

**UNA SECUENCIA DIDÁCTICA MEDIADA POR GRAPHMÁTICA**

**Beatriz del Carmen Autino, Adriana Teresita de Fátima Galindo, Lydia María Llanos**  
Facultad de Ciencias Económicas. Universidad Nacional de Jujuy. Argentina  
bettyautino@hotmail.com; adrianauati@gmail.com; lyllanos@hotmail.com

**Resumen**

Las secuencias didácticas son un modelo que utiliza el docente buscando explorar nuevas formas de enseñanza; colaborando en la planeación y ejecución de las sesiones previstas para la clase. En este trabajo se presenta una secuencia didáctica sobre: raíces múltiples de una ecuación polinómica; y sistemas de ecuaciones: lineales, de segundo grado; y sistemas de inecuaciones lineales; a partir de la utilización de las numerosas herramientas que propone el software Graphmática. Se considera que el uso de este tipo de programas facilita a los estudiantes la construcción del conocimiento, permitiendo un pasaje dinámico entre los distintos tipos de representaciones semióticas, propios de los objetos matemáticos.

**Fundamentación**

Las secuencias didácticas representan un modelo que utiliza el docente en la búsqueda de explorar nuevas formas de enseñanza; ayudándolo en la planeación y ejecución de las sesiones previstas para la clase.

En este trabajo se presenta una secuencia didáctica que se caracteriza por el uso de herramientas tecnológicas y particularmente por la utilización de las numerosas herramientas que propone el software Graphmática, como un poderoso auxiliar didáctico y facilitador en la enseñanza de la matemática.

La aplicación del Graphmática colabora a afianzar los aprendizajes adquiridos por los alumnos en clase y agiliza la comprensión de conceptos, ya que a través de la experimentación en forma práctica de casos concretos, es posible pasar a operaciones mentales de formalización, generalización y abstracción, propias de muchos conceptos matemáticos. Así también permite representar y trabajar con los objetos matemáticos de manera gráfica, numérica y algebraica; y es muy utilizado por profesores y estudiantes, debido a su fácil manipulación y la gratuidad de su descarga.

La secuencia didáctica que se presenta plantea el desarrollo de los temas: raíces múltiples de una ecuación polinómica; sistemas de ecuaciones: lineales, de segundo grado y sistemas de inecuaciones lineales; todo ello a partir de su resolución gráfica utilizando el programa Graphmática. Se pretende realizar un trayecto sobre los temas antes mencionados, a partir de las numerosas opciones que permiten las representaciones gráficas y la interrelación entre éste y los demás registros semióticos.

Así también se incorporan situaciones problemáticas, las que colaboran al desarrollo de los razonamientos lógicos-formales de los estudiantes y permiten visualizar los temas dados, a través de hechos concretos de la realidad.

### **La propuesta**

Contenidos a desarrollar:

- Raíces de una ecuación polinómica: método gráfico para hallar las raíces múltiples, expresión factoreada de una ecuación polinómica.
- Sistemas de ecuaciones: análisis gráfico de sistemas de dos ecuaciones lineales y de segundo grado.
- Sistemas de inecuaciones: vista gráfica del conjunto solución. Optimización.

Para el abordaje de esta secuencia didáctica los estudiantes ya cuentan con conocimientos sobre los siguientes conceptos: ecuación, ecuaciones de la recta, función, tangencia, derivada, integrales, perímetro y superficie de figuras planas, manejo del programa Graphmática.

Modalidad de trabajo:

Los estudiantes trabajarán reunidos en grupos de tres cada uno.

Tiempo áulico estimado para desarrollar las Actividades:

Tres (3) clases

Visión General:

Esta secuencia didáctica tiene como objeto:

- Promover el uso del programa Graphmática en el proceso de enseñanza y aprendizaje.
- Fomentar en los estudiantes el trabajo colaborativo, la discusión y el intercambio entre pares, como así también la autonomía en la realización de las actividades propuestas.

Así también se espera que los estudiantes evidencien los siguientes desempeños:

- Identifiquen ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales y no lineales con dos incógnitas.
- Analicen, discutan y determinen las situaciones que pueden presentarse al resolver un sistema de ecuaciones lineales y no lineales con dos incógnitas e interpreten las mismas geoméricamente.
- Resuelvan sistemas de ecuaciones lineales y no lineales mediante el método gráfico.

