¿INCORPORAR LA CONJETURA AL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA?

Mario Dalcín
Instituto de Profesores 'Artigas', Departamento de Matemática del CFE. Uruguay
mdalcin00@gmail.com

Resumen

La comunicación propone una reflexión acerca de la enseñanza y aprendizaje de la geometría euclidiana en nuestros días. La existencia de distintos softwares de Geometría Dinámica desde hace algunas décadas, así como la propuesta teórica de Houdement y Kuzniak (1999), facilitan considerar la inclusión de la conjetura como una actividad posible y deseable a la hora de enseñar, aprender y crear geometría euclidiana.

Introducción

Se atribuye a Benjamín Franklin (1706 + 84 = 1790) la máxima "Man is a tool-making animal", es decir "los seres humanos son animales que fabrican herramientas". Con esta frase se inicia *El paradigma del laberinto* (2012), libro del pensador uruguayo Juan Grompone, de donde tomaremos algunas ideas que compartimos y nos sirven como marco para pensar este trabajo referido al conocimiento geométrico –específicamente a la geometría euclidiana- y a su enseñanza y aprendizaje en todos los niveles educativos -en especial la formación de profesores de matemática de enseñanza media-.

El Universo que se puede conocer a ojo desnudo estaba acabado con la obra de Tycho Brahe (1546-1601) y de Johannes Kepler (1571-1630). Las medidas de Tycho realizadas en su observatorio de *Uraniborg* habían conducido a las cuatro leyes del movimiento planetario de Kepler, nada más se podía hacer a menos de perfeccionar la visión humana. El salto ocurrió con Galieli y su telescopio. Un nuevo instrumento de observación prolongaba la capacidad de explorar el universo y condujo directamente al sistema planetario de Newton. (Grompone, 2012, p. 83)

Parafraseando la cita anterior, sostenemos que el conocimiento en el ámbito de la geometría euclidiana había alcanzado un techo hasta que surgieron los softwares de Geometría Dinámica (GD) a principios de los años 80. ¿Cuáles habían sido las herramientas usadas hasta ese momento? Básicamente lápiz, papel, regla, compás, semicírculo y el conocimiento de lo ya producido en el campo. Poco cambia si en vez de usar el papel los griegos realizaban sus figuras sobre la arena. Con la creación de los softwares de GD se perfecciona la herramienta, ahora en vez de papel las representaciones de las figuras se hacen sobre una pantalla, en vez de regla y semicírculo los softwares tienen incorporados la posibilidad de medir segmentos y ángulos y de manera bastante más precisa de lo que se podía hacer con las viejas herramientas. La GD posibilita además la construcción de figuras que en realidad son una familia de figuras: si en lápiz y papel necesitábamos construir dos situaciones debíamos recurrir a dos representaciones distintas, en GD en una misma construcción tenemos infinitas situaciones en una misma construcción. La nueva herramienta posibilitó un renacimiento de la geometría euclidiana como actividad científica y prueba de ello son el surgimiento en las últimas décadas de revistas dedicadas exclusivamente a la publicación de nuevos resultados en el ámbito de la geometría euclidiana (un ejemplo es Forumgeometricorum, http://forumgeom.fau.edu/), así como de diversos foros internacionales referidos exclusivamente a la geometría euclidiana donde se publican nuevos problemas y distintas respuestas a los mismos.

Pero así como algunos se resistieron a mirar por el telescopio de Galileo y con ello buscaban negar todo lo que se viera a través de él, desde que la GD existe ha habido quienes han sostenido que "pero lo que se hace con GD no es geometría". Podemos conceder que no es la misma geometría que se hacía sin esta nueva herramienta, así como la astronomía a partir del telescopio no fue la misma astronomía que se hacía a simple vista. Al igual que el telescopio requirió una nueva manera de pensar, es decir requirió una nueva herramienta teórica que acompañara a la herramienta tecnológica, la GD necesita una nueva herramienta teórica acorde al avance tecnológico.

¿Cómo concebir la actividad geométrica? Un modelo teórico acorde a nuestros tiempos

Houdement y Kuzniak (1999) proponen tres paradigmas para la geometría. Cada uno refleja una problemática diferente a abordar por la comunidad de matemáticos involucrada:

Geometría I. La geometría natural. La fuente de validación es la realidad, el mundo sensible. Hay una cierta confusión entre el modelo y la realidad. La deducción se hace centralmente mediante la percepción y el uso de instrumentos.

