

ERRORES EN SITUACIONES DE VALIDACIÓN: ANÁLISIS DE UNA CATEGORÍA EMERGENTE EN UN ESTUDIO CON ALUMNOS UNIVERSITARIOS

Carolina Boubée^{1,2}, Ana María Graciela Rey¹, Patricia Sastre Vázquez¹

¹Facultad de Agronomía. Nact CRESCA. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA). ²ISFD N°156: “Dr. Palmiro Bogliano”. Azul. Argentina. cboubee@faa.unicen.edu.ar, grey@faa.unicen.edu.ar, psastre@faa.unicen.edu.ar

Resumen

En el marco del proyecto “Análisis del Lenguaje Matemático y su influencia en los procesos de Validación en estudiantes universitarios de Ingeniería”, se analizaron los tipos de razonamiento utilizados por estudiantes de la Facultad de Agronomía (UNCPBA) en situaciones de validación sobre Secciones Cónicas. Se identificó una categoría emergente, denominada Interpretación Simbólica de un Objeto Algebraico, incluyendo las producciones que involucraban la pérdida del carácter icónico de la expresión algebraica de una cónica. En este trabajo se analiza el error asociado a esta categoría, que excede el marco algebraico y denota una falta de significado dentro de la Geometría Analítica.

Introducción

En el marco del proyecto de investigación “Análisis del Lenguaje Matemático y su influencia en los procesos de Validación en estudiantes universitarios de Ingeniería”, en un trabajo anterior al presente (Sastre Vázquez, Boubée, y Rey, 2014) se analizaron los tipos de razonamiento utilizados por estudiantes del Primer Año de todas las carreras de la Facultad de Agronomía de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Azul, Argentina, en situaciones de validación referidas a Secciones Cónicas, y se obtuvo un primer acercamiento hacia la comprensión sobre cuál es y cómo funciona la racionalidad de los estudiantes en contextos de validación.

Como parte de aquel trabajo se diseñó una actividad con la finalidad de que los alumnos pudieran enfrentarse a la tarea de validar matemáticamente, en el área de la Geometría Analítica, específicamente abordando el tema “Secciones Cónicas”, bajo el título “Actividades matemáticas para pensar de a dos”.

La actividad, que se presentó en forma escrita, incluyó una cuestión con dos preguntas y se solicitó, de manera explícita y enfática que los estudiantes, en parejas (23 grupos), dejaran en la hoja de resolución todo lo que hicieran, además de explicar y justificar la respuesta o las razones que impidieron la resolución.

La cuestión planteada fue la siguiente:

Pensamiento matemático avanzado

- ¿En qué caso/s particular/es la elipse puede transformarse en otra cónica?
- ¿Qué sucede con los elementos de ambas cónicas

Para el análisis de los resultados se utilizaron las categorías de razonamiento en situaciones de validación definidas por Balacheff (2000), en el contexto de la Geometría Euclidiana, en las que se distingue un pasaje gradual desde una racionalidad empírica a una construcción netamente cognitiva. Tales categorías son: *Empirismo ingenuo*, *Experiencia crucial*, *Ejemplo genérico* y *Experiencia mental*.

En dicho trabajo se debió considerar una categoría emergente asociada a un error particular. Esta categoría fue denominada “Interpretación Simbólica de un Objeto Algebraico (ISOA)”. La necesidad de su inclusión deviene del planteo de actividades que involucran aspectos algebraicos, característicos de la Geometría Analítica a diferencia de la Geometría Euclidiana.

Según Peirce (1987) se interpreta que un ícono hace referencia a una simple asociación racional entre el signo y la cosa significada, mientras que un símbolo implica una asociación mental con una significación propia del interpretante entre el signo y el objeto. Así, en términos de este autor, una fórmula algebraica es un ícono ya que una gran propiedad distintiva de los íconos es que mediante su observación se pueden descubrir otras verdades concernientes al objeto. No obstante este predominio del carácter icónico, las expresiones algebraicas contienen símbolos en el sentido de Peirce, como por ejemplo los signos $+$, $-$, $=$, etc.

La nueva categoría surge de la necesidad de encuadrar aquellas producciones de los estudiantes en las que se observa la pérdida del carácter icónico de la expresión algebraica de una cónica, reduciendo toda la expresión a símbolo, debido al peso que le otorgan al símbolo $+$ o $-$ de las ecuaciones de la elipse y de la hipérbola, respectivamente.

