

LAS FUNCIONES SIGMOIDEAS COMO MODELO DE LA HISTÉRESIS FERROMAGNÉTICA.

¹Jorge M. Gianfelice. - ²Miqueas R. Menaglio. - ³Matías A. Ruggeroni.

jorgegianfelice@gmail.com. - miqueasmenaglio@hotmail.com.ar - matiasruggeroni@gmail.com

¹Universidad de Buenos Aires. y P.I.D: Universidad Tecnológica Nacional (Facultad Regional Delta, Campana). San Martin 1170. CP. 2084. Buenos Aires.

²P.I.D: Universidad Tecnológica Nacional (Facultad Regional Delta, Campana). San Martin 1170. CP. 2084. Buenos Aires.

³P.I.D: Universidad Tecnológica Nacional (Facultad Regional Delta, Campana). San Martin 1170. CP. 2084. Buenos Aires.

Modalidad: CB

Nivel Educativo: Educación de adultos.

Núcleo temático: Matemáticas y su integración con otras áreas.

Palabras claves: Histéresis – Modelos – Sigmoides – Ferromagnetismo

Resumen:

El estudio matemático de la histéresis magnética que proviene de los materiales ferromagnéticos no es muy común y aparecen muy pocos reportes en la literatura vigente. Tal vez, esto es así porque el ciclo de histéresis muestra una forma poco convencional para que se ajuste una función matemática sencilla y pueda modelarlo con solo encontrar unos pocos parámetros. Existen algunos trabajos que han mostrado un avance usando funciones sigmoides como base de la modelación del ciclo de histéresis.

El presente trabajo tiene por objetivo presentar un análisis completo de un tipo particular de funciones sigmoides, que a nuestro criterio, permitan ajustar el ciclo de la histéresis magnética para distintos casos de materiales. Se pretende mostrar como variando los parámetros fijos de la función elegida podemos modelar la histéresis magnética obtenida experimentalmente. Así se buscará una base teórica para distintos ciclos que permiten dar cuenta de datos que resulten de interés en el estudio de materiales ferromagnéticos.

Finalmente pretendemos comparar nuestros resultados con los obtenidos de algunas de las teorías vigentes basadas en otro tipo de función sigmoidea, dejando un espacio abierto para discutir si el resultado es relevante y ha aportado un avance real al modelado en cuestión.

Introducción

El análisis de las funciones matemáticas definidas en una variable real generó una abundante literatura a lo largo de la historia. Esto permitió no sólo modelar un gran número de hechos físicos,

sino también proporcionar una gran información en el momento de abordar trabajos de mediciones con parámetros fijos y variables.

En la mayoría de las aplicaciones de materiales ferromagnéticos, las propiedades magnéticas son más convenientes expresarlas como curvas de magnetización o familias de ciclos de histéresis. La ausencia de un modelo cuantitativo adecuado del comportamiento de estos materiales ha provocado mucha dificultad, tanto en la comprensión del proceso magnético como en la descripción de la variabilidad de la magnetización con otros parámetros, tales como la fatiga o la temperatura.

Aunque no hay una forma totalmente general de representar un ciclo de histéresis en materiales ferromagnéticos, sí existe una forma de ciclo que se reproduce con frecuencia en la práctica. A esta forma se la denominaremos "ciclo sigmoideo" representado por dos funciones sigmoideas que han sido discutidas por Craik y Tebble. Su forma general se muestra en la figura 1,

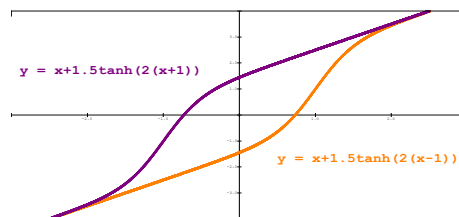


Figura 1. Dos funciones sigmoideas que configuran un ciclo cerrado simétrico que denominaremos *ciclo sigmoideo*.

