

EXPERIENCIA PARA REFLEXIONAR LA PRÁCTICA DOCENTE SOBRE LA ENSEÑANZA DE LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS

Rodríguez, María Rosa⁽¹⁾ - Franco, Sandra Noemí⁽¹⁾
mrrodriguez@face.unt.edu.ar – sandranfranco@hotmail.com

⁽¹⁾Facultad de Ciencias Económicas – Universidad Nacional de Tucumán – Argentina

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.

Modalidad: CB

Nivel educativo: Formación y actualización docente

Palabras clave: Docentes, Autoevaluación, Reflexión, Enseñanza

Resumen

Se sabe que uno de los pilares en la formación académica de los estudiantes es la Geometría, que consta de tres procesos cognitivos: visualización, construcción y razonamiento, donde se desarrollan las capacidades de pensamiento abstracto y formal para generalizar, elaborar hipótesis y operar con símbolos.

En esta ponencia se muestra el desarrollo de una experiencia didáctica destinada a docentes del nivel medio sobre el tema “Cuerpos Geométricos”, donde se indagan sus elementos, propiedades y clasificación con el propósito de recapacitar respecto al aprendizaje de sus alumnos. Los temas fueron abordados con metodología activa, apoyada en la resolución de problemas y se propuso a los docentes la resolución y discusión de una actividad práctica que culmina en una autoevaluación. A partir de sus respuestas, los docentes pudieron identificar sus fortalezas y debilidades permitiéndoles reflexionar sobre los cambios necesarios y pertinentes para optimizar la enseñanza.

Esta estrategia pedagógica tuvo como finalidad la reflexión de los docentes referida a la enseñanza del tema, a fin de lograr un análisis introspectivo del proceso educativo.

La experiencia fue un aporte para los docentes con el fin de que sus alumnos generen actitudes de investigación y trabajo grupal, estimulando continuamente el pensamiento creativo.

1.- Introducción

Es destacable la importancia de la Geometría en la formación académica de los estudiantes de carreras científicas porque fomenta la creación del razonamiento lógico, desarrolla las capacidades de pensamiento abstracto y formal para generalizar, elaborar hipótesis y operar con símbolos. También, se argumentan y demuestran propiedades y teoremas por medio de la deducción, recurriendo a tres procesos cognitivos: de visualización, de construcción y de razonamiento.

Interesadas en el “saber hacer” de los docentes formadores del nivel secundario se recurrió a una estrategia pedagógica que además de abordar contenidos de Geometría dirige sus acciones hacia

su práctica. La metodología de trabajo es el Taller que se caracteriza por la investigación, el aprendizaje a través del descubrimiento y el trabajo en equipo.

Para la enseñanza de la Geometría, el docente debe:

- a) Tener un nivel de competencia suficiente para llevar a cabo la práctica formal, operativa y discursiva, en el nivel donde imparte.
- b) Poder analizar y valorar la actividad de los alumnos en la identificación de objetos y sus significados, con el fin de mejorar su aprendizaje e incrementar su desempeño.

Este análisis permite al docente prever conflictos de significados y establecer distintas posibilidades de adquisición de los conocimientos implicados. (Godino J., 2009).

En este trabajo se muestra el desarrollo de un Taller destinado a docentes del Nivel Medio de la Provincia de Tucumán, interesados en capacitaciones de temas de Geometría, donde se consideraron las competencias que adquiere el alumno.

La competencia matemática consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral. (Gutiérrez Ocerín L. et al, 2008)

Las competencias en Geometría son las habilidades de visualización, de comunicación y de dibujo, que suelen darse en forma conjunta. Es una disciplina eminentemente sensorial y sus conceptos son reconocidos y comprendidos a través de la visualización. Está muy relacionada con la imaginación espacial porque la visualización puede ser mental. La habilidad de comunicación es la capacidad de interpretar, entender y comunicar información; en forma oral, escrita o gráfica, usando símbolos y vocabulario propios de la Geometría. La de dibujo está relacionada con las reproducciones o construcciones gráficas de los objetos geométricos. (Gaona Vargas, G., 2012)

Para favorecer el aprendizaje de la Geometría, el docente propone el uso de diversas representaciones, visualizaciones, diagramas y materiales manipulativos, con la presunción de que ellas constituyen modelos de los conceptos geométricos y de las estructuras en las cuales se organizan. El uso de representaciones es necesario no solo para comunicar las ideas geométricas, sino también para su propia construcción.

