INVARIANTES OPERATORIOS EN LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

Omar Armando Cabrera, Gladys E. Fusco
CENS 453 de Gral. San Martín, Buenos Aires y EEM 2, DE 17, CABA. Argentina
omararmandocabrera@yahoo.com.ar

Resumen

En escuelas medias “de contención social” intentamos -como tantos docentes- enseñar matemática superando poderosos condicionamientos, sin abandonar un objetivo central: que los estudiantes justifiquen *adecuadamente* sus procedimientos. Esa intención nos alejó *naturalmente* de diseños curriculares oficiales e iluminó el camino de la construcción curricular en acto, *con los estudiantes*. El encuentro con Aníbal Cortés y sus investigaciones –asociadas a la Teoría de Campos Conceptuales- posibilitó fundamentar y mejorar nuestra práctica. De allí esta propuesta didáctica para enseñar ecuaciones en primer año, no como paradigma educativo sino como aliento a la profundización y socialización de los currículos de las aulas reales.

Propuesta didáctica

Se exponen tres procedimientos sucesivos para resolver ecuaciones en las que la incógnita aparece una sola vez, considerando como referencial el conjunto de los números naturales (con el cero). Construimos luego una herramienta que llamaremos IPC, a utilizar como modelo para resolver ecuaciones literales y en cualquier referencial numérico. Se trata de una propuesta didáctica para enseñar a resolver ecuaciones en los primeros cursos del nivel medio (13-14 años y adultos), evitando procedimientos rápidamente “mecanizables” y la pérdida de la justificación matemática.

Privilegiamos tres tareas invariantes en la resolución de ecuaciones: *el análisis de la ecuación, la identificación y respeto de la operación prioritaria y el control de la validez de las transformaciones*. Sus respectivos invariantes operatorios asociados son: *el concepto de ecuación, las propiedades operativas más las convenciones de orden de resolución y la conservación del valor de verdad de una igualdad*. Los fundamentos teóricos y las aclaraciones metodológicas se encuentran detallados luego de los siguientes ejemplos:

Primer procedimiento: Sustituciones sucesivas de la incógnita

La consigna es: *resolvamos la siguiente ecuación en N:*

$$\frac{80}{26-3.x}=4$$

¿La solución es x=0? no, pues $80:26 \neq 4$. *¿Es x=1?* no, pues $80:23 \neq 4$. *¿Es x=2?* sí, pues $80:20 = 4$. Entonces **S = {2}** (S: conjunto de todas las soluciones).

Segundo procedimiento: El "desarme mental" de la ecuación graficado con curvas cerradas (desandando el camino)

Si conociéramos el valor de x, *¿en qué orden resolveríamos las operaciones?*
Numeramos:

$$\frac{80}{26-3.x}=4$$

①

Comencemos a "desarmar" la ecuación eliminando la operación③:
¿80 dividido qué número es igual a 4? Respuesta: 20
Graficamos:

$$\frac{80}{26-3.x}=4$$

La operación ③ quedó fuera de la curva que señala el 20

Continuemos "desarmando" la ecuación, eliminando la operación②:
¿26 menos qué número es igual a 20? Respuesta: 6
Graficamos:

$$\frac{80}{26-3.x}=4$$

La operación ② quedó fuera de la curva que señala el 6

Sigamos "desarmando", eliminando por último la operación①:
¿3 por qué número es igual a 6? Respuesta: 2. Es la solución de la ecuación.
Graficamos:

$$\frac{80}{26-3.x}=4$$

6

La operación ① quedó fuera de la curva que encierra la equis

Tercer procedimiento: **El "desarme escrito" de la ecuación**

Numeramos las operaciones, ahora en la ecuación $40-\dfrac{26}{x+6}=38$

Escribimos:

③ ②

$$40-\frac{26}{x+6}=38$$

①

Comencemos a "desarmar" la ecuación eliminando la operación③:
¿40 menos qué número es igual a 38? Respuesta: 2

Continuemos “desarmando” la ecuación, eliminando la operación②:
¿26 dividido qué número es igual a 2? Respuesta: 13
Escribimos:

$$x+6=13$$

Sigamos “desarmando”, eliminando por último la operación①:
¿Qué número más 6 es igual a 13? Respuesta: 7. Es la solución de la ecuación.
Escribimos:

$$x=7$$

Una vez ejercitado este último procedimiento, planteamos resolver ecuaciones literales como la siguiente, para lo cual debe construirse un modelo numérico análogo que llamamos IPC (*invento para comparar*) con números naturales pequeños.

