

PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS MEDIANTE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES NO HOMOGÉNEOS

Jesús V. Flores Salazar –Verónica Neira Fernández
jvflores@pucp.pe– vneira@pucp.pe
IREM– Pontificia Universidad Católica del Perú

Tema: La Resolución de Problemas como Herramienta para la Modelación Matemática.

Modalidad: CB

Nivel educativo: Superior

Palabras claves: matemática contextualizada, modelación.

Resumen

Presentamos un recorte de la tesis de la maestría de la segunda autora. Esta comunicación tiene por objetivo identificar algunas deficiencias que presentan los alumnos al modelar problemas contextualizados mediante sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Para ello utilizamos como marco teórico la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC) de Camarena (2000) centrada en la Fase Didáctica y como metodología recurriremos a la metodología propia de la Fase Didáctica. La investigación se realizó con 9 estudiantes del primer año de Ciencias Administrativas de una universidad privada de Lima, se les aplicó unos paquetes en donde se presentaban tres categorías de problemas para que los modelen usando sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Para la elaboración de estos paquetes con los problemas se tomó en cuenta la categorización de problemas que se explica en la teoría que utilizamos. Como uno de los resultados señalamos que, la etapa de la traducción del lenguaje natural al lenguaje matemático es fundamental para la modelación de problemas contextualizados mediante sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.

Introducción

Los aspectos de este artículo forman parte de la investigación que realizamos en la tesis de Neira (2012). En esta investigación observamos que los alumnos del curso de Matemáticas Básicas del primer año de Ciencias Administrativas de una universidad particular de Lima muestran dificultades en la modelación de sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos con dos variables es decir, cuando se les presenta un problema matemático contextualizado para que elaboren el sistema de ecuaciones lineales no homogéneo asociado al problema.

En vista de esta problemática, se investigaron algunos problemas que se encontraban en su libro texto “Nivelación Matemática para Administradores” que se utiliza en la Universidad Peruana de Ciencias y Aplicadas, estos problemas fueron clasificados según la categorización de problemas contextualizados de acuerdo con la teoría Matemática en el Contexto de las Ciencias.

Modelo teórico

Para llevar a cabo esta investigación tomamos aspectos de la Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC) desarrollada por Camarena (1999) y para analizar algunos conflictos cognitivos de los estudiantes utilizaremos la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas de Duval (1999). Además de la teoría presentamos la metodología propia de la MCC.

La Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias es una línea de investigación establecida desde hace treinta años en México. La filosofía educativa de esta teoría es que el estudiante esté capacitado para hacer la transferencia del conocimiento de la matemática a las áreas que la requieren y con ello las competencias profesionales y laborales se vean favorecidas. Esta teoría contempla cinco fases:

1. Fase curricular
2. Fase epistemológica
3. Fase de formación de profesores
4. Fase cognitiva
5. Fase didáctica

En este trabajo nos enfocaremos en la fase didáctica, ya que nos interesa elaborar una propuesta didáctica para mejorar el aprendizaje en el modelamiento de problemas contextualizados mediante sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Este trabajo fue aplicado a alumnos que culminaron el primer año de estudios en la carrera de Administración y por ello sólo utilizaremos la primera etapa esta Fase.

Fase didáctica

Esta fase contempla un modelo didáctico para el desarrollo de las competencias profesionales referidas a la resolución de problemas contextualizados, con ello pretende fomentar el desarrollo de las habilidades para la transferencia el conocimiento, éste incluye tres etapas (Camarena, 2000):

1. Presentar la estrategia didáctica de la Matemática en Contexto en el ambiente de aprendizaje.
2. Implantar cursos extracurriculares en donde se llevan a cabo actividades para el desarrollo de habilidades del pensamiento, habilidades meta cognitivas y habilidades para aplicar heurísticas al resolver problemas, así como actividades para bloquear creencias negativas.

3. Implantar un taller integral e interdisciplinario en los últimos semestres de los estudios del alumno, en donde se resuelvan eventos reales de la industria.

A continuación se presentará las características de la primera etapa:

Tabla 1. Fase didáctica

Primera etapa	Características
Presentación de la estrategia didáctica.	Planteamiento del problema de las disciplinas el contexto o vida cotidiana (problemas reales). Determinación de las variables y de las constantes del problema. Inclusión de los temas y conceptos matemáticos necesarios para el desarrollo del modelo matemático y la solución del mismo. Determinación del modelo matemático. Solución matemática del problema. Determinación de la solución requerida por el problema en el ámbito de las disciplinas del contexto. Interpretación de la solución en términos del problema y área de las disciplinas del contexto. Presentar una matemática descontextualizada.