En el taller se trató el tema “Cuerpos Geométricos” con el propósito de que sus alumnos reconozcan los elementos, las propiedades y la clasificación. Utilicen correctamente las fórmulas

en los problemas propuestos, descubran relaciones y propiedades de los cuerpos a partir de su desarrollo plano, calculen correctamente área lateral, total y volumen y adquieran destreza en el planteo y resolución de situaciones problemáticas.

Los objetivos generales que se persiguieron en esta propuesta fue que los docentes participantes logren que sus alumnos adquieran conceptos para explicar un procedimiento y destreza en los distintos caminos de solución; desarrollen habilidades de medir, trazar, imaginar relaciones geométricas planas y espaciales y generen actitudes de investigación y trabajo grupal.

Como reflexión sobre la enseñanza de la Geometría se propuso a los docentes la resolución y discusión de un trabajo práctico que cubrió todos los conceptos adquiridos y la realización de una *autoevaluación* relacionada con la planificación de la actividad docente y la propia práctica docente en el aula. Con respecto al estudiante, se sugirió al docente que le permita reflexionar a través de un *autointerrogatorio* durante la resolución de un problema, reconociendo sus debilidades y fortalezas en la solución.

Pensamos que ambas tareas cooperan en el crecimiento y el análisis introspectivo del proceso educativo favoreciendo el desempeño de sus alumnos.

2.- Desarrollo de la Experiencia

Consistió en el desarrollo de un Taller destinado a 60 docentes del nivel medio de la provincia de Tucumán, interesados en el tema “Cuerpos Geométricos”. Los contenidos didáctico – geométricos implicados fueron la conceptualización y el uso de diagramas y recursos manipulativos, que impliquen procesos de visualización y de razonamiento.

Para optimizar del desarrollo de esta modalidad se propuso la siguiente Estrategia:

- 1) Reconocimiento de los diferentes cuerpos geométricos y sus elementos.
- 2) Planteo y discusión sobre la clasificación de los cuerpos según sus características.
- 3) Constitución de equipos de trabajo para la discusión y exposición sobre el planteo y resolución de problemas, distinguiendo los lenguajes visual, gráfico y analítico.
- 4) Presentaciones grupales y discusiones sobre el desarrollo de sus prácticas en el aula.
- 5) Reflexiones sobre las prácticas docentes a través de una autoevaluación individual.
- 6) Respuestas del alumno a preguntas en planteo, solución y verificación de problemas.

2. 1.- Definiciones Elementales

Se denominan *cuerpos geométricos* a aquellos entes reales o ideales, que existen en la realidad o pueden concebirse mentalmente, que ocupen un volumen en el espacio. Requieren tres dimensiones alto, ancho y largo y lo componen figuras geométricas.

Se recordaron las definiciones de caras, aristas y vértices del cuerpo. También, se reconocieron los cuerpos convexos y cóncavos.

2. 2.- Clasificaciones de los cuerpos geométricos

1.- Los cuerpos geométricos se clasifican principalmente en dos tipos dependiendo de que sus caras sean planas o superficies curvas: *Poliedros* y *Redondos o No Poliedros*.

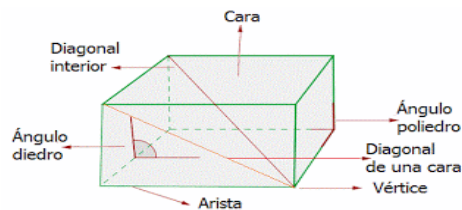


Fig. 1 Elementos principales de un poliedro

2.- Se recordó que un poliedro es *convexo* si se puede apoyar en todas sus caras; en caso contrario es *cóncavo*.

3.- Poliedro *regular* es aquel cuyas caras conforman polígonos regulares iguales, y todos sus ángulos diedros y poliedros también iguales. Estas condiciones se cumplen en el poliedro convexo, porque en los cóncavos los ángulos diedros no son todos iguales.