En esta

presentación vamos a mostrar como un determinado *grupo de funciones*, que en colectivo académico se la denominan “*sigmoides*” o “*sigmoideas*” permiten modelar el ciclo de histéresis de un material ferromagnético al ser éste sometido a un campo magnético externo. Estas funciones que se definen en el cuerpo de los números reales con forma de “S”, y de ahí su nombre, se las pueden expresar por medio de diferentes fórmulas. Pero nosotros para el presente trabajo utilizaremos la denominada *función generatriz* que viene dada por la expresión,

$$f(x) = ax + b \tanh[c(x \pm d)] \quad (1)$$

Asimismo, y antes de llevar a cabo el ajuste de la función al ciclo de histéresis, comenzaremos con un estudio matemático analítico para la función elegida.

Análisis Matemático de la función

Las propiedades y caracterización analíticamente la función sigmoidea vienen dadas por los parámetros fijos, a, b, c y d que son los números que establecen la forma específica de cada función y de ahí su importancia para esclarecer el modelo que mejor se adecue al ciclo de histéresis

ferromagnética. En el *anexo I* se pueden observar la variación de la función sigmoide al fijar tres de estos parámetros y variar el cuarto.

Acotación y continuidad. Toda función sigmoidea está acotada por dos asíntotas. Estas asíntotas se pueden encontrar siguiendo la teoría básica del cálculo diferencial sobre la lateralidad de límites. Para el estudio vamos a considerar a la función sigmoidea de dos maneras diferentes:

Con $a = 0$: En este caso se puede observar que la función presenta dos asíntotas horizontales en $y = b$ e $y = -b$.

Con $a \neq 0$: En esta otra situación la función presenta dos asíntotas oblicuas que resultan ser, $As_1(x) = ax + b$ y $As_2(x) = ax - b$.

Ritmo de cambio y puntos críticos. El estudio del ritmo de cambio de la curva sigmoidea permite buscar puntos críticos con el fin de validar la representación del parámetro “ d ”. Parámetro que expresa la inflexión de la curva, es decir el cambio de concavidad. Utilizando el criterio clásico para encontrar puntos críticos, la derivada segunda de la función viene dada por,

$$f''(x) = -2bc^2 \tanh(c[x \pm d]) \cdot \left(1 - b \tanh^2[c(x \pm d)]\right)$$

si procedemos a obtener la única raíz real, ésta resulta ser $\pm d$. Será ésta positiva o negativa cuando según anule el argumento de la tangente hiperbólica, que es el término que anula la segunda derivada. Así la raíz de la segunda derivada resulta ser,

$$0 = -2bc^2 \tanh(c[x \pm d]) \cdot \left(1 - b \tanh^2[c(x \pm d)]\right) \quad \text{si } x = \pm d$$

Con el criterio de la tercera derivada podemos observar que resulta distinta de cero en la abscisa que se anuló la segunda derivada. Así quedó probado que la curva tiene un punto de inflexión real que marca el cambio de concavidad de la misma.

Relaciones y proporciones entre los parámetros fijos.

Definición de la curva como ciclo.

En este apartado vamos a definir un ciclo completo que genera la función sigmoidea. Para esto partimos de la simetría que se establece de la función en términos de sus parámetros fijos. Esta simetría debe respetar no solo su imagen especular respecto al eje de las abscisas sino también al de las ordenadas. De esta manera, el valor de “ d ”, es el único, que como ya demostramos supra, controla el punto de inflexión de la curva, y por ende su simetría cada vez que se mantengan fijos los demás parámetros. Si procedemos ahora a tomar dos curvas sigmoideas con parámetros “ d ”

opuestos, estas generan el ciclo buscado, donde se puede apreciar un área cerrada como se muestra en la figura 2,

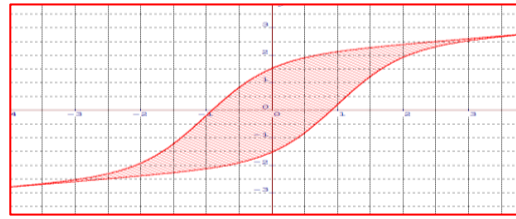


Figura 2. Área encerrada por un ciclo sigmoideo.