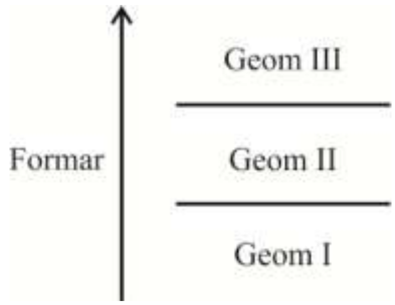
Geometría II. La geometría axiomática natural. La fuente de validación se basa sobre lo hipotético deductivo en un sistema axiomático lo más preciso posible. Pero dicho sistema axiomático se mantiene lo más fiel posible a la realidad.

Geometría III. La geometría axiomática formalista. Se cortan los lazos de la geometría con la realidad. El razonamiento lógico se impone y los axiomas no se basan en lo sensible, en lo real.

Estas tres geometrías nos dan un marco desde el cual dar cuenta de toda la geometría, desde la que trabaja un estudiante al iniciar su formación en la escuela primaria hasta aquella con la que trabaja un matemático.

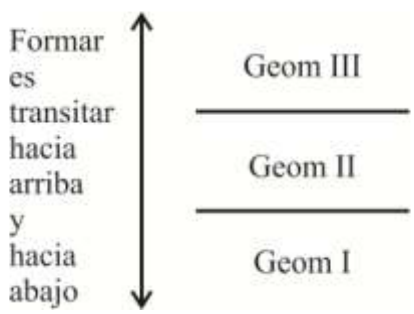
Si pensamos en la enseñanza de la geometría, las Geometrías I, II y III podrían pensarse en un primer momento como niveles a través de los cuales los estudiantes deberían transitar, concebidas como un sistema jerárquico: la Geometría II con un mayor nivel de abstracción que la Geometría I, la Geometría III con un mayor nivel de abstracción que la Geometría II.

Así es como ha sido concebida tradicionalmente la enseñaza de la geometría, como un camino unidireccional, siempre ascendente.



Concepción tradicional de la enseñanza de la Geometría

Sin embargo, no se trata de dirimir cuál de estas geometrías es mejor, no es eso lo que está planteado: los autores postulan tres geometrías posibles, tres enfoques distintos de un mismo hecho, pero donde ninguno niega a los otros. Las prácticas permiten ver en cuál se está trabajando en cada momento, son tres dimensiones distintas: el camino deductivo es uno de esos caminos (Geometría II o III), pero también puede ser el de constatar mediante mediciones (Geometría I), o validar al interior de un sistema axiomático formal (Geometría III). Cada una de estas dimensiones no niega a la otra. Esto permite concebir la formación de un estudiante en el ámbito de la geometría como un tránsito continuo entre estas tres dimensiones.



Concepción de la enseñanza de la Geometría propuesta por Houdement y Kuzniak (1993)

Consideramos que el modelo de Houdement y Kuzniak (1999) es una herramienta teórica que permite (re)pensar el trabajo geométrico –desde el que hace un estudiante hasta el que hace un matemático, (re)pensar el lugar de la GD en la producción del conocimiento geométrico -las producciones realizadas en un ambiente de GD tienen cabida en la Geometría I y (re)pensar la enseñanza y aprendizaje de la geometría de forma de poder contribuir a un desarrollo acorde al tiempo histórico presente tanto de los estudiantes, como de los profesores, así como de la geometría como disciplina.

La pregunta como primer motor

La presencia cada vez más extendida de la GD (GeoGebra es un software libre acceso), así como marcos teóricos como el propuesto por Houdement y Kuzniak (1999) posibilitan que la enseñanza de la geometría euclidiana promueva la indagación como punto de partida de la actividad geométrica.