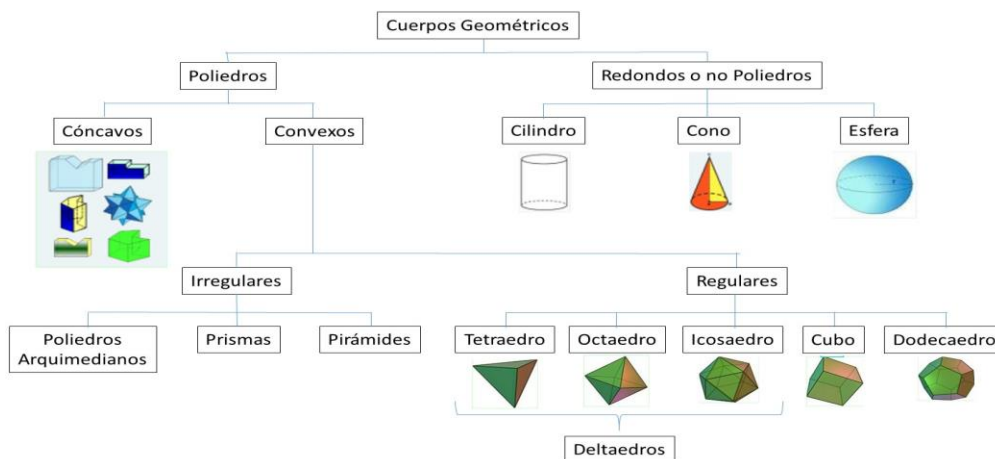


Fig. 2 Clasificación de los cuerpos geométricos

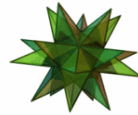
Existen nueve poliedros regulares, que se dividen en dos grupos: cinco son convexos y corresponden a los sólidos perfectos o platónicos (tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo y

dodecaedro) los cuatro restantes son cóncavos (pequeño dodecaedro estrellado, el gran dodecaedro estrellado, el gran dodecaedro y el gran icosaedro).

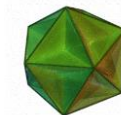
Los poliedros regulares convexos son los únicos poliedros puramente regulares.



Pequeño dodecaedro estrellado



Gran dodecaedro estrellado



Gran dodecaedro

Fig. 3 Poliedros Cóncavos Regulares.

Un poliedro es *Irregular* si tiene caras o ángulos desiguales. Entre ellos, prismas, pirámides y arquimedianos. Los *prismas* y las *pirámides* pueden ser rectos u oblicuos. Si la altura pasa por el centro de la base, es recto y en caso contrario oblicuo.

Los poliedros *Arquimedianos* son convexos, cuyas caras son polígonos regulares (no necesariamente el mismo polígono) y sus vértices uniformes (en todos los vértices del poliedro convergen el mismo número de caras y en el mismo orden). Fueron ampliamente estudiados por Arquímedes y sólo hay 13 poliedros arquimedianos: el Tetraedro truncado, el Cuboctaedro, el Cubo truncado, el Octaedro truncado, el Rombicuboctaedro, el Cuboctaedro truncado, el Cubo romo, el Icosidodecaedro, el Dodecaedro truncado, el Icosaedro truncado, el Rombicosidodecaedro, el Dodecaedro rombo y el Icosidodecaedro truncado. De los cuales once se obtienen truncando los poliedros regulares o platónicos.



Tetraedro truncado



Cubo truncado



Cuboctaedro

Fig. 4 Algunos de los trece Poliedros Arquimedianos.

El *Deltaedro* es un poliedro cuyas caras son triángulos equiláteros iguales. El nombre tiene su origen en la letra delta. Existen 12 Deltaedros regulares, tres convexos y nueve cóncavos. Los convexos son los sólidos platónicos: tetraedro, octaedro e icosaedro.