## Uso de los recursos tecnológicos en el aula de matemática

---

- Grafiquen la región en el plano que representa la solución de cualquier inecuación lineal en dos variables utilizando el Graphmática.
- Planteen y resuelven problemas utilizando sistemas de ecuaciones y de inecuaciones.

### Actividades

En las actividades que se proponen se promueve: el uso del programa Graphmatica para que los estudiantes grafiquen las funciones que se explicitan en cada una de ellas; el paso por los diferentes registros gráfico, algebraico y coloquial; y el trabajo colaborativo.

#### Actividad 1

Introdutorio: El concepto de raíz múltiple de una ecuación algebraica, está estrechamente ligado con el concepto de derivada del polinomio como expresa el siguiente teorema:

Teorema: La condición necesaria y suficiente para que un número “a” sea raíz múltiple de orden h del polinomio f(x), es que anule al polinomio y a sus “h – 1” primeras derivadas, siendo distinta de cero la de orden “h”.

Dadas las siguientes ecuaciones:

$$x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0 \quad ; \quad x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$$

- Investigar gráficamente con Graphmatica, si tienen raíces múltiples. Para el caso que las posean, encontrarlas e indicar el grado de multiplicidad de las mismas.
- Escribir la ecuación en función de sus raíces.

#### Actividad 2

Introdutorio: Resolver un sistema de ecuaciones significa encontrar los valores de las incógnitas que verifican simultáneamente a las ecuaciones del sistema.

Trabajaremos con sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Intersección de dos rectas

- Para iniciar la actividad, los invitamos a ver el siguiente video: Sistema de dos ecuaciones
- Representar gráficamente, mediante el Graphmatica, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -x + y = 5 \\ -2x + 2y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} -x + y = 1 \\ -2x + 2y = 2 \end{cases}$$

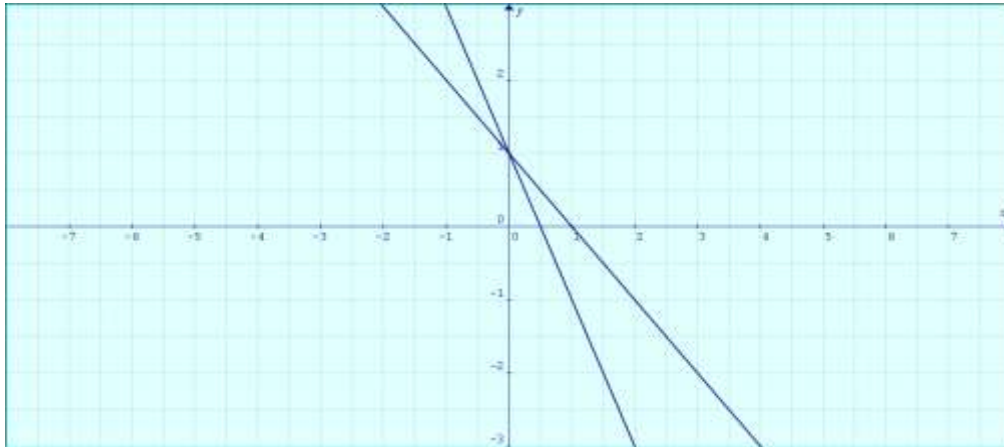
- ¿Qué ocurre con las gráficas?
- A partir de las gráficas anteriores escribir el conjunto solución para cada sistema de

ecuaciones.

iii. Expresar la relación que observan entre las rectas de cada gráfica y el conjunto solución correspondiente.

c) A partir de la gráfica que se les presenta a continuación escribir:

- i. el sistema de ecuaciones lineales que está representado gráficamente por las dos rectas.
- ii. las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas.



d) El perímetro de un rectángulo es de 40 metros. Si se duplica el largo del rectángulo y se aumenta en 6 metros el ancho, el perímetro queda en 76 metros.

- i. ¿Cuáles son las medidas originales del rectángulo y cuáles las medidas del rectángulo agrandado?
- ii. Calculen la superficie del rectángulo original.
- iii. Validen la respuesta utilizando los comandos del programa Graphmática para graficar y calcular el área del rectángulo aplicando el comando de integrales.