De esta manera, para formar un ciclo sigmoide se utilizarán dos funciones sigmoideas como se especifican a continuación,

$$f(x) = \begin{cases} ax + b \tanh[c(x+d)] \\ ax + b \tanh[c(x-d)] \end{cases} \quad \forall x \in \mathfrak{R}$$

(4)

Es menester aclarar que esta función no es una función a trozos sino son dos funciones que se acoplan para definir el ciclo buscado. Es decir, cada función con su correspondiente “ d ” expresa la mitad del ciclo.

Aproximación asintótica y acople.

El acoplamiento entre dos funciones sigmoides, está directamente definido por las asíntotas que describimos anteriormente y su relación con los parámetros fijos como mostraremos a continuación. Cuando nos referimos al acople nos proponemos encontrar el punto de abscisa que proyectado en la función establezca una aproximación a la asíntota con cierto porcentaje de error pre-establecido. Así buscaremos una fórmula que relacione los parámetros fijos y que presente un acople con una exactitud del 99,9%. Para ello consideramos una función sigmoide con $a = 0$, es decir,

$$f(x) = b \tanh[c(x-d)]$$

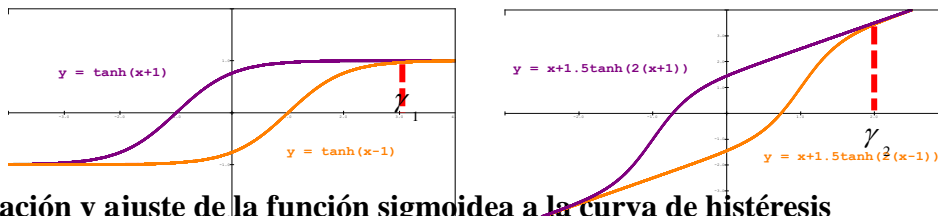
cuya asíntota horizontal viene dada por $y = b$. Así buscamos el punto de abscisa γ que contemple una exactitud del 99,9% en la aproximación de entre $f(x)$ y $f(\gamma) = b$. Así,

$$\gamma = \frac{\tanh^{-1}(0,999)}{c} + d \quad \equiv \quad \gamma \cong \frac{3,8}{c} + d$$

(5)

Esta fórmula así definida, en términos de sólo dos de los parámetros fijos, permite conocer el valor de abscisa con la exactitud que mencionamos. Es importante destacar que el cálculo también pudo obtenerse con la función cuyo argumento es el opuesto del considerado en la fórmula (5). Se

puede aclarar que, bajo el mismo error, no tiene sentido haber trabajado con $a \neq 0$ ya que esta situación genera asíntotas oblicuas, y en consecuencia el valor de γ a obtenerse es de inferior valor numérico que el obtenido por la fórmula (5). Es decir, que esta fórmula impone una cota, en módulo, para los casos de ciclos sigmoideos que exhiban asíntotas oblicuas. En la figura (3) se pueden observar dos ciclos sigmoideos, uno con $a \neq 0$, y otro con $a = 0$. El valor γ resulta menor en el caso de la asíntota oblicua, independientemente del ciclo considerado. Concluimos que la exactitud del ciclo en la oblicua se mejora notablemente, y no tiene sentido buscar otra fórmula para hallar el valor de γ .



Modelización y ajuste de la función sigmoidea a la curva de histéresis

Figura 3. Los valores de abscisas para una misma aproximación resultan siempre de menor valor absoluto en el caso que la función sigmoidea venga dada por asíntotas oblicuas. Es decir, $\gamma_1 > \gamma_2$.

Ahora vamos a establecer un ajuste por las relaciones y proporciones que se dan entre los parámetros de la función sobre mediciones obtenidas empíricamente. Hay que tener en cuenta que estos parámetros pueden variar de la forma, $a \geq 0$, $b > 1$, $c > 1$ y $d \in \mathfrak{R}$.

De esta manera pretendemos obtener información precisa de algunas de las magnitudes significativas que derivan de la histéresis y dejando por sentado que no perseguimos dar un nuevo modelo de dicho ciclo. En este trabajo presentamos solo dos magnitudes que derivan directamente del sistema sintáctico presentado.