Aplicación: **Resolución de una ecuación literal**

Consigna: ***Despejar X***

$$\frac{C}{A-X}+D=E \qquad\qquad \frac{32}{9-X}+2=10$$

“Invento para comparar” (IPC) una ecuación análoga con naturales pequeños para *desarmarla* como en el tercer procedimiento.

¿Qué número más 2 es 10? Respuesta: 8

$$\frac{C}{A-X}=E-D \quad \xleftarrow{\text{entonces resto}} \quad \frac{32}{9-X}=8$$ (observamos que 8=10 - 2)

Si bien se ha resuelto “mentalmente” una ecuación de solución 8, observando la escritura de ambas ecuaciones diremos que 10 y 2 se han transformado en el 8. Actuando por comparación, corresponde restar E-D en la ecuación literal.

¿32 dividido qué número es 8? Respuesta: 4

$$A-X=\frac{C}{E-D} \quad \xleftarrow{\text{entonces divido}} \quad 9-X=4$$ (vemos que 4=32:8)

¿9 menos qué número es 4? Respuesta: 5

$$X=A-\frac{C}{E-D} \quad \xleftarrow{\text{entonces resto}} \quad X=5$$ (observamos que 5=9 - 4)

Respuesta: $\boxed{X=A-\dfrac{C}{E-D}}$

Aplicación: Ecuaciones simultáneas

El mismo método de resolución aplicado arriba a una ecuación con letras puede usarse en ecuaciones con números de distintos conjuntos referenciales, como en el ejemplo siguiente. Los números indicados en el ángulo inferior derecho de cada celda obedecen al orden secuencial de escritura. Los casilleros con 0 son los que se completan inicialmente, antes de comenzar con las acciones resolutivas, pues contienen las consignas y las ecuaciones a resolver. Se trata, entonces, de solucionar simultáneamente la ecuación literal y las ecuaciones con enteros y racionales de la primera fila, las tres con la misma estructura.

Despejar x 0	Resolver en Z 0	Resolver en Q 0	IPC en N Elijo x=2 1
$A-\frac{H}{x+B}=M$ 0	$-12-\frac{50}{x+18}=-2$ 0	$\frac{4}{5}-\frac{23}{x+6}=\frac{2}{3}$ 0	$8-\frac{18}{x+4}=5$ 2
$\frac{H}{x+B}=A-M$ 4	$\frac{50}{x+18}=-12-(-2)=-10$ 5	$\frac{23}{x+6}=\frac{4}{5}-\frac{2}{3}=\frac{2}{15}$ 6	$\frac{18}{x+4}=3\ (\Rightarrow 8-5)$ 3
$x+B=\frac{H}{A-M}$ 8	$x+18=\frac{50}{-10}=-5$ 9	$x+6=23:\frac{2}{15}=\frac{345}{2}$ 10	$x+4=6\ (\Rightarrow 18:3)$ 7
$x=\frac{H}{A-M}-B$ 12	$x=-5-18=-23$ 13	$x=\frac{345}{2}-6=\frac{333}{2}$ 14	$x=2\ (\Rightarrow 6-4)$ 11

La primera persona del singular representa el accionar del sujeto que resuelve.

1: *Elijo el número natural que solucionará el IPC (“Invento para comparar”), en este caso, x=2.*

2: *Construyo un “invento para comparar”*. Es una ecuación con solución 2, modelo sencillo de las tres ecuaciones a resolver, construida con números naturales pequeños a efectos de facilitar su resolución “mental”.