En libros de geometría euclidiana es frecuente encontrar una propiedad que hace referencia al cuadrilátero determinado por las bisectrices interiores de un cuadrilátero convexo. Basten como ejemplos los enunciados de dicha propiedad que figuran en dos textos latinoamericanos, uno de origen mexicano, otro de origen chileno:

> Si en un cuadrilátero cualquiera ABCD se trazan las bisectrices de los ángulos interiores, entonces los cuatro puntos de intersección de las bisectrices de los ángulos A y C con las bisectrices de los ángulos B y D, son vértices de un cuadrilátero cíclico. (Velasco Sotomayor, 1983, p. 219)
>
> Demostrar que las bisectrices de los ángulos de un cuadrilátero cualquiera forman un cuadrilátero inscriptible. (Masjuan y Arenas, 1997, p. 170)

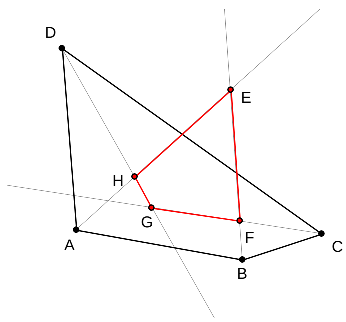
En ambos casos se trata de textos destinados a estudiantes que inician sus estudios universitarios. Es de notar que ambos enunciados explicitan en qué consiste la propiedad y lo que se solicita al estudiante es que elabore una demostración para la misma. De esta manera la demostración cumple centralmente una función de validación (de Villiers, 1993). Considero que enunciar la propiedad de esta manera cercenan la actividad geométrica del estudiante, eliminando la posibilidad de explorar qué tiene de geométricamente relevante la situación planteada, en este caso considerar el cuadrilátero determinado por las bisectrices de un cuadrilátero cualquiera.

La geometría que aparece en los textos por lo general ya está organizada en capítulos y cada capítulo a su vez ya está organizado en axiomas, definiciones, teoremas y tal vez ejercicios al final de cada capítulo donde se puedan aplicar las propiedades vistas para su resolución. En resumidas cuentas, el conocimiento geométrico aparece ya sistematizado y esta sistematización suele ser única para cada texto. Incluso cuando se aborda un ejercicio de final de capítulo, la regla del juego implícita es que dicho ejercicio se podrá resolver con las propiedades enunciadas en el texto hasta ese momento. También es frecuente que las propiedades geométricas que incluyen los textos expliciten las condiciones de partida y también la conclusión (como en los dos primeros ejemplos expuestos antes), eliminando de esa manera la posibilidad de indagar y de vivenciar el placer de identificar invariantes. Los textos aparecen llenos de respuestas a preguntas que nunca fueron formuladas.

Hoy en día disponemos de las herramientas tecnológicas (GD) y teóricas (Geometrías I, II, II de Houdement y Kuzniak) para concebir la enseñanza y aprendizaje de la geometría euclidiana de una nueva manera en la cual consideramos imprescindible la formulación de preguntas que lleven a la formulación de conjeturas y estas a su vez a la elaboración de pruebas. La misma propiedad considerada en el apartado anterior es propuesta en el texto

Geometría Euclidiana en la formación de profesores. Exploración inicial del plano, de la siguiente manera:

Construye un cuadrilátero dinámico ABCD.
Las bisectrices interiores de ABCD determinan -salvo una excepción- un nuevo cuadrilátero EFGH (nómbralo según la figura).
i) ¿Cuál es esa excepción? (Volveremos a considerarla en una próxima actividad)
ii) ¿Qué tienen en común todos los cuadriláteros EFGH?
Sugerencia: mide sus ángulos.
El desafío consiste en que le encuentres una explicación a lo que observas, que elabores una demostración.

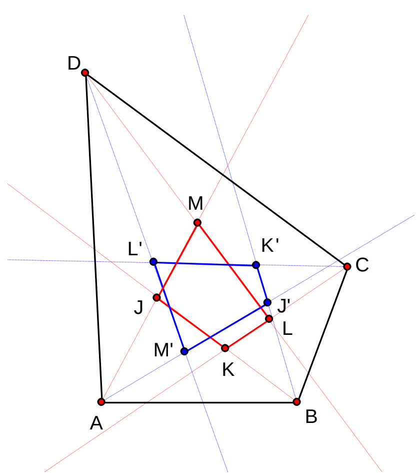


(Dalcín y Molfino, 2013, p. 298)

