

ESTUDIO DE PROCESOS DE PRUEBAS EN ESTUDIANTES DE PROFESORADO DE MATEMÁTICA AL CARACTERIZAR FAMILIAS DE POLIEDROS

María Florencia Cruz, Ana María Mantica, Marcela Götte

Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral. Argentina
ma.florenciacruz@gmail.com, ana.mantica@gmail.com, marcelagotte@gmail.com

Resumen

Este trabajo es parte de una investigación que tiene por objetivo indagar los procesos de validación en estudiantes del profesorado en matemática. Se analiza lo realizado por un binomio de alumnos en una entrevista, grabada en audio y video, en la cual se presentan cuatro familias de poliedros y se solicita que enuncien y justifiquen las características que permiten dicho agrupamiento. Considerando que las pruebas pueden ser pragmáticas o intelectuales, según la clasificación de Balacheff (2000), evidenciamos que para el binomio estudiado a pesar de ser alumnos avanzados y estar habituados a realizar demostraciones, realizan sólo pruebas de tipo pragmáticas.

Introducción

La investigación que presentamos se lleva a cabo con alumnos de tercer año del profesorado de matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral que cursan Taller de Geometría. Los estudiantes han cursado Geometría Euclídea Plana (GEP) y Geometría Euclídea Espacial (GEE). Se realizan entrevistas con el propósito de analizar el proceso elaborado por alumnos en la validación de una tarea presentada con familias de poliedros. El objetivo de la propuesta no es lograr el aprendizaje de una noción matemática determinada, sino crear las condiciones de un debate de prueba cuyo desenlace estará bajo la responsabilidad de los estudiantes.

Los alumnos seleccionados participaron de un trabajo de investigación llevado a cabo en la cátedra GEE que tenía como propósito conocer las características que tienen en cuenta los estudiantes para formar familias de figuras poliédricas y observar el tipo de clasificaciones que realizan. La clasificación que se utilizó para realizar el análisis del trabajo elaborado por los estudiantes del profesorado de matemática es la siguiente:

Clasificaciones particionales: las familias que los forman no tienen poliedros en común. Clasificaciones inclusivas: existe una relación de inclusión entre todas las familias determinadas. Cada familia excepto el universo está incluida en otra.

Clasificaciones solapadas: son las no inclusivas ni particionales.

Las entrevistas se realizan a cuatro estudiantes del grupo estudiado anteriormente, reunidos en binomios, cada uno de ellos constituidos por un alumno que ha acreditado la asignatura GEE y otro que no, pero ha finalizado su cursado, la muestra seleccionada es intencional.

Se selecciona teniendo en cuenta que las interacciones entre alumnos en igualdad de condiciones en relación con su conocimiento permite la exteriorización de las concepciones, de los proyectos y de la toma de decisiones (Balacheff 2000). Se implementan entrevistas no estructuradas, en las cuales las preguntas no están previamente determinadas y se realizan en forma personal, promoviendo una interacción directa entre estudiantes y entrevistador. Registramos la información obtenida a través de grabaciones en audio y video, de modo que los audios e imágenes constituyan un insumo de análisis y permitan estimar la fiabilidad del estudio (Cohen y Manion, 1990).

Marco teórico

En este estudio se tienen en cuenta las interacciones de binomios de alumnos al fundamentar sus conjeturas. Balacheff (2000) considera que la característica principal de esta situación es que los estudiantes tienen como tarea resolver juntos un problema. Plantea que utilizar situaciones de interacción social tiene como propósito que los alumnos compartan el significado del problema, y no que solamente se apropien del mismo; una situación de interacción y de comunicación permite un acceso eficaz a las concepciones de los estudiantes y los procedimientos que ellos utilizan.

Balacheff (2000) realiza clasificaciones referidas a tipos de pruebas con estudiantes de 4° y 5° grado reunidos en binomios que utilizaremos para este análisis. Previo a la clasificación el investigador precisa los términos explicación, prueba, demostración y razonamiento.

Considera que explicación no es necesariamente una cadena deductiva, se asienta en los conocimientos del locutor y en su racionalidad para establecer y garantizar la validez de una proposición, es decir, en sus propias reglas de decisión de la verdad. La prueba es una explicación reconocida y aceptada por una comunidad, se hace referencia a un proceso social ya que el discurso que asegura la validez de la proposición deja de ser solo posición del individuo que lo afirma; la posición no es definitiva puede evolucionar con el avance de los saberes en los que se sostiene, una prueba puede ser aceptada por una comunidad y rechazada por otra. La demostración es un tipo de prueba preponderante en matemáticas, constituida por una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto determinado de reglas definidas en el seno de la comunidad matemática; los procesos sociales en el seno de esta comunidad juegan un importante papel, la comunidad matemática se caracteriza por la elección de los axiomas lógicos con los que trabaja. El razonamiento es una actividad intelectual que tiene por objetivo producir una nueva información a partir de la dada o adquirida, esta actividad no es completamente explícita; se considera proceso de validación cuando tenga como fin asegurar la validez de una proposición. (Balacheff, 2000).