3: *¿8 menos qué número da 5?* Respuesta: 3. Se resuelve así, “mentalmente”, una primera ecuación, obteniéndose una ecuación reducida. Puede observarse que la escritura de esa reducción obedece al reemplazo de los números 8 y 5 por el 3. Diremos aquí que *los números 8 y 5 se han transformado en el 3*, realizando después una nueva pregunta:

¿mediante qué operación pueden transformarse el 8 y el 5 en el 3? Respuesta: 8–5. Y ahora la inferencia decisiva: si *resté 8–5 deberé realizar las sustracciones correspondientes* (*minuendo menos resta*) *en las tres ecuaciones a resolver*. Destacamos aquí la existencia de una regularidad: siempre existirá la operación que transforme a los dos números suprimidos de la ecuación a resolver en el nuevo número de la reducida.

4, 5 y 6: *Escribo sustraendo es igual a minuendo menos resta y, en las ecuaciones numéricas, resuelvo*.

7: *¿18 dividido qué número da 3?* Respuesta: 6. Se obtiene otra ecuación reducida equivalente, al reemplazar los números 18 y 3 por el 6. Diremos que *los números 18 y 3 se han transformado en el 6* y preguntaremos: *¿mediante qué operación pueden transformarse el 18 y el 3 en el 6?* Respuesta: 18:3. La inferencia del caso es: *si dividí 18:3 deberé realizar las divisiones correspondientes* (*dividendo dividido cociente) en las tres ecuaciones a resolver*.

8, 9 y 10: *Escribo divisor es igual a dividendo dividido cociente en las tres ecuaciones, resolviendo las operaciones en las numéricas*.

11: *¿Qué número más 4 da 6?* Respuesta: 2. Se obtiene otra ecuación reducida equivalente, al reemplazar los números 4 y 6 por el 2. *Los números 4 y 6 se han transformado en el 2*. Preguntamos: *¿mediante qué operación pueden transformarse el 4 y el 6 en el 2?* Respuesta: 6 – 4. La inferencia es: *si resté 6 – 4 deberé realizar las sustracciones correspondientes* (*suma menos sumando que no contiene la incógnita*) *en las tres ecuaciones a resolver*.

12, 13 y 14: *Escribo incógnita es igual a suma menos sumando en las tres ecuaciones y resuelvo las operaciones en las numéricas*.

Fundamentos teóricos y aclaraciones metodológicas

La experiencia surgió de la necesidad de justificar los primeros pasos del álgebra con argumentos aceptables para los estudiantes, no de manera formal, asociada sólo a la comprensión, sino instrumental, esto es, adoptable naturalmente para la acción reflexiva. Se pretendió que dicha comprensión estuviera basada en convicciones surgidas de construcciones previas, sacrificando el rigor formal de los métodos axiomáticos.

Las investigaciones de Aníbal Cortés sobre las tareas invariantes y sus invariantes operatorios asociados permitieron fundamentar, precisar y proyectar los primeros ensayos empíricos, realizados ante la necesidad de favorecer el aprendizaje de la matemática en escuelas medias estatales de población estudiantil muy afectada social y económicamente (adolescentes y adultos).

Elementos teóricos de relevancia en la Teoría de los Campos Conceptuales de Gérard Vergnaud, basada en la elaboración pragmática de los conocimientos

> *Campo conceptual* es un conjunto referencial y heterogéneo de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones del pensamiento, conectados unos a otros y, probablemente, entrelazados durante el proceso de adquisición (Moreira, p.2, p.12).