El conocimiento geométrico se crea explorando lo desconocido

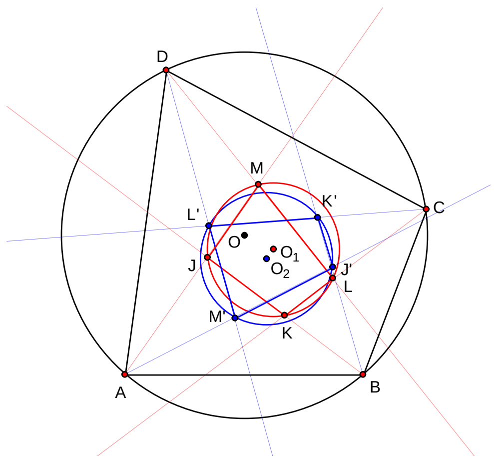
Consideremos un caso de exploración, usando *The Geometer's Sketchpad* como ambiente dinámico, que tuvo su punto de partida, su inspiración, en la propiedad antes mencionada en la cual las bisectrices de un cuadrilátero determinan un cuadrilátero inscritible. Buscando generalizar esta propiedad me pregunté:

¿Son inscritibles los cuadiláteros que se determinan intersecando (según figura) las trisectrices (semirrectas que dividen al ángulo en tres partes iguales) de los ángulos de un cuadrilátero?



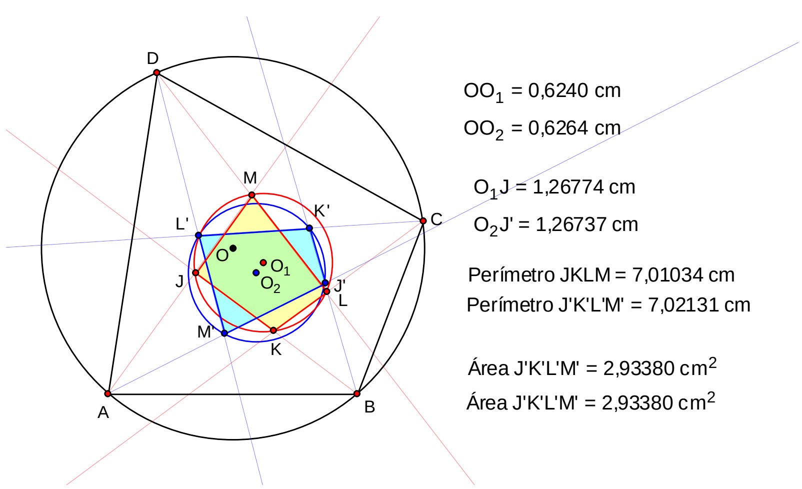
La respuesta empírica fue negativa. Y no busqué una demostración para ello sino que me conformé con la constatación que obtuve mediante el software en el ámbito de la Geometría I de Houdement y Kuzniak. Dada la respuesta negativa a la pregunta anterior reformulé la pregunta agregando una restricción al cuadrilátero ABCD original:

¿Son inscritibles los cuadriláteros que se determinan intersecando las trisectrices de los ángulos de un cuadrilátero inscritible?



La respuesta, en el ámbito de la Geometría I, en este caso fue afirmativa. Al considerar ABCD inscrito en una circunferencia de centro O, resultaron los cuadriláteros JKLM y J’K’L’M’ inscritos en circunferencias de centros O_1 y O_2 respectivamente. Estos cuadriláteros inscritibles y lo observado en pantalla al arrastrar, inspiraron nuevas preguntas:

Las circunferencias circunscritas a los cuadriláteros JKLM y J’K’L’M’, ¿tienen el mismo radio?
¿Son iguales las distancias de O_1 y O_2 a O?
¿Hay alguna relación entre los perímetros de los cuadriláteros JKLM y J’K’L’M’?
¿Hay alguna relación entre las áreas de los cuadriláteros JKLM y J’K’L’M’?