- *El campo coercitivo y el campo remanente derivados de los parámetros y forma de la función sigmoidea.*

Para poder modelar el ciclo de histéresis ferromagnética partimos de la ecuación (1), donde la magnetización ferromagnética del campo inducido viene dada por $H = x$ y el campo remanente queda definido por $f(x) = B(H)$. Luego el modelo del ciclo sigmoideo definirá el ciclo de histéresis de forma general,

$$B(H) = aH + b \tanh[c(H \pm d)]$$

Cuando $B(H) = 0$ el campo coercitivo está dado por H_C ,

$$0 = aH_c + b \tanh[c(H_c \pm d)]$$

Si a su vez el termino lineal “a” es nulo, las asíntotas serán horizontales y H_c quedará definido por el parámetro “d” resultando,

$$H_c = \pm d$$

(6)

Luego el campo remanente B_r vendrá dado para $H_c = 0$, y siendo,

$$B_r = b \tanh[\pm cd]$$

Por otro lado si el termino lineal “a” no es nulo, la asíntotas no serán horizontales, entonces para calcular el H_c debemos considerar,

$$0 = aH_c + b \tanh[c(H_c \pm d)]$$

(7)

Luego de operar algebraicamente con relaciones hiperbólicas, *ver anexo II*, y realizar una aproximación lineal se puede observar que H_c viene dado por,

$$H_c = -\frac{1}{2} \frac{(a+bc-acd)}{ac} \pm \frac{1}{2} \frac{b}{ac} \sqrt{\left(2a+2bc-2acd/b\right)^2 + 4adc^2/b} \quad (8)$$

La raíz negativa de la ecuación (8) no tiene sentido y por ende se descarta. Asimismo se han tomado varios casos particulares de ciclos de histéresis cuyas gráficas han arrojado un valor del campo coercitivo con un error cuadrático del orden de 10^{-3} . Es importante tener en cuenta que este error se obtuvo con sólo una aproximación lineal.

- *El cálculo del área de la histéresis sigmoidea, como magnitud física de la dureza magnética del material.*

El área encerrada entre las dos curvas, que conforman el ciclo de histéresis ferromagnética, representa la dureza magnética del material en cuestión. Dicha área se puede calcular fácilmente con la expresión,

$$\text{Área} = 4bd$$

(9)

Una manera práctica de aceptar la fórmula (9) surge suponiendo que “c” toma un valor elevado como se quisiera, lo que convierte al ciclo en un rectángulo de *base* = $2d$ y *altura* = $2b$, Asimismo

se en el *anexo IV* se puede ver la validación formal de dicha fórmula sin necesidad de hacer esta última consideración sobre el valor de “c”. A continuación en la figura 4,

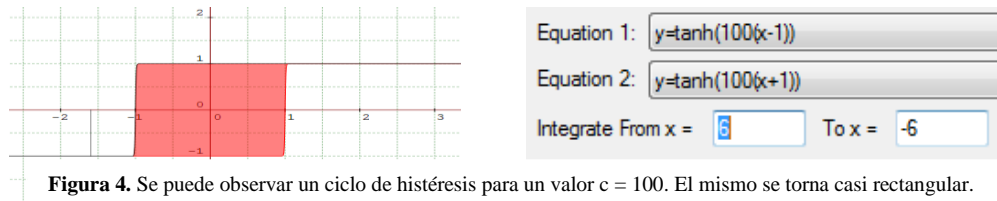
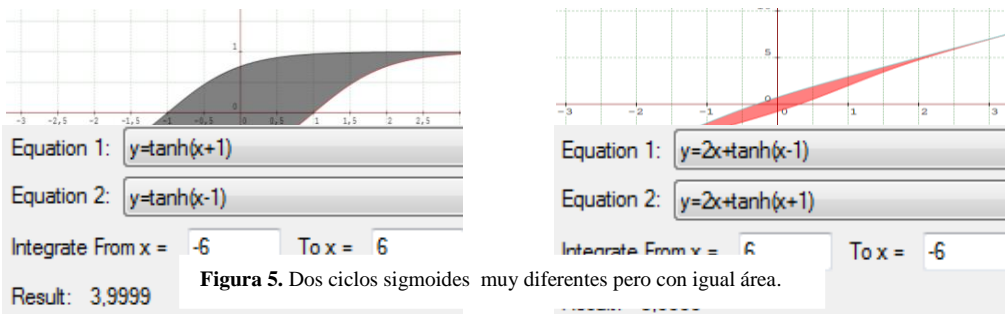