Dos poliedros son *Duales* si el número de vértices del primero coincide con el número de caras del segundo y viceversa. Ambos deben tener el mismo número de aristas. Se construye uno a partir del otro uniendo con segmentos los centros de dos caras contiguas del primero. Una propiedad de los sólidos platónicos es que están relacionados entre sí por la dualidad. Por ejemplo, el dual del tetraedro es el propio tetraedro, el dual del cubo es el octaedro y el dual del icosaedro, el dodecaedro



Fig. 5 Poliedros Duales.

3.- Propiedades de los Poliedros

3. 1.- Fórmula de Euler Descubierta en 1752 por el matemático suizo Leonhard Euler $V + C - A = 2$ donde V : N° de vértices C : N° de caras y A : N° de aristas

Este resultado es útil para optimizar la capacidad visual y los procesos aritméticos en los estudiantes usando la estrategia didáctica de la construcción y posterior corte de un poliedro para que el estudiante verifique con algunos ejemplos la validez de la fórmula.

3. 2.- Prismas rectangulares El volumen de un prisma rectangular es la raíz cuadrada del producto de las áreas de las tres caras distintas. $A_1 = a b$, $A_2 = a h$ y $A_3 = b h$

Donde a : largo de la base b : ancho de la base y h : altura del prisma

$$A_1 A_2 A_3 = a b a h b h = a^2 b^2 h^2 = V^2 \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{A_1 A_2 A_3}$$

4.- Justificaciones Empíricas

4. 1.-Área de la Esfera El área total de los cuerpos se obtiene realizando sus desarrollos planos, pero en la esfera surge que no puede desarrollarse sobre un plano.

Arquímedes demostró que el área de una esfera es igual al área lateral de un cilindro que tenga el mismo radio y cuya altura sea el diámetro de la esfera.

Se considera una esfera envuelta por un cilindro que se ajusta por completo a ella, un cilindro de radio r y altura $2r$. Entonces el área de la esfera es igual al área lateral del cilindro: $A_{\text{Esfera}} = A_{\text{Lat. Cilindro}} = 4\pi r^2$

4. 2.- Relaciones entre los Volúmenes de algunos Cuerpos

1) Si se llena una pirámide con arena y se vierte todo el contenido en un prisma de bases y alturas congruentes, es necesario llenar otras dos pirámides para completar el volumen del prisma.

$$\text{Vol. Pirámide} = 1/3 \text{ Vol. Prisma}$$

2) Se considera un cono y un cilindro con bases y alturas congruentes. Se necesitan tres conos para llenar el cilindro.

$$\text{Vol. Cono} = 1/3 \text{ Vol. Cilindro}$$

3) Se considera un cilindro y un cono de radio r y altura $2r$ cada uno y una esfera de radio r . Se llena el cilindro con el agua de la esfera y el cono.

$$\text{Vol. Cono} = 1/3 \text{ Vol. Cilindro} \quad \text{y} \quad \text{Vol. Esfera} = 2/3 \text{ Vol. Cilindro} = 4/3 \pi r^3$$

5.- Discusión de resultados

Como se sabe, las competencias enfatizan el saber hacer, el saber convivir, el saber ser y el saber conocer; integran la teoría con la práctica; relacionan los conocimientos, habilidades y actitudes y promueven la autorrealización humana.

La metodología de enseñanza basada en competencias supone:

1° Que el profesor modifique su papel en el proceso enseñanza-aprendizaje y se concentre en las tareas de organización, seguimiento y evaluación del aprendizaje.

2° Que a los estudiantes se les exija dedicación constante y sistemática al aprendizaje y que reflexionen en la planificación y aplicación de los conocimientos adquiridos.

En el Taller se desarrolló un trabajo práctico a través de exposiciones grupales que condujeron a valiosas discusiones, logrando monitorear (supervisar, analizar, revisar, modificar) y controlar (dirigir) sus prácticas docentes. También, se propuso a los docentes una *autoevaluación individual* que permitió reflexionar sobre sus habilidades.

La autoevaluación del docente estuvo orientada a reconsiderar los siguientes ítems:

A. Definiciones de las habilidades de visualización, de comunicación y de dibujo.

B. Las principales dificultades técnicas que presentan los estudiantes para abordar un problema geométrico.

C. Los conceptos geométricos que sus alumnos no comprenden con facilidad.

D. ¿Se detectan y se registran las dificultades que presenta el alumnado en relación con aprendizajes básicos no adquiridos?