El autor sostiene que proponer problemas y copilar las condiciones que se consideran más favorables no es suficiente para que los alumnos lleven a cabo procesos de validación y que ellos dispongan como herramienta de prueba a la demostración no es suficiente para garantizar que la utilicen. También afirma que una situación que reúna las características de

situación social no es condición necesaria, ni suficiente para asegurar la producción de pruebas.

Las pruebas que producen los estudiantes son diversas, Balacheff (2000) presenta dos tipos de pruebas. Las pruebas pragmáticas, son prácticas, recurren a la acción real o a la ostensión. Las pruebas intelectuales, son teóricas, la justificación de la actividad se apoya en la formulación de propiedades.

Balacheff (2000) distingue dos tipos de pruebas pragmáticas: empiricismo ingenuo, en el cual se verifica una proposición para cierto número de casos y se establece la conjetura; experiencia crucial, por un lado se utiliza este término cuando el estudiante verifica una proposición para un caso que considera tan poco particular como le es posible, el alumno reconoce explícitamente el problema de la generalización, por otro lado se utiliza cuando se realiza una experiencia que permite optar entre dos hipótesis, siendo sólo una verdadera.

Un caso especial es el tipo de prueba que nombra ejemplo genérico, que puede considerarse en la categoría de las pruebas pragmáticas cuando el alumno hace explícitas las razones de verdad de una conjetura mediante operaciones o transformaciones de un ejemplo particular que considera representante de su clase y puede considerarse en la categoría de las pruebas intelectuales cuando el estudiante utiliza un ejemplo como un medio para lograr expresar su prueba.

El autor diferencia dos tipos de pruebas intelectuales: experiencia mental, en la que se interioriza la acción y se separa de un ejemplo particular, aparece como un medio para fundamentar la solución planteada; cálculo sobre enunciados, aparecen cuando el estudiante realiza un cálculo inferencial sobre enunciados, estas prueban no pueden reconocerse verdaderamente como demostraciones.

Diseño de tareas y estudio de respuestas

En la implementación de las entrevistas se presentan a los estudiantes cuatro familias de poliedros, el universo son diez poliedros. Para el desarrollo de la propuesta se construyen modelos de dichos poliedros en materiales manipulativos, ocho construidos con Polydrom, y dos construidos en cartulina dado que el material utilizado no permite realizar estos poliedros que nos interesa que formen parte del universo objeto de clasificación (pirámide y prisma oblicuos).

Las familias a presentar se muestran en las siguientes imágenes:

El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación

Familia 1



Familia 2













Familia 3



Familia 4



A continuación presentamos los modelos de poliedros que se entregan a los estudiantes para resolver la tarea dada.

1. Cubo 	2. Tetraedro regular o pirámide 	3. Octaedro o antiprisma 	4- Antiprisma 	6- Pirámide oblicua, base pentágono regular 
5- Dodecaedro regular 	8- Octaedro truncado 	9- Tetraedro truncado 	10- Prisma 	7- Prisma oblicuo, base trapezoide 

Realizamos una descripción de los poliedros, que su sola denominación no permite determinar los polígonos que los forman:

Poliedro (3) sus caras son triángulos isósceles iguales.

Poliedro (4) sus bases son pentágonos regulares y sus caras laterales triángulos equiláteros.

Poliedro (6), es una pirámide oblicua, sus caras laterales triángulos no congruentes y su base es un pentágono regular.

Poliedro (7), es un prisma oblicuo, sus caras laterales son paralelogramos y sus bases trapezoides en planos paralelos.

Poliedro (8), sus caras son cuadrados y hexágonos regulares y concurren dos hexágonos y un cuadrado por vértice.

El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación

Poliedro (9), sus caras son hexágonos regulares y triángulos equiláteros y concurren dos hexágonos y un triángulo en cada vértice.

Poliedros (10), prisma con bases triángulos isósceles y caras laterales dos rectángulos congruentes y un cuadrado.

Destacamos que no se entregan los nombres que identifican los poliedros a los estudiantes para no direccionar las posibles familias, se los presenta de este modo para utilizar un lenguaje específico en el presente trabajo. En la implementación de la propuesta se identifican los modelos de poliedros con números.

En un primer momento se les presenta la tarea que se muestra debajo a los estudiantes por escrito sin interrupciones del entrevistador, luego se realizan preguntas esperando la validación de las afirmaciones realizadas por los alumnos. Durante esta instancia los entrevistados cuentan con el material bibliográfico utilizado en las geometrías euclídeas del plan de estudio.