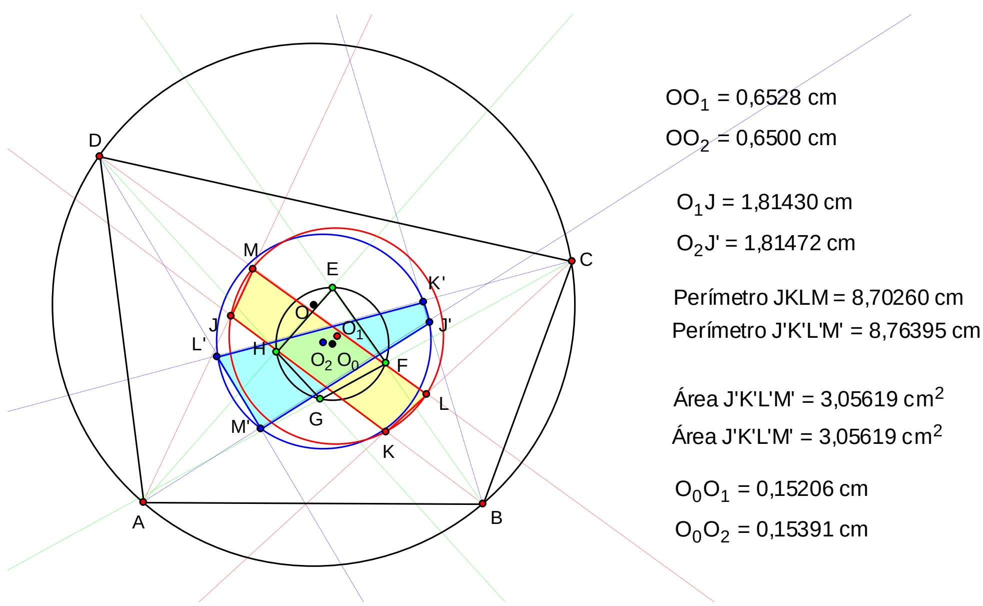
¿Qué conclusión sacar? Difícil decisión. Veamos las mediciones que se obtienen para otro cuadrilátero ABCD.

OO_1 = 0,5396 cm	Perímetro JKLM = 6,94655 cm
OO_2 = 0,5379 cm	Perímetro J'K'L'M' = 6,99798 cm
O_1J = 1,41345 cm	Área J'K'L'M' = 2,13007 cm^2
O_2J' = 1,41371 cm	Área J'K'L'M' = 2,13007 cm^2

Atendiendo a estas dos mediciones (y a todas las que se quieran obtener por medio del software) se puede afirmar que las medidas de OO_1 y OO_2 son iguales hasta la segunda cifra decimal, lo mismo pasa con las medidas de O_1J y O_2J', los perímetros de JKLM y J'K'L'M' son iguales hasta la primera cifra decimal y las áreas son iguales hasta la quinta cifra decimal (esta es la mayor precisión que admite la versión de *Sketchpad* con la que trabajo). Una precisión similar hubiese sido imposible de obtener trabajando con lápiz y papel. El software de GD agrega posibilidades de medición que sin él serían imposibles. Pero el software parecería no permitir responder definitivamente las preguntas planteadas ya que deja cierto margen de incertidumbre: ¿Las diferencias en las medidas se deben a imprecisiones del software o a que son distintas? El trabajo en el ámbito de la Geometría II surge como una necesidad para dirimir situaciones de este tipo.

Me surge una nueva pregunta:

¿Se observará algo geométricamente relevante al considerar el cuadrilátero inscritible EFGH (determinado por las bisectrices del cuadrilátero inscritible ABCD) y el centro O_0 de su circunferencia circunscrita?



Las distancias O_0O_1 y O_0O_2 son iguales hasta la segunda cifra decimal. La certeza y la incertidumbre presentes ante las preguntas anteriores se renuevan frente a esta. Otras formas de enunciar las conjeturas que involucran a los cuatro circuncentros considerados hasta el momento podrían ser: la recta OO_0 es mediatriz del segmento O_1O_2, o también: el cuadrilátero $OO_1O_0O_2$ es una cometa (romboide).
Se podría redoblar la apuesta reformulando las preguntas anteriores sustituyendo trisectrices por p-sectrices (semirrectas que dividen al ángulo en p partes iguales).