Figura 4. Se puede observar un ciclo de histéresis para un valor $c = 100$. El mismo se torna casi rectangular.

Ahora bien, sabiendo que el área entre curvas no cambia si variamos los parámetros “a” y “c”, como se ve en la figura 5, podemos afirmar que el área se mantiene constante independientemente de los otros parámetros.



Así

Figura 5. Dos ciclos sigmoides muy diferentes pero con igual área.

podemos afirmar

que se puede extrapolar la fórmula (9) para cualquier caso del modelo de ciclo ya explicado.

Conclusiones

El análisis de los parámetros fijos de la función sigmoidea nos permitió establecer la variación de la forma de un ciclo sigmoideo. Estos parámetros permitieron una muy buena modelización de la histéresis ferromagnética. Así, pudimos solapar dos curvas sigmoides con un error de 99,9% de exactitud. Luego, teóricamente validamos el procedimiento utilizado basándonos en el ritmo de cambio de las curvas. Asimismo establecimos las relaciones entre los parámetros mencionados y estimamos una fórmula para calcular, con cierta aproximación, el valor del campo coercitivo y remanente del ciclo de histéresis.

Las fórmulas (6) y (8) dan cuenta del cálculo con un error determinado por la aproximación lineal utilizada. Aproximación que se puede mejorar al aumentar el grado del polinomio interpolador.

Finalmente, en función de los resultados obtenidos, encontramos una aproximación del área del ciclo de histéresis. Se observó que el área no depende de los parámetros “a” y “c” y conjuntamente pudimos obtener una fórmula muy sencilla basada en el cálculo del campo coercitivo. El obtener un buen resultado del área del ciclo de histéresis permite dar con un adecuado valor de la dureza

ferromagnética de los materiales. De ahí la importancia de la búsqueda de un modelo adecuado para el ciclo, tarea que recién comienza.

Bibliografía

Adrianov, A. V. 1996. *Teorem The approximation by superposition of simoidae function*. Moscú. Mathematical Notes trans. Mathemacheskie Zametkie Rusian Academy of Sciences, (59) 6.

Bertotti G., *Hysteresis on Magnetism*. Academic Press, San Diego (1998).

Chizazumi, S. 1964. *Physics of magnetism*. Wiley and Sons. New York.

Della Torre, E. J. Oti, G. Kadar. *Preisach model and reversible magnetization*. IEEE Trans. on magnetics, 26 no.6, pp. 3052-3058, noviembre 1990.

Jiles D.C. y D.L. Atherton, *Theory of ferromagnetic hysteresis*, Journal of Magnetism and Magnetic Materials: 61, 48-60 (1986)

Karcz A. (1972). *Electrometría de materiales magnéticos*. Barcelona. Ed. Marcombo,

Llewellyn D.T. Yhudd RC. 1998. *Steels: Metallurgy & applications*, Butterworth-Heinemann, Oxford.

Mayergoyz, I.D. 1991. *Mathematical models of hysteresis*. Springer-Verlag. New York.

Núñez, F. (1972). *Laboratorio de electricidad y magnetismo*. Ed. Urmo

Olmo, M. & Nave, R. (2008). *Histéresis*. Recuperado de <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/Solids/hyst.html#c1>

Preisach F., Über die Magnetische Nachwirkung, *Zeitung für Physik*: 94, 277-302 (1935)

Reitz J.R. (1996). *Fundamentos de la Teoría electromagnética*. Ed. Adisson –Wessley,

Shervátov, V. G. (1984). *Funciones Hiperbólicas* (2º Edición). Moscú. Ed. Mir.