Tarea: Cada uno de los siguientes grupos de poliedros determina una familia, el universo son los poliedros dados, encontrar las características que permiten que dichos poliedros se agrupen así, ¿qué nombre le pondrías a cada familia? Justifica cada decisión que tomes.

Presentamos en este trabajo el análisis de los procedimientos de prueba llevado a cabo por uno de los grupos entrevistados que denominaremos grupo **G-C**, constituidos por los alumnos **G** y **C**. Destacamos que el entrevistador se denota **F** en el presente trabajo.

En momentos particulares los estudiantes realizan una mirada parcializada sobre las figuras que conforman la familia, poniendo su atención especialmente en formas de caras del poliedro, si los polígonos que lo conforman son regulares, si son rectos u oblicuos, en general, en algunos momentos no realizan una mirada global de los poliedros, llamaremos a estos casos como empiricismo ingenuo, a pesar de no responder estrictamente a lo que considera como tal Balacheff (2000). Éste sostiene que “Empiricismo ingenuo aparece como un estado en el cual ellos se encuentran y permanecen debido a razones ligadas a la situación o a sus relaciones con el conocimiento mismo” (55).

Se organiza la exposición considerando el análisis que realizan los estudiantes de cada una de las familias poliedros.

Análisis de la familia 4

Los alumnos ponen atención en los polígonos que conforman a los tres poliedros, en particular a su regularidad, no logran considerar el poliedro de manera global, es decir, examinando todos los elementos del mismo (caras, ángulos poliedros, etc.), por lo cual consideramos este momento del diálogo dentro de la categoría “Empiricismo Ingenuo”. Se presenta a continuación la transcripción del audio de dicho momento.

G: la 4 son semirregulares.

F: vos decís que son semirregulares, ¿a qué te referís con poliedros semirregulares?

G: Porque las caras son regulares pero son distintas. Y algo más pero no se...

Más adelante, en la interacción, utilizan la experiencia crucial. Los estudiantes tienen dos hipótesis, por un lado se plantean que los poliedros 4, 8, 9 son semirregulares y consideran que esta característica puede atribuirse a la familia, por otro, tiene la hipótesis que si hay algún poliedro semirregular en otra familia, esta característica no puede atribuirse a la familia 4. Los alumnos analizan si se presenta algún poliedro semirregular en otra familia, como no encuentran esta característica común en las familias 1, 2 y 3 afirman que la familia cuatro está constituida por poliedros semirregulares. Es decir, la negación de una hipótesis permite la aceptación de otra.

C: no hay ningún otro semirregular? Porque sino no sería la familia semirregular.

G: no hay ninguno

C: entonces sí.

Análisis de la familia 2

Comienzan la discusión sobre la familia dos considerando los poliedros globalmente, analizan caras y ángulos, no miran estas características de forma aislada, sino que la acción para fundamentar la conjetura es tomarlo como un todo, podríamos decir que estamos frente a un ejemplo genérico.

G: estos son regulares.

F: ¿por qué decís que son regulares?

G: porque tienen las caras iguales... y... los ángulos.

Luego se puede afirmar que utilizan el empiricismo ingenuo como una forma resistente de generalización. Por un lado no logran considerar que cualquier pirámide triangular es un tetraedro, consideran que para ser tetraedro debe ser regular, esto tiene que ver con su concepción de poliedro regular; por otro lado no pueden explicar porque lo consideran regular. A continuación se transcribe la interacción de los estudiantes.

G: ¿el 12 es tetraedro o no?

F: ¿a qué llamas tetraedro?

G: a un poliedro regular... esto es un cubo (señala el cubo), y esto es un dodecaedro.

F: ¿pero a que te referís con tetraedro?

G: es un poliedro regular.

Para finalizar el análisis de la familia 2, los estudiantes afirman que los poliedros 1, 5 y 12 son regulares, pero el 3 les genera duda, ¿es regular o no?, para descartar una de estas hipótesis toman los dos tetraedros regulares (2, 12) y los unen por una base, de este modo el alumno **G** puede afirmar que el 3 no es regular. Este poliedro que logran construir, una

El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación

bipirámide, lo utilizan como un ejemplo crucial, ya que les sirve para descartar la hipótesis que la característica común a esos poliedros es que son regulares. Lo anterior se refleja en el diálogo que se transcribe a continuación.

G: (Observa el octaedro, y dice) Este es un coso, no sé como se dice la definición de poliedro regular, es un coso, o no es, es verdad este es!!!... este es un octaedro (con duda), no sería este así (y coloca los dos tetraedros unidos), me falta un pedazo, es ese nada más que... tendrían que ser equiláteros.