- La teoría de los campos conceptuales supone que la señal del desarrollo cognitivo es la conceptualización. De allí la importancia que tienen los aspectos conceptuales de los esquemas y el análisis conceptual de las situaciones, para las cuales los estudiantes desarrollan sus esquemas (Moreira, p.2).
- Los invariantes operatorios (introducidos por Piaget) dirigen el reconocimiento, por parte del individuo, de los elementos pertinentes a la situación. Son los conocimientos -contenidos en los esquemas- que constituyen la base, implícita o explícita, para obtener la información pertinente y de ella inferir la meta a alcanzar y las reglas de acción adecuadas (Vergnaud, p.15).
- Vergnaud identifica dos tipos de invariantes operatorios: los conceptos-en-acción (construidos pragmáticamente por los alumnos) y los teoremas-en-acción (propiedades construidas y utilizadas por los alumnos, falsas o no) (Moreira, p.9, p.22, Vergnaud, p.4).
- Aportes de la teoría de Campos Conceptuales de Vergnaud al trabajo de Piaget: Vergnaud tiene en cuenta los propios contenidos del conocimiento y el análisis conceptual de su dominio. Considera que los esquemas necesariamente se refieren a situaciones, a tal punto que debería hablarse de interacción esquema-situación en vez de interacción sujeto-objeto, como sostenía Piaget (Moreira, p.1, p.25).
- Argumentos que impulsaron la teoría de Campos Conceptuales de Vergnaud: a) Un concepto no se forma dentro de un solo tipo de situaciones. b) Una situación no se analiza con un solo concepto. c) El dominio de un campo conceptual no ocurre en algunos meses, ni tampoco en algunos años. Las dificultades conceptuales son superadas en la medida en que son detectadas y enfrentadas, pero esto no ocurre de una sola vez (Moreira, p.4).

Aportes teóricos de Aníbal Cortés

- Estudiando los principios que guían el pensamiento de los estudiantes en la resolución de ecuaciones, Cortés clasificó los errores en la resolución de ecuaciones en cinco categorías que pueden generalizarse a todo el cálculo algebraico. Son los errores:

- Concernientes a los conceptos de ecuación e incógnita.
- En las transformaciones algebraicas idénticas en los dos miembros.
- Relacionados a la prioridad de las operaciones.
- En la escritura de una nueva ecuación: falta de control.
- En los cálculos numéricos.

- Investigando los métodos algebraicos de los expertos (profesores, ingenieros, etc.) “modelizó” sus automatismos (controlados) en términos de esquemas (schèmes) e instrumentos.
- El concepto de schème, introducido por Piaget, puede definirse como *la organización invariante del comportamiento para una determinada clase de situaciones*.
- La regla de transformación utilizada y el schème asociado constituyen un “instrumento” (Rabardel).
- Los métodos de resolución son schèmes “instrumentados”, que incluyen tareas de análisis. El experto construye un método particular para cada objeto matemático, realizando el análisis de sus particularidades, la selección de una transformación pertinente y el instrumento disponible. La base de la eficacia de esos métodos de resolución es: *la justificación matemática*.
- Identificó cinco tareas invariantes en la resolución de ecuaciones. Son las que el experto realiza implícita o explícitamente cuando efectúa una transformación: el análisis de la ecuación, la identificación y respeto de la operación prioritaria, el control de la validez de la transformación, el control de los símbolos transferidos a una nueva expresión y los cálculos numéricos. En esta presentación hacemos énfasis en las tres primeras, pues caracterizan naturalmente los procedimientos empíricos surgidos de nuestra necesidad de enseñanza para un aprendizaje efectivo.
- Cada tarea invariante se realiza mediante un invariante operatorio. Los correspondientes a las tres tareas invariantes mencionadas son, respectivamente: el análisis de la ecuación, la identificación y el respeto de la operación prioritaria y el control de la validez de las transformaciones.

La justificación matemática, casi siempre enseñada y en ocasiones abandonada, es la característica central adoptada para enseñar a resolver ecuaciones. Pensamos que *la enseñanza (explícita, organizada, sistemática) de las tareas invariantes, ayuda al estudiante a construir invariantes operatorios necesarios para justificar sus transformaciones algebraicas y aplicar métodos de resolución con eficacia.*

Sobre el primer procedimiento

Es uno de los habituales en el comienzo de la enseñanza de la resolución de ecuaciones debido a su tratamiento meramente aritmético. La denominación de pre-álgebra al nivel de estudio del que hablamos es elocuente. En el comienzo del tránsito natural de la aritmética al álgebra predominan las acciones aritméticas.