### Actividad 3

Introdutorio: Para rever el tema de rectas, parábolas y sistemas, miren el siguiente video:

Rectas y parábolas. Resolución de sistemas

a) Dado el siguiente sistema de ecuaciones: 
$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$$

- i. Grafiquen con Graphmatica.
- ii. Hallen gráficamente la solución con los comandos del programa.
- iii. Señalen e identifiquen la solución con las coordenadas correspondientes.
- iv. Hallen el área de la región limitada por las funciones del sistema dado, utilizando el comando integrar de Graphmática.

c) Encuentren gráficamente:

- i. una recta de modo que tenga un único punto de contacto con la parábola del sistema dado. Para ello, seleccionen el/los comando/s de Graphmatica adecuado/s, justificando la elección.

## ***Uso de los recursos tecnológicos en el aula de matemática***

---

- ii. Otra recta que no tenga puntos de contactos con la parábola.
- iii. Escriban una conclusión referida a las posiciones relativas entre la recta y la parábola a partir de sus gráficas.

### **Actividad 4**

Plantear y resolver el siguiente problema gráfica y analíticamente a partir del Graphmática: El perímetro de un triángulo rectángulo es 12cm y su hipotenusa tiene 5cm de longitud. ¿Cuál es la longitud de los catetos?

### **Actividad 5**

Introdutorio: Analicen el siguiente video: Inecuaciones lineales con dos incógnitas

- a) Utilizando el programa de Graphmatica, grafiquen todas las inecuaciones presentadas en el video anterior.
- b) Si un transporte escolar tiene capacidad para 60 personas y lleva el doble de niños que de niñas; muestren en una gráfica las distintas posibilidades que se pueden presentar.

### **Actividad de cierre**

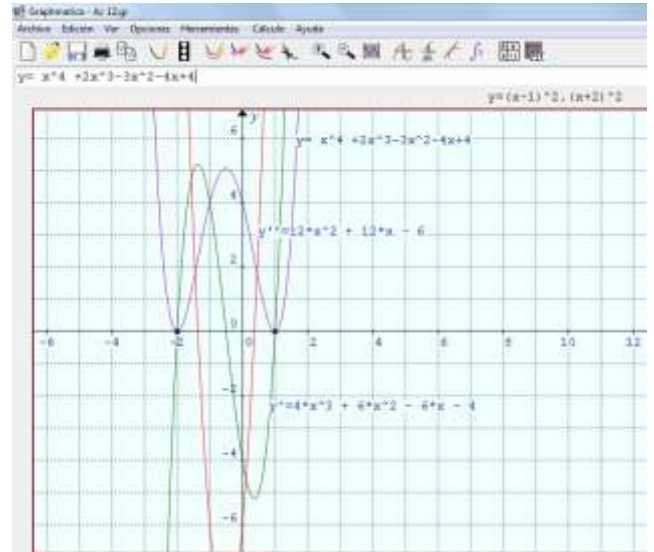
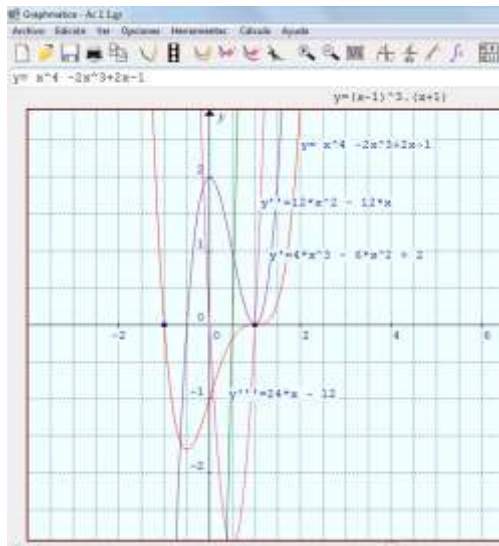
Introdutorio: Optimizar es encontrar niveles de ganancia máxima, costos mínimos, máximo rendimiento, etc. La optimización permite determinar las condiciones para lograr el beneficio óptimo. Pueden visitar la siguiente página [Maximizar o minimizar a los fines de afianzar el tema.](#)

- a) Resuelvan el siguiente problema: En un campo de 200 ha, se quiere sembrar trigo y maíz. Sólo están autorizados a sembrar un máximo de 150 ha de trigo y un máximo de 100 ha de maíz.
  - i. Expresen mediante un sistema de inecuaciones y representen gráficamente la situación.
  - ii. ¿Cuál es la cantidad que les conviene sembrar de cada cereal para obtener la mayor ganancia?
  - iii. ¿Cuál es el beneficio óptimo?