El conocimiento geométrico de los textos y el conocimiento geométrico en gestación

Las conjeturas del apartado anterior fueron posibles por dos razones: 1) la formulación de preguntas, 2) la posibilidad de intentar respuestas mediante GD. Estas conjeturas no son resultados geométricos, no son conocimiento geométrico establecido, en la medida que hay incertidumbres que aclarar y demostraciones por elaborar. Estas conjeturas sí son una actividad geométrica genuina de indagación, de elaboración, de creación, de conocimiento geométrico valiosa en sí misma. Frente a una conjetura que no sabemos si ya ha sido formulada previamente y que no sabemos si figura en algún foro de Internet, la situación es bien distinta a la linealidad que suelen presentar los libros de texto de geometría ya que el explorador no sabe de antemano cuáles serán las propiedades a las que tendrá que recurrir a la hora de elaborar una demostración para su conjetura. En una situación como esta el papel de sistematización del conocimiento geométrico que tiene la demostración es patente. Al buscar elaborar una demostración se recurrirá a distintas zonas de la geometría para ver si haciendo uso de algunas propiedades efectivamente se puede construir una demostración. Pero en este proceso no hay una regla no explicitada de recurrir a tales o cuales propiedades, de lo que se dispone frente a una nueva conjetura es de *toda* la geometría. Se pone de relieve así que la geometría que aparece en los textos, textos que se suelen usar como guías de cursos, tiene una organización ya establecida. La geometría en gestación carece de esta organización y la busca, pero la busca después de tener algunas certezas o por lo menos ciertos indicios. Estos indicios los podemos tener haciendo uso de GD, trabajando en el ámbito de la Geometría I. Según Grompone:

La búsqueda del conocimiento exige explorar lo desconocido. No hay caminos ni guías para lo nuevo. El futuro no se puede predecir. La búsqueda de lo nuevo consiste en recorrer un laberinto oscuro. El manejo de la información ahora es laberíntico porque se llegó a una masa crítica, pero la razón de fondo es que también el conocimiento es laberíntico. (p. 81)

De Guzmán (2002, p. 16) sostiene que muchas situaciones de geometría

> … son tratables con éxito, desde su exploración y experimentación hasta la conjetura y ulterior demostración, mediante los programas de los que ya disponemos. […] Pero llegará el momento en que todas estas tareas… se harán más simples y rápidas y resolverán la mayoría de las situaciones en las que algunos hoy a menudo nos atascamos.[…] Por eso me resulta del todo verosímil que en un futuro bastante próximo la experimentación será mucho más fácil de

realizar que ahora, la conjetura y su comprobación o refutación se hará mucho más sencilla y sin esfuerzo, y la demostración automática será directa.

Reflexión final

Hoy en día –y desde hace alrededor de tres décadas- disponemos de herramientas tecnológicas que posibilitan que nos formulemos conjeturas geométricas bastante atinadas en el ámbito de la geometría euclidiana. Esto ha revitalizado la actividad científica en el ámbito de la geometría euclidiana. En el presente es posible que la enseñanza de la geometría, además de comunicar resultados –hecho que se da por lo general en el ámbito de la Geometría II o Geometría III-, incorpore algunos aspectos de la producción del conocimiento geométrico –hecho que puede verse facilitado por el trabajo en un ambiente dinámico y en el ámbito de la Geometría I-. Esto posibilitaría un trabajo de ida y vuelta ora en la Geometría I, ora en la Geometría II o Geometría III. Considero que la actividad de formulación de conjeturas, actividad eminentemente creativa, es deseable y posible de incorporar a la enseñanza y aprendizaje de la geometría euclidiana en todos los niveles educativos y en especial en la formación de profesores. ¿Incorporar la conjetura al aprendizaje de la geometría euclidiana? Sí.

Referencias bibliográficas

Dalcín, M. y Molfino, V. (2013). *Geometría Euclidiana en la formación de profesores. Exploración inicial del plano* (3ª edición). Montevideo: Ediciones Palíndromo.

De Guzmán, M. (2002). *La experiencia de descubrir en geometría*. Madrid: Nivola.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, 26, pp. 15-30.

Grompone, J. (2012). *El paradigma del laberinto*. Montevideo: La flor del Itapebí.

Houdement, C. y Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics*, 40, pp. 283–312.

Masjuan, G. y Arenas, F. (1997). *Ejercicios de geometría elemental*. Chile: Universidad Católica de Chile.

Velasco Sotomayor, G. (1983). *Tratado de geometría*. México: Limusa.