La Tabla 1 muestra los resultados obtenidos en la categorización de las respuestas producidas por los grupos de estudiantes.

Categorías de Respuestas		Cantidad de Grupos
Sin categorizar	Sin Categorizar (SC)	4
Categorías según Balacheff	Empirismo Ingenuo (EI)	1
	Experiencia Crucial (EC)	0
	Ejemplo Genérico (EG)	4
	Experiencia Mental (EM)	6
Categoría emergente	Interpretación Simbólica de un Objeto Algebraico (ISOA)	8
TOTAL		23

Tabla 1. Cantidad de grupos de estudiantes para cada categoría

Con la Figura 1 se ejemplifica la categoría emergente ISOA mostrando un caso representativo de la Interpretación Simbólica de un Objeto Algebraico.



Figura 1. Respuesta del Grupo 8 categorizada ISOA, en la que además del cambio de signo, hay un cambio en los coeficientes

Los indicadores de ausencia de validación y los numerosos casos de interpretaciones simbólicas de las expresiones algebraicas de las cónicas (categoría ISOA), por las que un cambio de signo valida la transformación de una cónica en otra, requiere un análisis más profundo de esta situación. Es por ello que, con el presente trabajo, se inicia una nueva indagación en la misma línea de búsqueda de un acercamiento hacia la comprensión de la racionalidad de los estudiantes en contextos de validación, pero focalizando en el análisis del error cometido por estos alumnos, desde distintos aspectos. Se persigue como objetivo analizar el error definido como Interpretación Simbólica de un Objeto Algebraico, que representara el 35% de los resultados obtenidos en el estudio previo, profundizando en la comprensión del razonamiento puesto en juego, y en un tipo de error particular de alta frecuencia de aparición, cuando los estudiantes se desempeñan en actividades de validación en el campo de la Geometría Analítica.

Análisis del error de la categoría ISOA

Como se ha detallado, en el trabajo previo de análisis del razonamiento de los estudiantes en situaciones de validación con actividades relativas a Secciones Cónica, el marco teórico de referencia no correspondió a Geometría Analítica sino a Geometría Euclidiana. Sin

embargo resultó de utilidad para analizar el tipo de razonamiento de los estudiantes, a excepción de este grupo que originó la nueva categoría ISOA por su particular procedimiento justamente en un aspecto propio del Álgebra. Esta forma de validación abre muchas preguntas. La búsqueda de respuestas da lugar a un recorrido por el que transita este trabajo.

La búsqueda infructuosa de antecedentes para el análisis del razonamiento en situaciones de validación en el ámbito específico de la Geometría Analítica, dio origen a un nuevo proceso de búsqueda.

Un primer nivel de análisis, permite afirmar que los alumnos reconocen la correspondencia entre cada cónica y su ecuación ordinaria o su respectiva ecuación general. De las cuatro cónicas realizan una selección teniendo como único criterio para hacerlo la semejanza morfológica de las ecuaciones, sus semejanzas “visuales”. Así, las opciones para analizar en qué otra cónica se puede transformar la elipse se reducen a dos posibilidades: circunferencia e hipérbola.

Se desconoce por qué en ningún caso se consideró como alternativa a la parábola, aunque intentando interpretar el criterio de semejanza morfológica entre las ecuaciones, se supone que se consideró como significativa y/o insalvable la diferencia entre una o dos variables elevadas al cuadrado.

La transformación siempre es realizada tomando en cuenta el registro algebraico exclusivamente y en ese marco se considera válida la justificación sintetizada en la expresión “cambio de signo”.

Con este procedimiento, se evidencia que los estudiantes olvidan o no toman en cuenta:

- las definiciones de las cónicas y ligado a ello el significado de los signos + y – de las ecuaciones ordinarias de la elipse y la hipérbola, respectivamente.
- la existencia de un registro gráfico ya que los objetos matemáticos considerados no son solo una ecuación.

Lo mencionado guió la investigación hacia un nuevo análisis, propio del trabajo en el registro de representación algebraico, y se indagó sobre las dificultades y errores en esta área.

Los objetos del álgebra pueden ser caracterizados bajo diferentes representaciones semióticas, entendiéndolas como producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significado y de funcionamiento (Duval, 1993). Estas representaciones no son sólo útiles para fines de comunicación, sino que también son esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento. Para este autor, la habilidad para cambiar de registro de cualquier representación semiótica ocupa un lugar central en el aprendizaje de la matemática.