Esta investigación se llevó a cabo con alumnos que culminaron el primer año de estudios de la carrera de Administración, es por ello que sólo se trabajarán los modelos matemáticos de primera y segunda generación en las dos primeras categorías.

A continuación se detallarán algunos aspectos de las categorías y modelos usados para escoger los problemas que fueron aplicados en esta investigación, se escogieron sólo los aspectos que se ajustan por trabajarse con alumnos que culminaron el primer año de estudios.

En cuanto a la clasificación de los modelos matemáticos se tienen (Camarena, 2002):

- Modelos de primera generación, cuando describen problemas primarios que no requieren expresiones matemáticas previamente elaboradas, en esta clasificación se identifican problemas de las ciencias básicas.
- Modelos de segunda generación, cuando requieren hacer uso de expresiones matemáticas ya elaboradas, como los modelos de primera generación, además, el área cognitiva que representan son las ciencias básicas de la Ingeniería (en nuestro caso: Administración). Para la categorización nos basamos en Olazábal (2005).

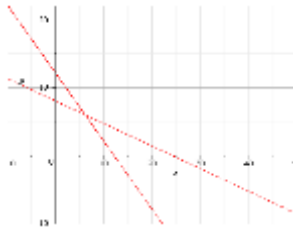
Tabla 2. Categorías de los problemas contextualizados

Primera categoría Problemas con enunciado literal	Son problemas cuyo enunciado expresa literalmente a los conceptos, situaciones, objetos y/o fenómenos y la relación entre ellos, para llegar al modelo matemático del problema. Para realizar la traducción es necesario conocer las representaciones algebraicas de los términos que se nombran en el mismo enunciado. Son problemas que con el tiempo se convierten en ejercicios para el alumno.
Segunda categoría Problemas con enunciado evocador	Son problemas cuyo enunciado no es suficiente para establecer el modelo matemático que permite resolverlo a través de las situaciones, objetos y/o fenómenos y las relaciones entre ellos que expresa literalmente, sino que son necesarios otros modelos que evoca el mismo enunciado, nombrándolos, describiéndolos o refiriéndose a ellos en forma indirecta. El modelo evocado sirve de puente entre la información del enunciado y la traducción final al modelo representativo del problema.

Fuente: Olazábal, 2005

Además, en nuestra investigación se hacen conversiones del registro verbal al algebraico y del registro algebraico al gráfico, tratadas conforme a la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas de Duval (1999), como lo muestra el cuadro 3 a seguir.

Tabla 3. Sistema de ecuaciones con dos variable

Registro Verbal	Registro Algebraico	Registro Gráfico									
<p>Un fabricante produce modelos I y II de lámparas. Durante la producción se requiere del uso de dos máquinas A y B. El número de horas necesarias para la producción de una lámpara está indicado en la siguiente tabla:</p> <table border="1" data-bbox="276 1559 815 1720"> <thead> <tr> <th></th> <th>Máquin a A</th> <th>Máquin a B</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Modelo I</td> <td>2</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>Modelo II</td> <td>2</td> <td>3</td> </tr> </tbody> </table> <p>Si cada máquina puede utilizarse 24 horas por día, ¿cuántas lámparas de cada modelo se producen al día?</p>		Máquin a A	Máquin a B	Modelo I	2	1	Modelo II	2	3	$\begin{cases} x + 3y = 24 \\ 2x + 2y = 24 \end{cases}$	
	Máquin a A	Máquin a B									
Modelo I	2	1									
Modelo II	2	3									

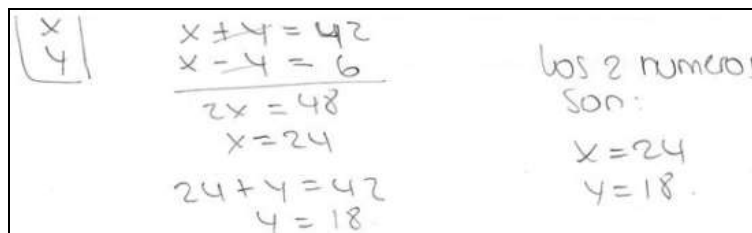
Aspectos metodológicos y análisis

Como es de nuestro interés enfocarnos en la Fase Didáctica de la MCC identificaremos los problemas contextualizados relacionados con un sistemas de ecuaciones lineales con dos variables presentes en el libro texto “Nivelación Matemática para Administradores”, usando la etapa central de la metodología de diseño de los Programas de estudios de las Ciencias básicas en Ingeniería-DIPCING. En esta etapa se hace un análisis de los contenidos de cada área básica, tanto explícitos como implícitos, en los cursos específicos de la ingeniería. En nuestra investigación, el análisis del contenido sistemas de ecuaciones lineales con dos variables se hará con base en el libro texto.

