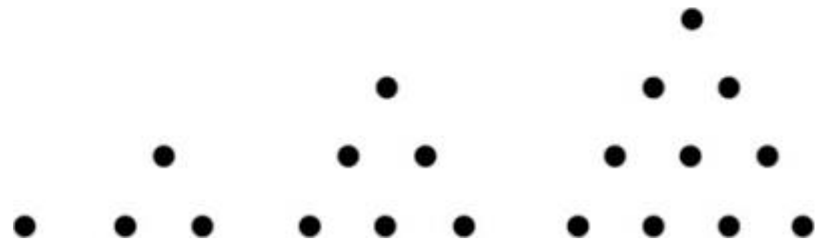
Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Modalidad: CB
Nivel educativo: Medio o Secundario
Palabras clave: Historia de las Matemáticas, Polinomios, Álgebra, Recursos didácticos

Resumen

La Historia de las Matemáticas no sólo es una ciencia en sí misma sino que nos proporciona los razonamientos que las grandes figuras del pensamiento universal elaboraron para resolver determinados problemas. En este sentido, nos podemos encontrar con los números figurados (sin mucho interés actualmente) dentro de los tratados de aritmética que se escribieron en lengua castellana hasta el siglo XIX. Paralelamente, distintos trabajos de artillería de esta misma época también recogían esta invención pitagórica como base fundamental de los conocimientos que debía tener todo artillero. ¿Por qué razón? Aquí se van a presentar una serie de actividades de aula que, complementadas con la lectura de estas antiguas obras de los siglos XVIII y XIX, como las del profesor catalán Tomás Cerdá (c.1715–1791), van a permitir al alumnado de secundaria poder trabajar de manera cotidiana tanto con los sistemas de ecuaciones como con el álgebra polinomial. Utilizando el razonamiento deductivo se presentarán los números figurados y se deducirán las fórmulas que determinan su suma de modo que, al final, los alumnos van a ser capaces de ver si un cierto número de naranjas pueden ser apiladas y en qué disposición.

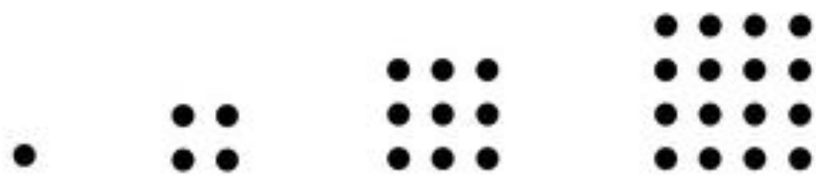
Introducción

La invención de los números poligonales nos remite a los tiempos de los matemáticos pitagóricos, quienes parece que construían las formas triangulares y cuadradas con determinados números de piedrecitas (Heath, 1921). De este modo, los números triangulares son aquellos que pueden representarse por un número determinado de puntos cuya forma es la de un triángulo:



1 $\quad 1 + 2 = 3 \quad 1 + 2 + 3 = 6 \quad 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

Análogamente, los números cuadrados son los que se corresponden con las formas cuadradas:

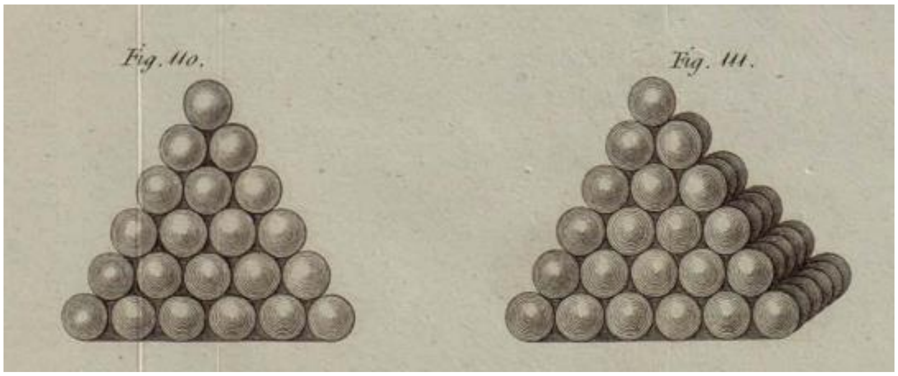


$1^2 = 1 \quad 2^2 = 4 \quad 3^2 = 9 \quad 4^2 = 16$

Uno de los primeros estudios de este tipo de números poligonales fue realizado por Nicómaco de Gerasa en el siglo I-II d.C. y sus cálculos fueron ampliamente conocidos por matemáticos árabes como Ibn al-Haytham (c. 965–1040) o Ibn al-Bannâ' (c.1256–c.1321) (Dorce, 2013). Estos números tienen multitud de propiedades, las cuales ya fueron conocidas por los matemáticos griegos, y aunque sólo sea por citar una de sus grandes apariciones dentro de la historia de las matemáticas, vale la pena acordarse de la gran rapidez atribuida a un joven Carl Friedrich Gauss (1777–1855) de 10 años de edad al calcular la suma 1 + 2 + 3 + ... + 100 = 5.050. Es evidente que este cálculo está relacionado con la suma de la progresión aritmética planteada pero, ¿fue consciente Gauss de que estaba calculando el 100º número triangular? ¿Por qué no? Tengamos en cuenta que precisamente fue Gauss quien en 1796 demostró que cualquier número podía escribirse como la suma de un máximo de tres números triangulares (Moore, 2013).

Actualmente, no es habitual hallar temas relacionados con los números poligonales en los currículos oficiales. Sin embargo, el estudio de este tipo de números sí aparecía en los libros de texto de los siglos XVIII y XIX, sobre todo a través de su vinculación con los manuales de artillería que se publicaban por entonces. Un ejemplo de ello lo encontramos en las *Liciones de mathematica* (1758-60), en dos volúmenes, del profesor jesuita catalán Tomás Cerdá (Tarragona, 1715–Forli, 1791). Además, Cerdá también los incluyó en su exitosa *Lección de Artillería: para el uso de la* *clase* (1764) y, dentro de esta misma época tenemos otros ejemplos de explicaciones de los números poligonales y, sobre todo de sus sumas, en:

- El *Tratado de Artilleria theorica y practica* (1733) de Juan Sánchez Reciente.
- El *Tratado de Artillería* (1756) de Sebastián de Labairu y Azagra.
- El *Prontuario de Artillería* (1828) de Ramón de Salas y Hernández.
- El *Tratado de Artillería de Marina* (1829) de Francisco Ciscar.



Detalle de la lámina XIII del volumen I del *Tratado de Artillería de Marina* de Ciscar

La figura de Tomás Cerdá (1715–1791)

Tomás Cerdá nació en Tarragona en el año 1715 y con 17 años ingresó en la Compañía de Jesús. Tras un período de formación, Cerdá se convirtió en profesor de filosofía, teología y matemáticas y ejerció la docencia de estas materias en Cervera, Gerona y Zaragoza. Como matemático, el punto de inflexión de su aprendizaje se produjo alrededor del año 1755, momento en el que la Compañía decidió enviarlo a Marsella y ponerlo bajo la tutela del también jesuita Esprit Pézenas (1692–1776). En 1749, Pézenas había traducido al francés y publicado el *Treatise of Fluxions* de Colin MacLaurin (1698–1746) y abrió el campo del análisis infinitesimal a un Cerdá que, probablemente, todavía no conocía su existencia. Con esta nueva visión del cálculo, regresó a Barcelona donde fue nombrado profesor de la nueva Cátedra de Matemáticas del Colegio de Cordelles, posición que ocupó entre los años 1756 y 1764. En esta etapa, Cerdá planeó la publicación de unas enciclopédicas *Liciones de Mathematicas* en cinco volúmenes de los que sólo aparecieron los dos primeros, dedicados a la aritmética y el álgebra (1758) y a la geometría (1760), respectivamente. La obra puede ser considerada como una de las más completas en estas áreas y la pena es que la impresión de los otros volúmenes no se produjera nunca, ya que prometían la aplicación del álgebra a la geometría y, lo que hubiese sido más importante en ese momento de la historia de las matemáticas en España, el "Método directo e inverso de las fluxiones, que otros llaman Cálculo Diferencial e Integral".

En el año 1764, Cerdá fue llamado a Madrid para hacerse cargo de las lecturas de Matemáticas del Colegio Imperial, a la par que fue nombrado Cosmógrafo Mayor del Consejo de Indias. Además, en ese mismo año, con motivo de la apertura de la Academia de Artillería de Segovia, también publicó su *Leccion de Artillería, para el uso de la clase*.

Con la expulsión de los jesuitas decretada por Carlos III el 3 de abril de 1767, Cerdá se trasladó a los Estados Pontificios, acogiéndose a la "caridad de los Padres Dominicanos de la Ciudad de Forli" (Hervás y Panduro, 1794), donde finalmente murió en 1791.