Como base de los conocimientos operatorios previos se encuentra la “convención de orden de resolución”, reemplazante de la tradicional “separación en términos”, convención facilitadora de la enseñanza de una de las tareas invariantes en la resolución de ecuaciones planteadas por el Dr. Cortés, cual es *la identificación de la operación prioritaria*. El invariante operatorio asociado a dicha tarea es *una suma heterogénea de conocimientos sobre propiedades de las operaciones y convenciones de orden de resolución*, que incluye la siguiente:

1º) Operaciones entre paréntesis, 2º) Adiciones y sustracciones, 3º) Multiplicaciones y divisiones

La inclusión de potenciaciones y radicaciones no presentará mayores dificultades.
El análisis de la ecuación, otra tarea invariante, asociada al invariante *operatorio concepto de ecuación*, implica la interpretación de la misma como un ejercicio de cálculo combinado del que se conoce el resultado pero no así uno de los números participantes. *El control de la validez de la acción*, tercera tarea invariante realizada, se efectúa al corroborarse el valor de verdad "verdadero" de la igualdad 4=4 obtenida al reemplazar la incógnita por 2, *verificación de la conservación del valor de verdad de una igualdad* que constituye el invariante operatorio asociado a dicho control. Las tres tareas invariantes señaladas se realizan sin excepciones en la resolución de ecuaciones, constituyendo por tal razón elementos muy importantes para su enseñanza.

Sobre el segundo procedimiento

Durante la ejercitación del procedimiento anterior, naturalmente, algunos alumnos comienzan a "desarmar mentalmente" la ecuación, para ahorrar tiempo y esfuerzo. Graficamos dicha acción mediante el trazado de curvas cerradas, realizando además otra explicitación: la identificación de las operaciones prioritarias. Cada curva encierra el primer miembro de una ecuación reducida implícita, la cual mantiene esa característica para que la atención del aprendiz se centre en la numeración de las operaciones y el hecho de la reducción en sí. Se trata de explicitar la reducción y no la ecuación reducida, manteniendo la mayor cercanía posible al procedimiento "mental".

Sobre el tercer procedimiento

Se explicitan las ecuaciones reducidas producidas al "desarmar la ecuación" mediante la formulación de las preguntas indicadas en el procedimiento anterior, preguntas que implican la "resolución mental" de distintas ecuaciones con números naturales. Es necesaria una práctica intensa de este procedimiento porque es la base del siguiente, de mayor nivel de generalización.

Hasta aquí, tres procedimientos ensayados con rendimiento aceptable. A continuación, el "desarme escrito" constituirá una herramienta para resolver ecuaciones literales por comparación, dando un importante paso en el alejamiento de la aritmética y el acercamiento al álgebra, sin producirse ruptura alguna.

Resolución de ecuaciones literales mediante la construcción de un modelo numérico

El estudiante construye una ecuación que modeliza la ecuación literal (IPC, "invento para comparar", denominación adoptada por un grupo de alumnos), con números naturales pequeños que le permitirán "desarmarla por escrito". En ese proceso de "desarme" cada nueva ecuación presenta un nuevo número y se observa una regularidad: *ese número* *reemplaza a otros dos, de la ecuación anterior, y existe una operación que los relaciona.* La unicidad de esa operación implicará tomar ciertos cuidados en la selección del IPC, como evitar el 0 y el 1 o la reiteración de números 2 en el planteo o en los resultados parciales (pues 4**:**2=2, 4-2=2, $\sqrt{4}=2$). El análisis de la ecuación toma significación en la construcción del IPC y el control de la validez de las acciones está efectuado por los cálculos numéricos implicados en sus sucesivas reducciones. El invariante operatorio es la conservación del valor de verdad de las igualdades numéricas obtenidas entre los dos números que “desaparecen” de una ecuación y el nuevo número que “aparece” en la reducida. En este momento, hablamos por primera vez de *transformación* de esos dos números en el tercero, abonando el terreno para la caracterización de *expresiones algebraicas transformadas*, concepto a seguir construyendo en cursos posteriores. A esta altura de las prácticas, la explicitación de la prioridad de las operaciones mediante su numeración suele ser prescindible.