Se aplicó una prueba a un grupo de treinta y dos estudiantes, de ellos se escogieron sólo a aquellos estudiantes que habían llevado un curso previo de Matemática. Luego se dividió al grupo en tres subgrupos y a cada subgrupo se le entregó un paquete diferente de problemas para evitar que los alumnos se distraigan entre ellos con preguntas, sin embargo los problemas considerados en los tres paquetes fueron seleccionados del libro texto que utilizan los estudiantes en el primer ciclo de la carrera de Administración. Cada paquete incluye un problema de las dos primeras categorías y además un problema que nos permita identificar si realmente hubo un aprendizaje que les permita hacer uso del cambio de registros, del registro gráfico al registro algebraico. Los tres problemas están relacionados con el tema de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Estos problemas se le presentan ordenados según las mismas categorías.

Para el presente artículo mostramos sólo el paquete 1 con su respectivo análisis, considerando el desarrollo de la alumna Katherine en el primer problema y el desarrollo de la alumna Tiffany en el segundo problema.

Problema 1: Calcule dos números tales que su suma sea 42 y su diferencia sea 6. (Primera categoría). La figura 1 muestra el desarrollo de la pregunta realizado por la alumna Katherine.



The image shows a handwritten solution for a system of linear equations with two variables. On the left, the variables x and y are boxed. The equations are:

$$\begin{aligned} x + y &= 42 \\ x - y &= 6 \end{aligned}$$

The student uses the elimination method, adding the two equations to get:

$$\frac{2x = 48}{x = 24}$$

Then, they substitute $x = 24$ into the first equation to find y :

$$\begin{aligned} 24 + y &= 42 \\ y &= 18 \end{aligned}$$

On the right side, the student concludes: "los 2 números son: $x = 24$ and $y = 18$."

Figura 1. Desarrollo de Katherine

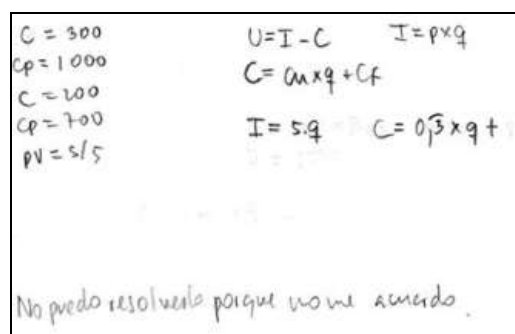
La alumna usó dos variables x e y , planteó las ecuaciones que se le pedía en el enunciado y pudo hallar dichos números. Para resolver el sistema que planteó, usó el método de eliminación. De acuerdo con la teoría, en la Fase Didáctica, para la modelación matemática se debe tener en cuenta: identificar variables y constantes del problema, establecer relaciones entre éstas a través de los conceptos involucrados en el problema y validar la “relación matemática” que modela al problema, para lo cual hay que regresar y verificar que involucre a todos los datos, variables y conceptos del problema.

Katherine no completó toda la Fase Didáctica porque no logró definir sus variables ni validó la relación matemática que modelaba al problema. Ella sólo logró establecer la relación entre las variables, es decir logró hacer la conversión del lenguaje verbal al matemático, ya que ella expresa: $x+y=42$ y $x-y=6$ (ver figura 2) lo que nos indica que hace un tránsito del lenguaje natural al matemático. Además se observa que la alumna no verificó si su respuesta es correcta o tiene sentido la solución encontrada, lo que identifica que no se consiguió la traducción del lenguaje matemático al natural de acuerdo con Duval (1999).

Problema 2: La empresa TK planea fabricar y vender un nuevo modelo de lapiceros. El costo de producir 300 lapiceros es S/.1 000 y el costo de producir 200 lapiceros es de S/.700. Cada unidad será vendida a S/. 5 (segunda categoría)

- Determine la ecuación del Costo total, Ingreso y Utilidad, en términos del número de lapiceros fabricados y vendidos.
- Grafique las ecuaciones encontradas en la parte anterior.

La figura 2 muestra el desarrollo realizado por la alumna Tiffany.