Los apilamientos de balas en la obra de Cerdá

Dentro de las *Liciones de Mathematicas*, la aparición de los números poligonales y su suma se produce en el artículo III sobre el "Modo de sumar algunas series" del capítulo XVI "De las Series" del tomo II. Tras demostrar que:

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

Cerdá explica que "esta fórmula [...] se puede aplicar a las pilas cuadradas de balas que suele haber en los almacenes de Artillería, pues las filas siguen los cuadrados de los números naturales, y los lados de las filas los mismos números naturales, de manera que el vértice de la pila consta de 1 sola bala, la segunda fila tiene 4, la tercera 9, etc, y el lado de la primera fila es 1 bala, el de la segunda es 2, el de la tercera 3, etc, y así la suma de todas las balas de una pila cuadrada es igual a la suma de los cuadrados de los números naturales, hasta tantos términos cuantas balas tiene uno de los lados de la última fila, o uno de los ángulos de dicha pila" (Cerdá, 1758). También explica cómo calcular el número de balas de las pilas cuadradas incompletas, y el de las pilas oblongas, completas e incompletas, que son aquellas que tienen un rectángulo de balas por base. En el capítulo siguiente, Cerdá trata sobre los "números figurados", su cálculo y la determinación de la suma de una serie consecutiva de los mismos.

Del mismo modo, la *Leccion de Artilleria* incluye un apéndice con las "Reglas para contar las balas o bombas en los almacenes de Artillería" ya que "no llevarán a mal los que frecuentan las Atarazanas y almacenes de Artillería, el que ponga aquí en breve algunas reglas para calcular con expedición el número de balas o bombas que en dichos almacenes bien arreglados se encuentran"

(Cerdá, 1764). En este caso, las fórmulas dadas, además de las correspondientes a las pilas oblongas, son:

<u>Pilas de base triangular</u> (donde $T_n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ es el enésimo número triangular):

$$T_1 + T_2 + ... + T_n = \frac{n}{1}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+2}{3} = \frac{n^3+3n^2+2n}{6}$$

<u>Pilas de base cuadrada</u> (donde $Q_n = n^2$ es el enésimo número cuadrado):

$$Q_1 + Q_2 + ... + Q_n = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

Una propuesta de aula

La actividad que aquí se propone consiste en descubrir, en primer lugar, cuál es la fórmula que se esconde tras la suma de los números cuadrados o, lo que es lo mismo, averiguar cuántas naranjas caben en una pila de base cuadrada. Para ello, se propone a los alumnos de 4º de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (15-16 años) de un instituto situado en la periferia de la ciudad de Barcelona, en España, rellenar la siguiente tabla de valores:

Pisos	Nº de naranjas
1	1
2	1 + 4 = 5
3	1 + 4 + 9 = ...
4	...
...	...

Los alumnos trabajan en grupos heterogéneos que intentan sacar el máximo provecho de las cualidades de cada uno de sus cuatro o cinco miembros. Se parte del hecho que dicho alumnado ha trabajado ya las funciones afín y cuadrática, con lo que la pregunta que se les propone inicialmente es: ¿se corresponde esta tabla de valores a una función afín? Tras una breve discusión sobre el tema, tres son los argumentos mayoritarios aportados en clase:

1. Si se representa gráficamente, su gráfica no es una línea recta. Este argumento implica que se tienen que representar los puntos obtenidos en la tabla de valores en unos ejes cartesianos.
2. Si fuera una función afín $f(x) = mx + n$, tendría la pendiente m constante, es decir, se cumpliría que $f(x+1) - f(x) = m$. Este hecho no se produce:

$$f(2) - f(1) = 5 - 1 = 4 \text{ y } f(3) - f(2) = 14 - 5 = 9$$

3. Si se plantea como un sistema de ecuaciones, no se obtiene la solución que se quiere:

$$\left.\begin{array}{r} f(1) = m + n = 1 \\ f(2) = 2m + n = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow m = 4 \Rightarrow n = 1 - m = -3 \Rightarrow f(x) = 4x - 3$$

Por lo tanto, $f(3) = 4 \cdot 3 - 3 = 9 \neq 14$.

Aprovechando este último argumento, el siguiente paso es preguntar: ¿se corresponde esta tabla de valores a una función cuadrática? En este caso, la comparación de los puntos representados con el trazo de una parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ es más difícil de ver a simple vista y, pese a que la intuición provoca que haya alumnado que se decanta por esta posibilidad, aparece de manera natural la resolución de un sistema de ecuaciones de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left.\begin{array}{r} f(1) = a + b + c = 1 \\ f(2) = 4a + 2b + c = 5 \\ f(3) = 9a + 3b + c = 14 \end{array}\right\} \Rightarrow a = \frac{5}{2}, b = -\frac{7}{2}, c = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{5}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 2$$

Sin embargo, $f(4) = \frac{5}{2} \cdot 4^2 - \frac{7}{2} \cdot 4 + 2 = 28 \neq 30$.