Socas (1997, 2007) distingue tres estadios de desarrollo cognitivo de los sistemas de representación en Álgebra:

- Estadio *semiótico*, es aquel en el que el alumno aprende y usa los signos nuevos con los significados que le suministran los signos antiguos ya conocido y usados por él.
- El estadio *estructural* se caracteriza porque el sistema nuevo se estructura según la organización del antiguo, aunque ciertos comportamientos de los signos no pueden explicarse en términos del sistema antiguo.
- El estadio *autónomo* es aquel en el que los signos actúan con significados propios independientemente del sistema anterior.

En cada uno de estos estadios de desarrollo del signo, pueden distinguirse dos categorías de comportamiento de los alumnos, en cuanto a la relación objeto-significado (Socas, 2007):

- En el *estadio semiótico*:

Una primera categoría, en la cual el alumno tiene ideas imprecisas sobre el objeto matemático y mezcla de forma incoherente diferentes representaciones semióticas.

En la segunda categoría, el alumno reconoce los elementos de un sistema de representación semiótico en relación con el objeto matemático.

- En el *estadio estructural*:

En la categoría inicial, el alumno conoce un sistema de representación semiótico y realiza transformaciones en el interior del sistema de representación.

En la segunda categoría, el alumno realiza correctamente actividades de conversión de un sistema de representación semiótico a otro, partiendo de un sistema controlado por el alumno.

- En el *estadio autónomo*:

En la primera categoría, el alumno articula dos sistemas de representación semióticos, partiendo indistintamente de ellos, ya que domina de manera autónoma ambos.

Finalmente, en la segunda categoría, el alumno articula coherentemente diferentes sistemas de representación semióticos, ejerce control de las representaciones semióticas que utiliza. Tiene conocimiento del objeto matemático como estructura y puede controlar aspectos coherentes e incoherentes del mismo.

Se considera que los alumnos que cometen el error motivo de este análisis, evidencian un desarrollo cognitivo que se corresponde con el estadio semiótico, reconociendo los elementos de un sistema de representación semiótico en relación con el objeto matemático (segunda categoría de dicho estadio). No logran realizar transformaciones al interior del sistema de representación algebraico en este caso, con la lógica de dicho sistema, condición esencial para acceder al nivel siguiente de desarrollo cognitivo.

Al abordar objetos algebraicos, las conversiones entre registros permiten analizar las dificultades y errores conceptuales y de procedimiento, entendiendo el error como la presencia de un esquema cognitivo inadecuado en el alumno, no sólo como consecuencia de ausencia de conocimiento. El conocimiento conceptual no puede aprenderse sin significado, ya que es rico en relaciones y conforma una red de conocimiento, en tanto el

conocimiento procedimental es dependiente del sistema de representación simbólica e implica el conocimiento de las reglas sintácticas del mismo.

En Socas (1997) se identifican tres orígenes distintos de los errores que cometen los alumnos: errores que tienen su origen en un *obstáculo*, entendiéndolo como un conocimiento adquirido, no como una falta de conocimiento, que fue efectivo en algún contexto específico, pero que cuando el alumno utiliza dicho conocimiento en otro contexto, da lugar a respuestas inadecuadas; errores que tienen su origen en la *ausencia de sentido o significado*; o, finalmente, con origen en *actitudes afectivas y emocionales*.

Los errores que tienen su origen en una *ausencia de sentido* se originan en los distintos estadios de desarrollo (semiótico, estructural y autónomo) que se dan en los sistemas de representación, por lo tanto pueden diferenciarse en tres etapas distintas:

- Errores del álgebra que tienen su origen en la Aritmética, resultado de no haber asimilado relaciones y procesos en un contexto aritmético.
- Errores de procedimiento, que se producen cuando los alumnos utilizan de manera inapropiada reglas, definiciones, propiedades, fórmulas, etc.
- Errores del álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico, y a la complejidad de los objetos que le son propios.

Inicialmente, el error que se estudia no se correspondería taxativamente con los antes mencionados, pero sí se hallan aspectos relacionados.

Los alumnos que cometen este error, utilizan como único criterio para responder - erróneamente- la semejanza morfológica de las ecuaciones. La imagen mental de las mismas, es identificada y visualizada correctamente, pero no así el procedimiento que efectúan sobre estos objetos.