Tom M. Mitchell, 1997. *Machine Learning*, WCB-McGraw-Hill.

Anexo I

Parámetros fijos. La opción de función sigmoidea considerada presenta cuatro parámetros fijos. A continuación vamos a caracterizarlos, fijando tres y variando uno.

Parámetro (d): Éste valor determina el punto de inflexión de la curva. La figura 1 se presenta la función sigmoidea con la variación de este parámetro previa fijación de los demás. Asimismo se especifican sus valores en la tabla 1,

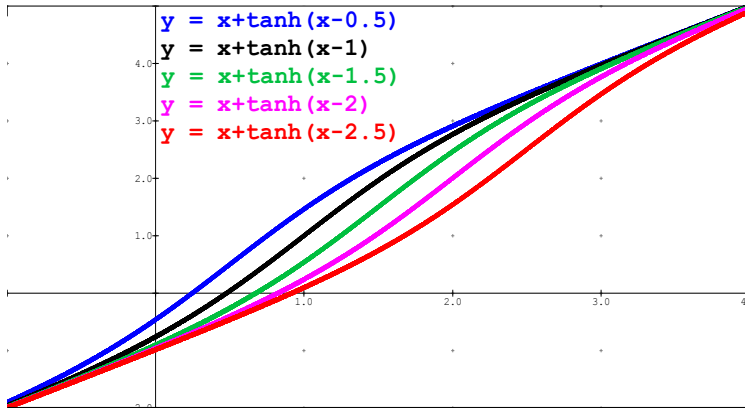


Figura 1. Die casos que muestran la variación del parámetro d.

| Parámetros fijos | | | |
|------------------|---|---|-----|
| a | b | c | d |
| 1 | 1 | 1 | 0.5 |
| 1 | 1 | 1 | 1.0 |
| 1 | 1 | 1 | 1.5 |
| 1 | 1 | 1 | 2.0 |
| 1 | 1 | 1 | 2.5 |

Tabla 1. Variación del parámetro d.

| | | | |
|---|---|---|-----|
| 1 | 1 | 1 | 2.5 |
|---|---|---|-----|

Parámetro (c): Este parámetro controla la razón de cambio en el eje de las abscisas. La Figura 2 presenta la variación de este parámetro previa fijación de los demás. Asimismo se especifican los valores en la tabla 2,

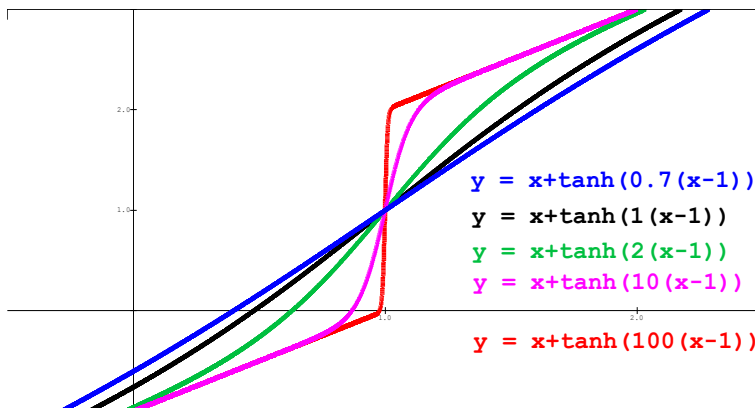


Figura 3. Cinco casos que muestran la variación del parámetro c.

| Parámetros fijos | | | |
|------------------|---|--------|---|
| a | b | c | d |
| 1 | 1 | 0.70 | 1 |
| 1 | 1 | 1.00 | 1 |
| 1 | 1 | 2.00 | 1 |
| 1 | 1 | 10.00 | 1 |
| 1 | 1 | 100.00 | 1 |

Tabla 2. Variación del parámetro c.