La resolución de un sistema lineal de estas dimensiones no está previsto a estas alturas de programación curricular (es temario de cursos posteriores) y, por lo tanto, se propone a cada grupo de alumnos que intente dar con algún método de solución. En este caso, de los 7 grupos que se formaron en el aula, tan solo dos dedujeron que el método de sustitución era un camino adecuado y un tercero propuso el método de reducción de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} f(1)=a+b+c=1 \\ f(2)=4a+2b+c=5 \\ f(3)=9a+3b+c=14 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 3a+b=4 & [f(2)-f(1)] \\ 5a+b=9 & [f(3)-f(2)] \end{cases} \Rightarrow 2a=5 \Rightarrow a=\frac{5}{2}\text{, por reducción}$$

El resto de grupos no llegaron a ningún razonamiento correcto. De este modo, se puede aprovechar para introducir y comentar este tipo de resoluciones para sistemas lineales con más de dos ecuaciones y dos incógnitas.

¿Qué podemos hacer ahora, una vez hemos terminado con los argumentos conocidos? En la actividad concreta que se realizó, se retó al alumnado a encontrar un polinomio del tipo $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Para evitar excesivos cálculos, se simplificó el problema avisando de que $d=0$, con lo que, siguiendo un razonamiento parecido a los casos anteriores, el alumnado tuvo que enfrentarse a un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left.\begin{array}{r} f(1)=a+b+c=1 \\ f(2)=8a+4b+2c=5 \\ f(3)=27a+9b+3c=14 \end{array}\right\} \Rightarrow a=\frac{1}{3},\ b=\frac{1}{2},\ c=\frac{1}{6},\ [d=0]$$

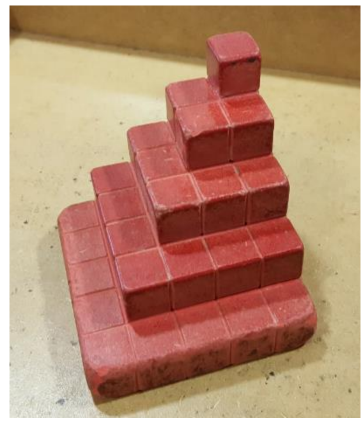
Este resultado cumple, efectivamente que $f(4)=30$ i que $f(5)=55$, con lo que la función $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x=\frac{2x^3+3x^2+x}{6}$ es una buena candidata para ser la generadora de los números que buscamos. Además, factorizando el numerador, el alumnado llegó a la conclusión de que $f(x)=\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$.

Para finalizar, cada grupo fue retado a encontrar la fórmula homóloga para pirámides de base triangular.

La introducción de la historia de las matemáticas

Además de todo el razonamiento lógico y la búsqueda de estrategias que supone esta actividad, hemos conseguido una buena excusa para introducir los números poligonales y su historia, y también su aparición en los manuales de artillería de los siglos XVIII y XIX. La historia de las matemáticas, como ya he comentado en otras presentaciones anteriores donde he intentado recoger diversas pruebas de ello (por ejemplo: Dorce, 2016) consigue dar otro punto de vista a los currículos y aporta una motivación extra al alumnado que puede ser un hilo conductor de una clase más interesante y amena. Así, en esta actividad concreta, algunas de las actividades que se realizaron al respecto fueron las siguientes:

1. Presentación de la figura de Tomás Cerdá y su importancia dentro de las matemáticas catalanas y españolas. Se propusieron trabajos voluntarios y se buscaron las referencias concretas dentro de las *Liciones de Mathematicas* y la *Leccion de Artilleria*.
2. Trabajo voluntario sobre los números poligonales siguiendo las propiedades descritas en Heath (1921) y Dorce (2013).
3. Visita al Museu de les Matemàtiques de Catalunya, en Cornellá de Llobregat (Barcelona), donde puede encontrarse la fórmula de la suma de los n primeros números cuadrados a partir de la experimentación con material didáctico adecuado (ver anexo).