La identificación de este aspecto, deriva en un análisis sobre la visualización, como proceso vinculado al trabajo con objetos matemáticos.

Visualización se refiere al conjunto de procesos y habilidades de los sujetos para formar, trazar y manipular imágenes mentales o físicas, usándolas efectivamente para establecer relaciones entre objetos matemáticos. (Duval, 1999).

La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre retratos, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y comprensiones avanzadas. (Arcavi, 2003, p.217)

El mismo autor también considera que la matemática, como creación humana y cultural que trata con objetos y entidades muy diferentes de cualquier fenómeno físico, se apoya

fuertemente sobre la visualización en sus diferentes formas y niveles, no sólo en el campo de la geometría.

Más allá de ser una capacidad asociada esencialmente a la Geometría, también se la puede reconocer en el trabajo en otras áreas de la Matemática. Segui (1995) afirma, basado en Kieran y Filloy (1989), que el razonamiento visual no es patrimonio de la geometría sino que está presente en otras ramas de la matemática, por ejemplo en álgebra, combinatoria y probabilidad (diagramas).

Godino, Cajaraville, Fernández, y Gonzato (2012) postulan que el proceso puesto en juego en la realización de una práctica matemática por un sujeto:

- Siempre involucra lenguajes analíticos, en mayor o menor medida, aunque la tarea refiera a situaciones sobre el mundo perceptible.
- Una tarea no visual puede ser abordada, al menos parcialmente, mediante lenguajes visuales, los cuales permiten expresar de manera eficaz la organización o estructura de la configuración de objetos y procesos puestos en juego.

Una tarea visual, en las que intervienen objetos del mundo sensible, puede abordarse con medios analíticos y viceversa, una tarea analítica, en que priman entidades lógicas, numéricas, analíticas, se puede abordar con medios visuales.

El grado de visualización puesto en juego en la solución de una tarea dependerá, en parte, del carácter visual o no de la tarea -aunque pueden articularse estos abordajes, tal como se mencionó-, pero también de los estilos cognitivos particulares del sujeto que la resuelve, como han puesto de manifiesto diversas investigaciones (Krutestkii, 1976; Presmeg, 1986; Pitta-Pantazi y Christou, 2009).

Godino *et al* (2012, p.18) concluyen que:

[...] la configuración de objetos y procesos asociados a una práctica matemática estará formada usualmente por dos componentes, uno visual y otro analítico, los cuales se apoyan sinérgicamente en la solución de la tarea correspondiente. El componente visual puede desempeñar un papel clave en la comprensión de la naturaleza de la tarea y en el momento de formulación de conjeturas, mientras que el componente analítico lo será en el momento de generalización y justificación de las soluciones.

Los distintos tipos de objetos matemáticos dan cuenta de la dialéctica entre lo visual y lo analítico. Para cualquier tipo de objeto matemático primario se postulan la presencia o intervención en su constitución y funcionamiento de una faceta ostensiva (pública, perceptible, simbólica o visual) y otra faceta no ostensiva (normativa, lógica, ideal, mental) las cuales interaccionan de manera sinérgica.

La aplicación de la dualidad ostensivo-no ostensivo a los distintos tipos de objetos matemáticos primarios (problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) proporciona un punto de vista nuevo sobre el papel de la visualización en la práctica matemática. (Godino *et al*, 2012, p.19)

La sinergia mencionada en estas investigaciones, entre ostensivos y no ostensivos, entre lo visual y lo analítico, no se evidencia en las producciones de los alumnos que cometen el error categorizado ISOA. Sus resoluciones dan cuenta de un tratamiento visual, en un objeto algebraico, particularmente en la ecuación de las cónicas, en un contexto que articula de forma imprescindible lo visual y analítico, lo geométrico y algebraico, como es la Geometría Analítica.

Conclusión

Todas las producciones de la categoría en estudio denotan un tratamiento visual aplicado a un objeto algebraico: la ecuación de las secciones cónicas. En algunos casos se trata de la ecuación general y en otros de la ecuación ordinaria, pero esta distinción no constituye una variable significativa para el análisis. Lo que resulta significativo es el tratamiento puramente visual que se realiza sobre el objeto *ecuación*, obviando toda regla algebraica. Los alumnos que cometen este error, utilizan como único criterio para responder -erróneamente- la semejanza morfológica de las ecuaciones. La imagen mental de las mismas, es identificada y visualizada correctamente, pero no así el procedimiento que efectúan sobre estos objetos. El procedimiento de discriminación visual utilizado remite a un vaciamiento de contenido ya que solamente se observa la “forma” de un objeto algebraico.