E. ¿Cómo distingue que un alumno ha adquirido habilidades y las emplea con fluidez?

F. ¿Se planifican explícitamente y llevan a cabo actividades en el aula en las que se desarrollan las competencias básicas?

G. ¿La corrección de las actividades que se realizan contribuyen al conocimiento y reflexión del alumno sobre su propio aprendizaje?

Para un aprendizaje significativo, no basta la aplicación reiterada de un procedimiento para resolver un problema, sino la reflexión de los recursos aplicados en su resolución. Para ello, el docente propone al alumno un *autointerrogatorio* donde se formule las siguientes preguntas para la realización de una tarea, tales como:

a) Al inicio: ¿Qué conozco acerca del problema propuesto? ¿Cuáles conceptos aplico para resolverlo? ¿Cómo puedo aplicarlo?;

b) Durante la resolución: ¿Qué, para qué y cómo lo estoy resolviendo? ¿Hacia dónde me conduce este procedimiento?;

c) Al final: ¿Hay coherencia entre las respuestas y las preguntas? ¿Hay otro camino para resolverlo? ¿Es general el método que apliqué? ¿Es posible el resultado encontrado? ¿Cumple las condiciones iniciales del problema?.

Este autointerrogatorio incrementa la destreza del alumno en resolución de problemas, reconociendo sus debilidades y fortalezas.

Estos recursos didácticos, extensibles a otros aprendizajes, favorecen la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría.

Conclusiones

Consideramos que el profesor de Geometría debe tener conocimiento, comprensión y competencia para discriminar los distintos tipos de objetos, sistemas de representación y sus relaciones sinérgicas en la práctica para, a posteriori, diseñar y gestionar los procesos de particularización y de generalización.

La autoevaluación de la práctica docente parte de una actitud favorable a un cambio y centra la mejora del proceso en el aula. Esto abarca los procesos de planificación y evaluación de los resultados porque ambos son partes inseparables de la práctica docente. Pensamos que las respuestas obtenidas permiten identificar las fortalezas y las debilidades en la enseñanza de la Geometría, realizando los cambios necesarios y pertinentes para optimizar el proceso. Esta estrategia tiene un sentido instrumental y se convierte en un factor decisivo para el cambio y la innovación, favoreciendo los procesos de reflexión personal y colectiva; siempre que su desarrollo sea continuo.

La resolución de problemas se complementa con el análisis epistémico – cognitivo provocada por las consignas: ¿Qué geometría se necesita en la resolución de un problema? ¿Qué conceptos usa el alumno? Las respuestas al interrogatorio propuesto al alumno optimizan su aprendizaje reconociendo que puede existir más de un método de resolución, o que no hay ningún método disponible o que no es aplicable o que resulta inadecuado para el problema propuesto. También, identifica los aspectos positivos y negativos de la estrategia usada, estableciendo condiciones para su aplicabilidad y creando bases para su generalización y transferencia.

Estas técnicas permiten reconocer la complejidad de los objetos y significados puestos en juego en las actividades matemáticas, prever potenciales conflictos, adaptarlas a las capacidades de sus estudiantes y a los objetivos del aprendizaje.

La importancia de la manipulación de los cuerpos geométricos se manifiesta en la combinación de poliedros regulares en diseño industrial, en mallas espaciales, en cúpulas geodésicas y también aparecen en la naturaleza, en la estructura de diversos minerales y en elementos estructurales de seres vivos.

Referencias Bibliográficas

Gaona Vargas, G. (2012). Desarrollo de Competencias en Geometría en *Guía de Unidad de Aprendizaje Disciplinar 3*. Guanajuato, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Godino J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Gutiérrez Ocerín L., Martínez Rosales E. y Nebreda Saiz T. (2008). *Cuadernos de Educación. N°5. Las competencias básicas en las áreas de Matemática*. España: Consejería de Educación Cantabria.

Pimienta Prieto, J. (2012). *Estrategias de Enseñanza-Aprendizaje. Docencia Universitaria Basada en Competencias*. México: Pearson Educación.