4. Introducción al problema de Kepler sobre el apilamiento de las naranjas. Búsqueda de información al respecto y discusión sobre los resultados obtenidos a través de internet. Este tema posibilitó una excusa para hablar de las diferencias entre conjetura y resultado demostrado.
5. A partir del punto anterior, se pueden buscar otras conjeturas matemáticas famosas comprensibles para el alumnado de este nivel educativo, como la conjetura de Goldbach o la infinitud de los números perfectos.

Con todo, esta actividad ofrece al alumnado la posibilidad de pensar, razonar, conjeturar y demostrar resultados matemáticos dentro de una serie de clases amenas y motivadoras.

Referencias bibliográficas

Cerdá, T. (1758). *Liciones de mathematica o Elementos Generales de Arithmetica, y Algebra para el uso de la clase,* Tomo II. Barcelona: Francisco Suriá.

Cerdá, T. (1764). *Leccion de Artilleria, para el uso de la clase*. Barcelona: Francisco Suriá.

Dorce, C. (2013). *Història de la matemàtica. Des de Mesopotàmia fins al Renaixement*. Barcelona: Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona.

Dorce, C. (2016). Nombres perfectes, amics i sociables. Una proposta per a l'aula. *Noubiaix,* 39, desembre 2016, 35-51.

Heath, T. (1921). *A History of Greek Mathematics*. Oxford: Claredon Press, Volumen I.

Hervás y Panduro, L. (1794). *Viage estático al mundo planetario en el que se observan el mecanismo y los principales fenó- menos del cielo; se indagan sus causas físicas, y se demuestran la existencia de Dios y sus admirables atributos*, Vol. 2. Madrid: Imprenta de Aznar.

Maz Machado, A. y Rico Romero, L. (2009). Las *Liciones de mathemáticas* de Thomas Cerda: doscientos cincuenta años (1758–2008). *Suma* 60, Febrero 2009, 35-41.

Moore, T. (2013). An Investigation Relating Square and Triangular Numbers. *Mathematics Faculty Publications*. Paper 37.

POLINOMIOS Y SISTEMAS DE ECUACIONES EN EL AULA A PARTIR DE ANTIGUOS TRATADOS DE ARTILLERÍA DE LOS SIGLOS XVIII Y XIX: NÚMEROS FIGURADOS Y APILAMIENTOS DE NARANJAS

Carlos Dorce
cdorce@ub.edu
Facultad de Matemáticas, Universidad de Barcelona, España

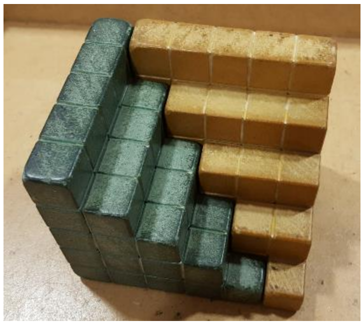
Anexo

El material didáctico que dispone la exposición permanente del Museu de les Matemàtiques de Catalunya para demostrar la fórmula

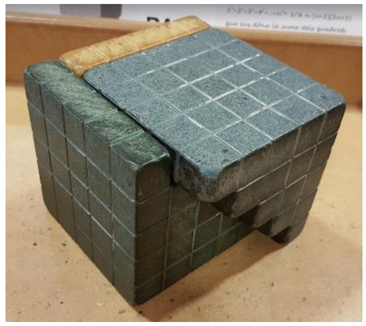
$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

consta de seis piezas de madera que representan la suma $S_5=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$:

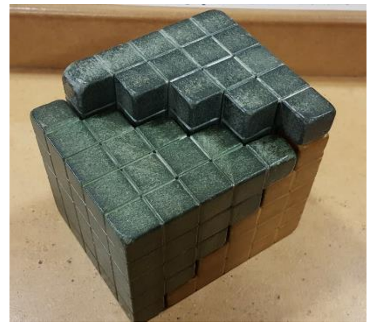
La demostración consiste en ir jugando con las piezas hasta conseguir formar el ortoedro adecuado. Los pasos son los siguientes:



Unión de dos piezas



Unión de tres piezas



Unión de tres piezas (reverso)

Unión de cuatro piezas

Unión de cinco piezas

Unión de las seis piezas

Por lo tanto, la suma de las seis piezas S_5 constituyen un ortoedro cuya base es un rectángulo de lados iguales a 5 y 6 unidades, y altura igual a 11. Si miramos la última de las imágenes, correspondiente al ensamblaje de las seis piezas vemos que:

$$6S_5 = 5 \cdot 6 \cdot 11$$

En general, si hubiésemos considerado piezas representando a $S_n = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$ hubiésemos llegado a la conclusión de que:

$$6S_n = n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

Consecuentemente:

$$S_n = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$