Es necesario hacer notar que la visualización aplicada en un registro algebraico lleva a los alumnos a la transformación de una elipse en una hipérbola, mientras que el mismo proceso de visualización en el registro gráfico, llevado a cabo por otros grupos de estudiantes y obviado por el grupo que aquí se analiza, conduce a la transformación de una elipse en una circunferencia.

Se conjetura que este error evidencia un desconocimiento del status algebraico de los símbolos operacionales en las expresiones algebraicas, y su alta frecuencia está muy relacionada al área de la Matemática que actúa como contexto, la Geometría Analítica. Nunca antes este grupo de alumnos, trabajando en temas de Álgebra, había mostrado un error de esta naturaleza o al menos su incidencia nunca fue de la magnitud con que aquí se presentó.

La Geometría Analítica es una rama de la Matemática que en su esencia, tal como su origen y su nombre indican, incluye la articulación de dos registros. Por tanto, resulta imprescindible el trabajo conjunto e integrado de los registros gráfico y algebraico. En otras palabras, resultan fundamentales las actividades cognitivas definidas por Duval (1993) como tratamiento y conversión de registros de representación semiótica, tanto por su

importancia para el aprendizaje de los alumnos, como por la especificidad de la Geometría Analítica.

Los alumnos cuyas producciones han sido categorizadas como ISOA, dan cuenta de un error en el álgebra (“cambio de signo”) aunque no puede ser encuadrado en ninguna de las categorías de errores asociadas a esta rama de la Matemática. Surge entonces el interrogante sobre si este tipo de error puede constituir una nueva categoría, en el referencial asumido, ya que son errores en el álgebra, que podrían tener su origen en la geometría, al utilizar -incorrectamente- un proceso que les ha resultado útil en el contexto geométrico, gráfico, tal como es la visualización, en un contexto analítico, algebraico.

Las dificultades y los errores en el aprendizaje de la Matemática continúan siendo un foco de estudio e investigación en Educación Matemática, ya que aún quedan cuestiones importantes por resolver, más allá de la vasta investigación al respecto y de los resultados obtenidos. Así mismo, el análisis de la eficacia relativa de los modos visuales de razonamiento respecto de los modos analíticos, según los tipos de tareas y fases de estudio, es un tema actual en Educación Matemática y que requiere continuar investigando.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 52, 215-241.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de Prueba en los Alumnos de Matemáticas*. Bogotá: Una empresa docente. Universidad de los Andes.

Duval, R. (1993). *Registros de representaciones semióticas y funcionamiento cognoscitivo del pensamiento*. Traducción: Departamento de Matemática Educativa CINVESTAV-IPN.

Duval, R. (1999). *Argumentar, Demostrar, Explicar: ¿Continuidad o ruptura cognitiva?* México D.F.: Iberoamérica.

Godino, J. D., Cajaraville, J. A., Fernández, T. y Gonzato, M. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(2), 109-130.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológico. *Enseñanza de las Ciencias*, 7 (3), 229-240.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago: University of Chicago Press.

Peirce, C. S. (1987). *Obra lógico-semiótica*. Edición de Armando Sercovich. Madrid: Taurus.

Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2009). Cognitive styles, dynamic geometry and measurement performance. *Educational Studies in Mathematics*, 70, 5-26.

Presmeg, N. (1986). Visualisation and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 297-311.

Sastre Vázquez, P., Boubée, C. y Rey, A. M. G. (2014). Análisis del razonamiento de alumnos universitarios en situaciones de validación en Geometría Analítica. En: Lestón, P. (Ed.). (2014). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 27, pp. 25-32. México,

DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Segui, M (1995). Estudio sobre el Comportamiento Visual en Algebra de los Alumnos del Segmento Educativo de 14-16. *Enseñanza de las Ciencias*, 13 (1), 97 -105.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico Romero (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Universitat de Barcelona. ICE.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho Machín, P. Flores Martínez y P. Bolea Catalán (Eds.), *Investigación en educación matemática: XI simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática* (pp. 19-52). La Laguna, Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.