Handwritten work by Tiffany:

$$C = 300$$

$$C_p = 1000$$

$$C = 200$$

$$C_p = 700$$

$$P_v = 5/5$$

$$U = I - C$$

$$I = p \times q$$

$$C = a_n \times q + C_f$$

$$I = 5 \cdot q \Rightarrow C = 0,3 \times q +$$

No puedo resolverlo porque no me acuerdo.

Figura 2. Desarrollo de Tiffany

En este problema, el objetivo era que el estudiante logre comprender el significado de los términos para la traducción con evocación, pues los modelos matemáticos son:

- $C_T = C_f + C_v$

- $I = P_v \times q$
- $U = I - C_T$

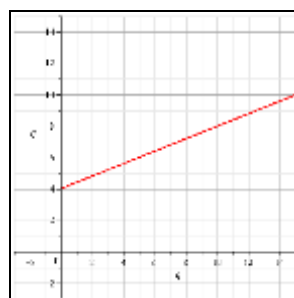
Y además esperábamos que hicieran el conversión del registro algebraico al registro gráfico, pero esto se podía lograr sólo si hacían la parte a).

Tiffany, no pudo reconocer que en el problema no se le indicaba costo fijo ni costo por unidad y que los datos proporcionados eran puntos de paso de la función costo porque en su desarrollo muestra un tratamiento en el registro algebraico equivocado, se esperaba que pudiera hallar dicha función ya que se le enseñó a determinar la ecuación de una recta utilizando dos puntos de paso. Sin embargo, recordó los modelos matemáticos que estaban en juego y logró modelar la función ingreso. Tampoco realizó la gráfica que se le pedía ya que no tenía las funciones para graficarlas.

De acuerdo con la teoría, en la Fase Didáctica, Tiffany no pudo traducir el problema contextualizado, del lenguaje verbal al algebraico, pues no logró: ni identificar las variables, ni establecer una relación entre las variables.

La alumna colocó un comentario: “*No puedo resolverlo porque no me acuerdo*”, lo que nos indica que trata de recordar en vez de razonar.

Problema 3: El gráfico mostrado representa la ecuación costo total de la producción de un determinado artículo, si dicho artículo se vende a \$8 cada uno:



- Determinar la ecuación del costo total.
- Determinar y graficar la ecuación del ingreso.

Este problema se presenta en el lenguaje gráfico para que los estudiantes hicieran la conversión al lenguaje algebraico; es decir, dadas las gráficas de las funciones costo, ingreso y utilidad se esperaba que los estudiantes pudieran determinar las ecuaciones de cada función pedida pero no lograron hacer dicha conversión, lo que nos indica de acuerdo con Duval (1999), que no hubo un aprendizaje ya que los estudiantes no hicieron los cambios de registros de ida y regreso.

Algunas reflexiones

Se pudo observar en este análisis que los alumnos no validan la relación matemática que modela al problema, ni verifican o interpretan los resultados.

Esto se observa en el desarrollo de Katherine, donde todo el desarrollo parece mecánico sin la verificación ni la interpretación de sus resultados.

También observamos que a medida que aumenta la categoría de los problemas contextualizados, el número de estudiantes que entienden y traducen del lenguaje natural al matemático, dichos problemas, disminuye. Esta conclusión es porque se observó que la mayoría de alumnos hicieron los problemas de la primera categoría pero ya no hicieron los problemas de la segunda categoría.

Además pudimos constatar, como lo establece la MCC, que el conocimiento del contexto juega un papel primordial para el éxito de la resolución de situaciones contextualizadas.

Referencias bibliográficas

- Camarena, P. (2002). La Matemática en el Contexto de las Ciencias y los Modelos Matemáticos. *Memorias del 3º Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas*, México.
- Camarena, P. (2000) La Matemática en el Contexto de las Ciencias: Modelo Didáctico. Red Internacional de Investigación MACOCIENCIAS. En Camarena et al. IPN (Eds.). *La Matemática en el Contexto de las Ciencias*. México: ESIME-IPN.
- Camarena G. Patricia (2000). *Reporte del proyecto de investigación titulado: Etapas de la matemática en el contexto de la ingeniería*. México: ESIME-IPN.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Bogotá, Colombia: Universidad del Valle.
- Neira, V. (2012). *Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables: traducción de problemas contextualizados del lenguaje verbal al matemático con estudiantes de ciencias administrativas*. (Tesis de maestría) Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Olazábal, A. (2005). *Categorías en la traducción del lenguaje natural al algebraico de la matemática en contexto*. México: ESIME-IPN.