Parámetro (b): Este parámetro controla la razón de cambio en el eje de las ordenadas. La figura 3 presenta la variación de este parámetro previa fijación de los demás. Asimismo se especifican los valores en la tabla 3,

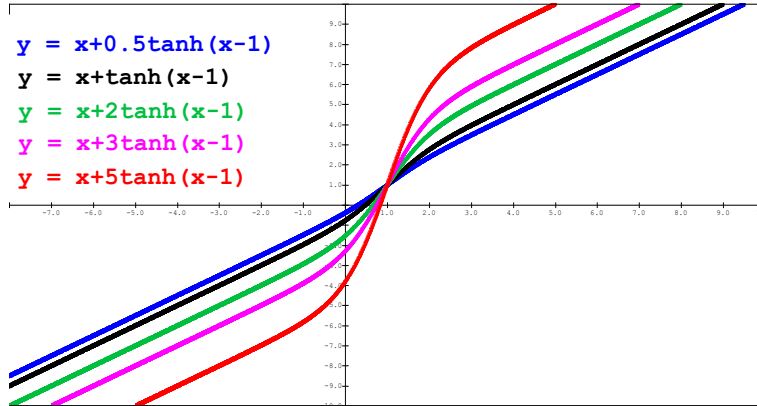


Figura 3. Cinco casos que muestran la variación del parámetro *b*.

| Parámetros fijos | | | |
|------------------|-----|---|---|
| a | b | c | d |
| 1 | 0.5 | 1 | 1 |
| 1 | 1.0 | 1 | 1 |
| 1 | 2.0 | 1 | 1 |
| 1 | 3.0 | 1 | 1 |
| 1 | 5.0 | 1 | 1 |

Tabla 3. Variación del parámetro *b*.

Parámetro (a): Este parámetro controla linealmente las asíntotas. A continuación en la figura 4 se presenta la variación de este parámetro previa fijación de los demás. Asimismo se especifican los valores en la tabla 4,

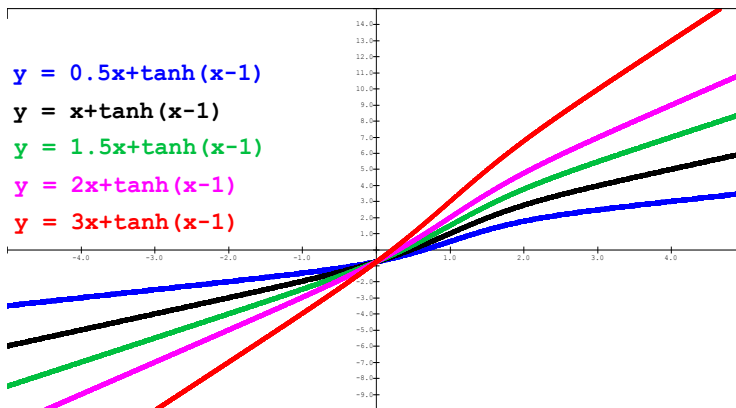


Figura 4. Cinco casos que muestran la variación del parámetro *a*.

| Parámetros fijos | | | |
|------------------|---|---|---|
| a | b | c | d |
| 0.50 | 1 | 1 | 1 |
| 1.00 | 1 | 1 | 1 |
| 1.50 | 1 | 1 | 1 |
| 2.00 | 1 | 1 | 1 |
| 3.00 | 1 | 1 | 1 |

Tabla 4. Variación del parámetro *a*.

Anexo II.

En este apartado demostraremos como obtener una fórmula para calcular el campo coercitivo cuando aparecen en el ciclo de histéresis asíntotas oblicuas, es decir cuando $H_c \neq d$. Dada la trascendencia de la función sigmoide usaremos, para nuestro objetivo, una aproximación lineal con un polinomio de Taylor de primer orden para obtener una estimación aceptable del H_c ,