Dada la limitación en el número de páginas de este trabajo, a continuación se exponen algunos resultados esperados de las actividades planteadas.

### **Actividad 1**

Las gráficas permiten visualizar rápidamente las formas de las ecuaciones polinómicas, como así también las raíces y el grado de multiplicidad de las mismas.



### Actividad 2

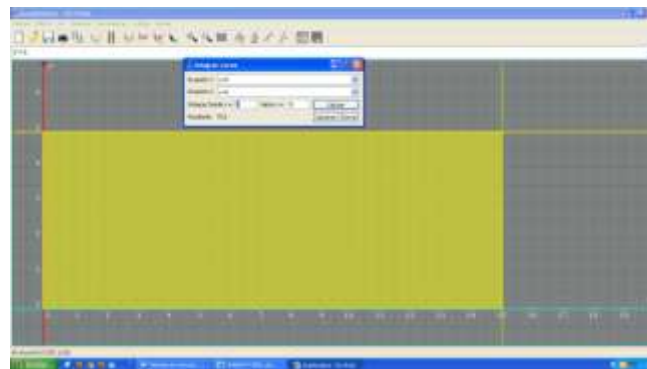
c) A partir de la observación de los alumnos de la gráfica presentada, y luego de considerar la ecuación de una recta de la forma:  $y = mx + b$ , los jóvenes pudieron observar rápidamente que las dos rectas tenían igual ordenada al origen:  $b=1$ , y diferían en sus pendientes, una de ellas  $m_1 = -1$  y la otra  $m_2 = -2$ . Luego, las ecuaciones encontradas fueron:

$y = -x + 1$ ;  $y = -2x + 1$ , las que consideradas simultáneamente representan el sistema de ecuaciones que responde a la gráfica. Así también pudieron obtener el punto de intersección de las dos rectas  $P(0,1)$ , solución del sistema obtenido anteriormente.

e) Designándose, por ejemplo, “x” al largo del rectángulo e “y” a su ancho el sistema al que arribaron los estudiantes fue el siguiente:

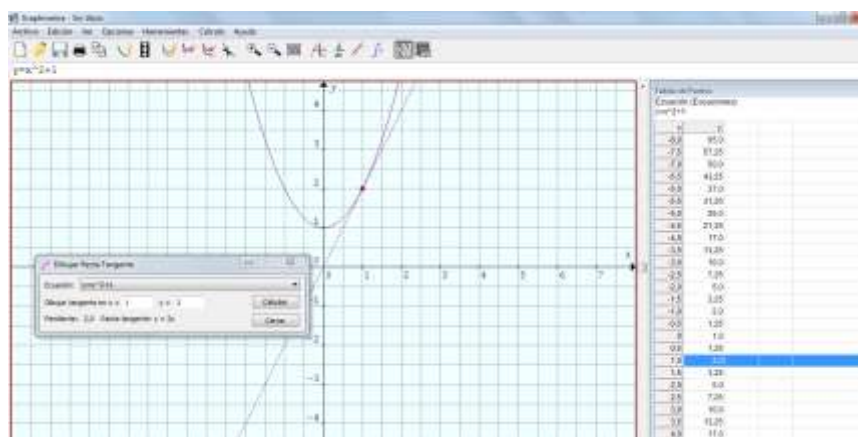
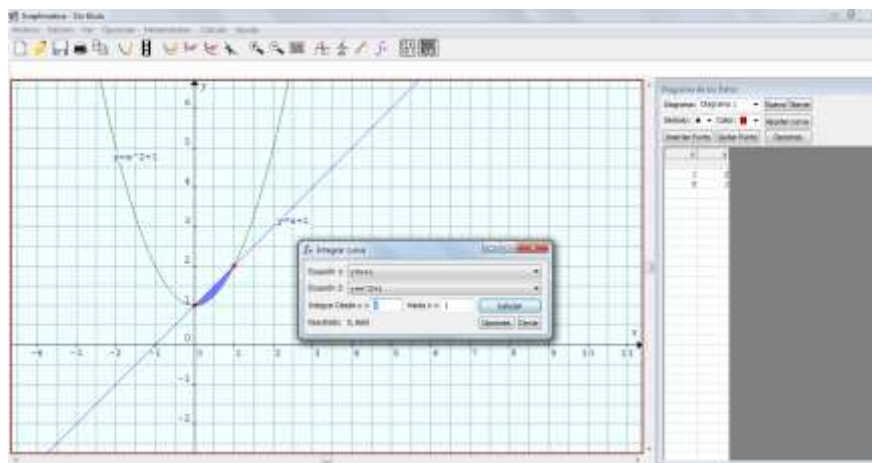
$$\begin{cases} 2x + 2y = 40 \\ 4x + 2y + 6 = 76 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 20 \\ 2x + y = 35 \end{cases}$$