C: tendrían que ser equiláteros.

Análisis de la familia 1

Los estudiantes utilizan una prueba del tipo ejemplo genérico, dado que logran determinar las características comunes de los poliedros que componen la familia visualizando características propias de las pirámides en general, sin hacer alusión a casos particulares, sin embargo llaman prismas a las pirámides. Se presenta a continuación la transcripción del audio.

G: la familia 1, son... Pirámides... mmm ¿cómo se llaman? noo, prismas, sí prismas. Este es regular (señalando el tetraedro) o no sé cómo se llamaba y este oblicuo (señalando la pirámide oblicua).

C: este es recto y este no es oblicuo. Recto porque el eje esta perpendicular a la base.

G: prisma de base pentagonal y prisma de base triangular.

Análisis de la familia 3

Los estudiantes comienzan el análisis de la familia tres con un empiricismo ingenuo, dado que plantean que los prismas que conforman la familia son rectos u oblicuos, pero sin hacer referencia a los conceptos que trabajan estas características de los poliedros. Transcribimos lo que expresa el alumno **G**.

G: el (prisma oblicuo 7) es raro, ¿esto está torcido o es así?... digamos que no es derecho.

Los estudiantes no logran salir de este tipo de prueba aunque en la interacción, tratando de buscar una característica de la familia ponen su atención en la forma de los polígonos y el número de caras que tienen los poliedros. Finalizan su análisis determinando como característica de la familia que todos los poliedros que la componen tienen al menos un cuadrilátero como cara. Con esta característica no queda delimitada la familia dado que el poliedro 8, de la familia 4, también cumple esta condición. Transcribimos el audio.

C: vamos a ponerle que sus caras son cuadriláteros pero no pentágonos.

G: que son de 4 o menos, y aquel no porque son 6.

C: ese tiene 6, ese tiene 6 y ese tiene 6. Estos son todos de 6 caras. ¿no ha ninguno que tenga 6 caras a parte de estos?

El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación

G: no este tiene 5 (prisma base triangular). Esta complicado. Pero las caras tienen 4 y 3 lados.

C: pero no! Este cuenta como el mismo? (cubo)

G: este tiene sólo 3. Entonces ya esta, este tienen 4, tiene 4 y tiene 3.

G: si tiene 3 tiene que tener al menos uno de 4.

Reflexiones finales

En el análisis de las entrevistas del binomio que se presenta se manifiesta que sólo realizan pruebas pragmáticas a pesar de ser alumnos avanzados del profesorado de matemática y estar habituados a realizar demostraciones matemáticas.

Los alumnos al considerar la familia 2 comienzan con una prueba de ejemplo genérico este no es examinado “en sí mismo, sino para hacer explícito un modelo de acción que fundamente la conjetura” (Balacheff, 2000, p. 68). Logran considerar globalmente a los poliedros, como poliedros regulares, sin embargo solo tres de los cuatros poliedros que conforman la familia cumplen la característica mencionada. Los estudiantes afirman que el poliedro tres no es poliedro regular utilizando una experiencia crucial, en este caso el tipo de prueba utilizada “es más para rechazar la conjetura, que para establecerla” (Balacheff, 2000, p. 68). Terminan categorizando la familia con un empiricismo ingenuo, realizan una mirada parcial sobre sus caras.

En la familia 4 los alumnos logran avanzar pasando de un tipo de prueba de empiricismo ingenuo a una experiencia crucial mediado por la interacción, “estos intercambios obligan al alumno a descentrar su pensamiento, su propio punto de vista, le abren el ámbito de posibilidades hasta llegar, a veces a perturbar la propia posición” (Quaranta, 2003, p. 198)

En las familia 1 y 3 encontramos en cada una un solo tipo de prueba, es decir que la interacción en este caso no les permitió avanzar ni en la formulación de conjetura, ni en el tipo de pruebas, la discusión realizada entre las estudiantes no posibilita “que se explicita y se argumente sobre lo realizado” (Quaranta, 2003, p. 197)

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Una empresa docente.

Cruz, M.F.; Mantica, A. y Götte, M. (2015). Clasificaciones de poliedros en estudiantes del profesorado de matemática. Análisis de una experiencia. *Actas de las IV Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales*. Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. Universidad Nacional de La Plata.

Recuperado de <http://jornadasceyn.fahce.unlp.edu.ar/convocatoria/actas-2015/trabajos-matematica/Cruz.pdf/view>

Guillén Soler, G. (1991). *El mundo de los poliedros*. Madrid. Síntesis.

Quaranta, M. y Wolman, S. (2003). Discusiones en las clases de matemática: qué, para qué y cómo se discute. En M Panizza, (Comp), *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas*. (pp. 189-243). Buenos Aires: Paidós