$$B(H_c) = 0 = aH_c + b \tanh(c(H_c - d)) \quad (1)$$

Transcribiendo la tangente hiperbólica en forma exponencial se obtiene,

$$\tanh(x) = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$$

Así resulta,

$$b \tanh(c(H_c - d)) = b \left(1 - \frac{2}{e^{2c(H_c - d)} + 1} \right)$$

Luego la ecuación (1) se puede expresar en forma exponencial como,

$$-aH_c = b \left(1 - \frac{2}{e^{2c(H_c - d)} + 1} \right)$$

Operando algebraicamente,

$$\left(e^{2c(H_c - d)} + 1 \right) \left(\frac{a}{c} H_c + 1 \right) = 2$$

$$(1 + 2c(H_c - d) + 1) \left(\frac{a}{c} H_c + 1 \right) = 2$$

$$\frac{2ac}{b} H_c^2 + \left(\frac{2a + 2cb - 2acd}{b} \right) H_c - 2cd = 0$$

Finalmente aplicando la resolvente se consigue,

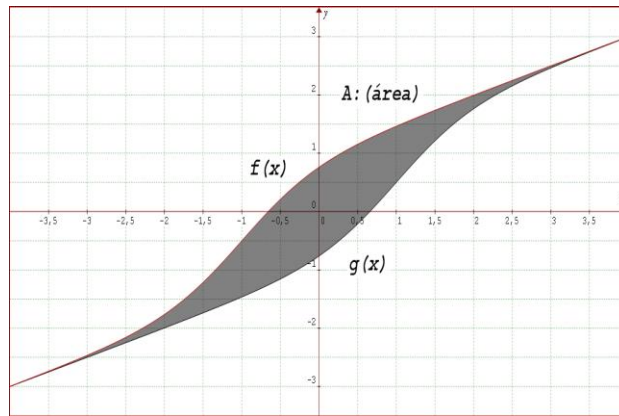
$$H_c = \frac{-\left(\frac{2a + 2bc - 2acd}{b} \right) \pm \sqrt{\left[2 \left(\frac{a + cb - acd}{b} \right) \right]^2 - 4 \left(\frac{2ac}{b} \right) (-2cd)}}{\frac{4ac}{b}}$$

$$H_c = -\frac{1}{2} \left(\frac{a + bc - acd}{ac} \right) \pm \frac{1}{2} \frac{b}{ac} \sqrt{\left(\frac{a + cb - acd}{b} \right)^2 + 4 \left(\frac{2ac^2 d}{b} \right)}$$

Esta última fórmula permite obtener el campo coercitivo cuando aparecen asíntotas oblicuas en el ciclo de histéresis con el margen de error que arroja la aproximación lineal que se utilizó. Margen que hemos estimado en forma numérica con el programa Excel.

Anexo III.

Demostración del cálculo del área encerrada por el ciclo.



$$A = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \int_{-\gamma}^{\gamma} f(x) - g(x) dx$$

$$A = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \int_{-\gamma}^{\gamma} ax + b \tanh(c(x + d)) - ax - b \tanh(c(x - d)) dx$$

$$A = b \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \int_{-\gamma}^{\gamma} \tanh(c(x + d)) - \tanh(c(x - d)) dx$$

$$A = b \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left[\frac{\cosh(c(d + x))}{\cosh(c(d - x))} \right]}{c} \Bigg|_{-\gamma}^{\gamma}$$

$$A = \frac{b}{c} \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \ln \left[\frac{\cosh^2(c(d + \gamma))}{\cosh^2(c(d - \gamma))} \right]$$

$$A = 2 \frac{b}{c} \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \ln \left[\frac{\cosh(c(d + \gamma))}{\cosh(c(d - \gamma))} \right]$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \left[\frac{\cosh(c(d + \gamma))}{\cosh(c(d - \gamma))} \right] = \frac{e^{c(d+\gamma)} + e^{-c(d+\gamma)}}{2} \frac{2}{e^{c(d-\gamma)} + e^{-c(d-\gamma)}} = \frac{e^{c\gamma} (e^{cd} + e^{-cd} e^{-2c\gamma})}{e^{c\gamma} (e^{cd} e^{-2c\gamma} + e^{-cd})} \xrightarrow{\gamma \rightarrow +\infty} \frac{e^{cd}}{e^{-cd}} = e^{2cd}$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \ln \left[\frac{\cosh(c(d + \gamma))}{\cosh(c(d - \gamma))} \right] = \ln e^{2cd} = 2cd$$

$$A = 2 \frac{b}{c} 2cd$$

$$A = 4db$$