Luego de resolverlo obtuvieron  $x = 15$ ,  $y = 5$ , es decir, el rectángulo original tiene 15 mt de largo y 5 mt de ancho, y las dimensiones del rectángulo aumentado son: 30mt de largo por 11mt de ancho. Gráficamente:



**Actividad 3:**

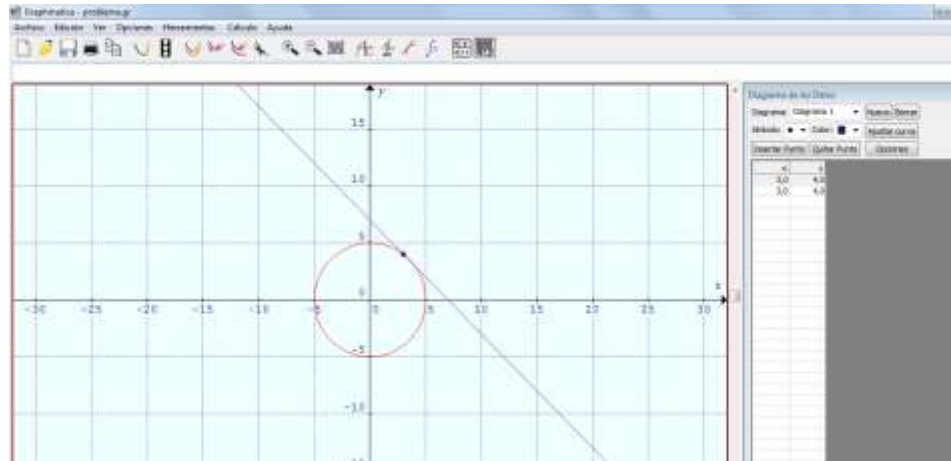
Los alumnos graficaron el sistema formado por una ecuación lineal y una cuadrática, y pudieron encontrar a partir del gráfico la solución del mismo, como así también utilizando el comando de integrar curva, obtuvieron el valor del área determinada por las dos curvas. Posteriormente hicieron uso de los comandos correspondientes a cálculo de rectas tangentes, dando respuesta a lo solicitado en el apartado c.



**Actividad 4**

eEn esta actividad, lo que se espera es que planteen el sistema: 
$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Rta: Uno de los catetos del triángulo tiene 3 cm de longitud y el otro 4 cm.

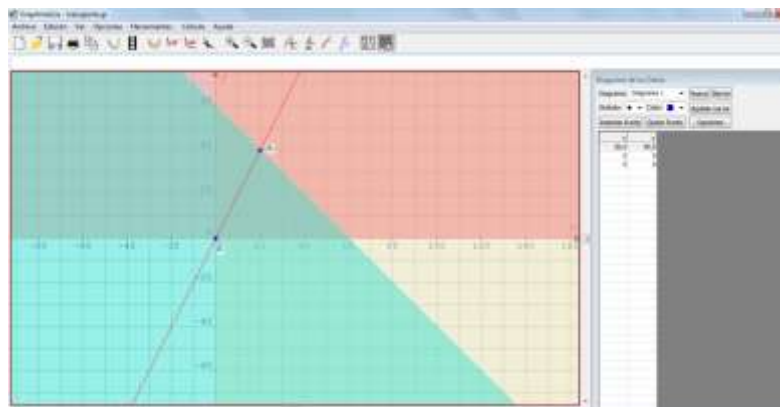


### Actividad 5

Luego de determinar el sistema y de graficar cada una de las inecuaciones y de la ecuación resultante del problema, los alumnos concluyeron que las posibilidades son las coordenadas de los puntos que están sobre el segmento AB de la gráfica.