Ecuaciones de resolución simultánea

En esta última propuesta, la generalización manifestada al resolver las tres ecuaciones con el mismo modelo numérico, implica un acercamiento al álgebra. En efecto, se realiza una abstracción de los números naturales del IPC, abstracción que puede favorecerse con la utilización de la nomenclatura correspondiente. Si en vez de ***8-5*** el alumno puede verbalizar la acción como *minuendo menos resta*, habrá logrado expresar concientemente la abstracción poniendo el lenguaje en consonancia con la generalización algebraica.

No se pretende que los estudiantes lleguen a memorizar relaciones como “divisor es igual a dividendo dividido cociente” para la resolución de ecuaciones, sino que puedan enfrentar nuevas situaciones con modelos construidos utilizando conocimientos previos. Esos modelos serán justificación y fundamento, elementos imprescindibles para la construcción de los campos conceptuales pertinentes al tema en estudio.

Muchos pupitres y borradores han escondido, tal vez vergonzosamente, modelos numéricos como los descriptos. Hemos solicitado a personas que habían concluido sus estudios secundarios, dos o tres años atrás, la resolución de una ecuación con números reales cualesquiera. Algunos, ante la falta de práctica y el olvido de las propiedades básicas del álgebra como las uniformes, recurrieron *naturalmente* a la construcción de modelos numéricos (sus IPC) para decidir qué transformaciones realizar. ¿Por qué no enseñar entonces tal procedimiento?

Cuando explicamos las propiedades uniformes en la escuela media, lo hacemos ocasionalmente en forma rápida debido a lo obvias que se nos presentan. Ningún estudiante afirma no entenderlas. No hay solicitudes de reiteración ni exclamaciones de rechazo. Sin embargo, pocos son los que aplican luego *concientemente* dichas propiedades. La necesidad de trabajar rápidamente lleva a docentes y alumnos al reemplazo inmediato por los “pasajes de un miembro a otro”. En los campos conceptuales de muchos alumnos sólo quedan esas reglas de aplicación mecánica, cuya evocación está desprovista de justificación matemática. El aprendizaje necesitará entonces nuevas explicaciones, las que, en muchos casos, debido a la falta de tiempo, consistirán en la repetición de las mismas reglas que provocaron los errores. No afirmamos aquí que las propiedades uniformes ni los “pasajes de términos” sean inapropiados para las primeras enseñanzas. Tampoco pretendemos presentar la mejor forma de enseñar a resolver ecuaciones. Eso sí, estamos convencidos de que la posibilidad de justificar las transformaciones, elemento central que diferencia el accionar de un experto del de un estudiante, viabiliza el aprendizaje deseado.

Referencias bibliográficas

Cabrera, O. y Fusco, G. (2009). *Matemática Natural, para los primeros años de la enseñanza media (adolescentes y adultos).* Buenos Aires: Ediciones del Aula Taller.

Cortés, A. (1993). Análisis y clasificación de los errores en la resolución de ecuaciones. *Proceedings of the seventeenth PME Conference. Japan, Vol. I*; 146-153.

Cortés, A. y Kavafian, N. (1999). Los principios que guían el pensamiento en la resolución de ecuaciones. *Revue "Petit x" n*°51, 47-74.

Cortés, A., Pffaf N. 2000. La resolución de ecuaciones e inecuaciones: invariantes operatorios y métodos construidos por los alumnos. *Proceedings of the 24th PME conf. Vol. 2*, 193-200. Hiroshima, Japan.

Cortés, A. (2003). Modelo cognitivo de los métodos algebraicos de resolución del experto. *Proceeding of the 2003 joint Meeting of PME27 and PMENA25*, 253-260.

Cortés, A. y Kavafian, N. (2004). Dos tareas invariantes e importantes en la resolución de ecuaciones: el análisis de la ecuación y el control de la validez de las transformaciones. *Proceedings of the 28th Conference of the Internacional. Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol 2*, 247-254.

Cortés, A. y Cabrera, O. (2005). Tres tareas invariantes en la resolución de ecuaciones. *Novedades Educativas Nº170*, 53-63.

Moreira, M. (2002). La teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área. *Enseñanza de las ciencias. Instituto de Física*, UFRGS, P. Alegre

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los Campos Conceptuales. *Recherches den Didáctique des Mathématiques.* 1-21.