x: niñas      y: niños

$$\begin{cases} x + y \leq 60 \\ y = 2x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

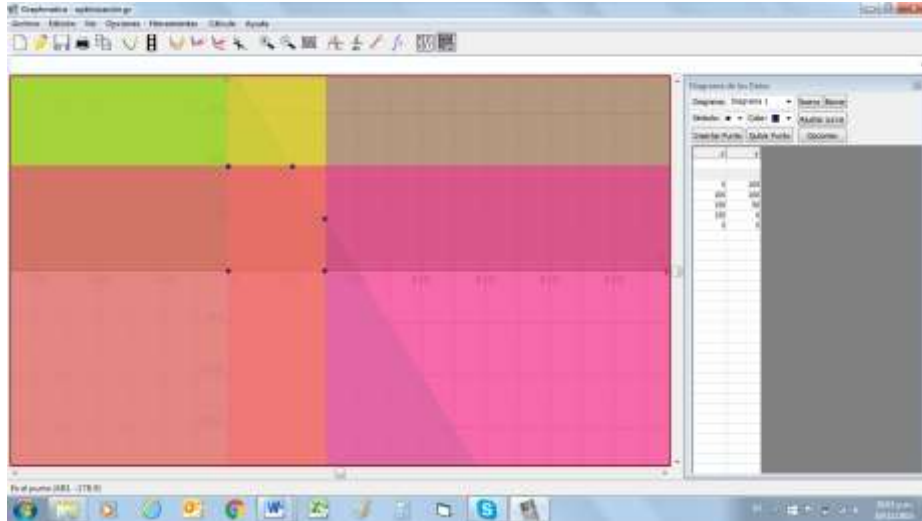


### Actividad de cierre

En un primer momento se definieron las variables, llamándoles: “x” a la cantidad de ha de trigo sembradas e “y” a las de maíz. Se planteó el sistema de inecuaciones y se lo graficó:



$$\begin{cases} x + y \leq 200 \\ y \leq 100 \\ x \leq 150 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



En un segundo momento, se expresó la ecuación de la recta beneficio de la forma:

$8.000x + 10.000y = b$ . Por último se reemplazó en la recta beneficio, las coordenadas de los vértices del dominio del sistema, obteniéndose así el mayor beneficio.

(x,y)	$8.000x + 10.000y = \text{beneficio}$	
(0,0)	$b=0$	
(150,0)	$b=1.200.000$	
(150,50)	$b=1.200.000 + 500.000 = 1.700.000$	
(100,100)	$b=800.000 + 1.000.000 = 1.800.000$	El mayor beneficio
(0,100)	$b=1.000.000$	

### **A modo de cierre**

A partir del trabajo presentado se puede observar que el programa Graphmatica tiene un gran potencial para ser utilizado como recurso didáctico en el aula, especialmente en lo que concierne a graficar funciones, analizar algebraica y gráficamente sistemas de ecuaciones e inecuaciones; como así también en la posibilidad que brinda la interpretación de los gráficos para la resolución de problemas y la validación de resultados.

Se considera que el uso de este tipo de software educativo es importante en cuanto facilita a los estudiantes su protagonismo en la construcción del conocimiento permitiendo un pasaje dinámico entre los distintos tipos de representaciones semióticas que propios de los objetos matemáticos.

### Referencias bibliográficas

Burbules, N. y Thoms, C. (2001). *Educación: Riesgos y promesas de las nuevas tecnologías de la información*. España: Garnica.

Hitt, F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, N° 2*

Martí, E. (1992). Aprender con ordenadores en la escuela. Barcelona: ICE-Horsori.

Morante, A.; Vallejo, J.A. (2011). Software libre para el estudio de sistemas dinámicos. *La Gaceta de la RSME, 14*, pp. 111-132..

Real Pérez, Mariano. (s/f). *Las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. CEP de Sevilla (Sevilla). Disponible en: [http://personal.us.es/suarez/ficheros/tic\\_matematicas.pdf](http://personal.us.es/suarez/ficheros/tic_matematicas.pdf)

Martí, E. (1992). *Aprender con ordenadores en la escuela*. Barcelona: ICE-Horsori.