

CREENCIAS DE PROFESORES SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN LINEAL EN EL CONTEXTO DE UNA FACULTAD DE INGENIERÍA

Viviana Angélica Costa
vacosta@ing.unlp.edu.ar

Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, Argentina

Tema: III.3 - Educación Matemática en Contexto (Etnomatemática)

Modalidad: CB

Nivel educativo: Terciario - Universitario

Palabras clave: creencias profesores, movimiento armónico simple, ecuaciones diferenciales

Resumen

En este trabajo se describen las creencias de un grupo de profesores universitarios sobre la enseñanza de las ecuaciones diferenciales de segundo orden lineal (EDO) y su vinculación con el movimiento armónico simple (MAS). El MAS es uno de los movimientos idealizados más importante, pues constituye una buena aproximación a muchas de las oscilaciones que se dan en la naturaleza y es muy sencillo de describir matemáticamente. Esta investigación es parte de una más amplia que busca articular en la enseñanza en carreras de ingeniería los tópicos mencionados, con el objetivo de vincular significativamente los conceptos en estudio y lograr una visión global del tema. Se trata de un estudio de casos en el que participaron seis profesores de matemáticas de cursos en los que se estudian las EDO. Los datos fueron obtenidos a partir de una encuesta con preguntas abiertas. Se presenta un análisis de la encuesta. Los resultados muestran que las creencias que tienen este grupo de profesores acerca de la enseñanza de las EDO y su vinculación con el MAS está fuertemente ligado a la formación profesional de cada uno de ellos.

Introducción

En esta investigación analizamos las creencias de un grupo de profesores de una asignatura de matemática del ciclo básico en una facultad de ingeniería sobre cómo enseñan a sus estudiantes las ecuaciones diferenciales de segundo orden lineal (EDO) y su vinculación con situaciones físicas, en particular con el movimiento armónico simple (MAS). El MAS es uno de los movimientos idealizados más importante de la física, pues constituye una buena aproximación a muchas de las oscilaciones que se dan en la naturaleza y es muy sencillo de describir matemáticamente. Esta investigación es parte de una más amplia que busca articular en la enseñanza en carreras de ingeniería los tópicos mencionados con el objetivo de vincular significativamente los conceptos en estudio y lograr una visión global del tema (Costa, Bordogna y Torroba, 2011).

Marco teórico

En la actualidad, los procesos de enseñanza y aprendizaje están poniendo cada vez más las miradas en la práctica docente y en el rol del profesor en el aula. Por ello la importancia de conocer las creencias de los profesores en cuanto a la enseñanza de la matemática se refiere y en cómo éstas influyen con esos procesos.

Siguiendo a Gomes Chacón (2007) tomamos la definición de creencias de García, Azcárate y Moreno (2006). Según estos autores *“las creencias son ideas poco elaboradas, generales o específicas, que forman parte del conocimiento que poseen las personas e influyen de manera directa en su desempeño”*. Es importante señalar que las creencias de los profesores son tan relevantes como sus conocimientos, por tanto es importante estimular investigaciones que permitan una mayor comprensión de las mismas. Además conocer las creencias de los profesores entorno a la enseñanza es útil para iniciar procesos de cambio. Pues, debe considerarse que las personas no siempre son conscientes de sus creencias y que las mismas pueden cambiar con el tiempo y están ligadas a lo afectivo (Flores, 1996).

Marco institucional

La investigación se lleva a cabo en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata (FI UNLP). En FI se dictan 12 especialidades: Aeronáutica, Agrimensor, Civil, Computación, Mecánica, Electricista, Electromecánica, Electrónica, Industrial, Química, Hidráulica y Materiales. Las asignaturas están distribuidas en tres Áreas: Área Básica (CB), conformada por las asignaturas de física, matemática y química; el Área Tecnológica Básica (TB), el Área Tecnológica Aplicada (TA) y un Área complementaria (CO) específica para cada carrera. Los contenidos que se estudian en CB en el área de Matemática son distribuidos en las asignaturas: Matemática A (1er semestre): Cálculo Diferencial en una y varias variables; Matemática B (2do semestre): Series Numéricas, Cálculo Integral en una y varias variables, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden y Cálculo Vectorial; Matemática C (3er semestre): Series de Potencias, Algebra Lineal, Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias y Matemática D (4to semestre): Cálculo Avanzado. Cálculo Numérico se dicta en el cuarto semestre y Probabilidades y Estadística en el tercer y cuarto semestre. Los temas de Geometría Analítica son distribuidos en las asignaturas antes mencionadas.

En el Área de Física, los contenidos se distribuyen en tres asignaturas: Física I, en el segundo semestre, Mecánica; Física II, en el tercer semestre, Electricidad, Magnetismo,

Electromagnetismo; y Física III, en el cuarto semestre, Óptica, Termometría y Calorimetría.

En la FI, las EDO se enseñan en Matemática C (MC), y el MAS se enseña en el curso de Física I, un semestre anterior. Las EDO son vitales en física, sobre todo en relación con vibraciones y con la teoría de circuitos eléctricos. En MC, los alumnos abordan el estudio de las EDO utilizando conceptos del Algebra Lineal. Se estudia la ecuación diferencial lineal de segundo orden: $x''(t)+p(t)x'(t)+q(t)x(t)=r(t)$, donde $p(t)$, $q(t)$ y $r(t)$ son funciones de la variable independiente t , en el marco de los conceptos de Espacios Vectoriales. Para el caso en que esa ecuación posee coeficientes constantes y es homogénea, $x''(t)+ax'(t)+bx(t)=0$, la solución general se expresa como una combinación lineal de dos soluciones linealmente independientes. La ecuación antes mencionada en el caso que la constante a es cero, donde $\omega^2=b$, es $x''(t)+\omega^2x(t)=0$, y su solución general se expresa, $x(t)=c_1 \cos(\omega t)+c_2 \sin(\omega t)$. Esta última ecuación diferencial, representa al MAS. En el contexto de Física I, se halla experimentalmente su solución pero de la forma $x(t)=A \cos(\omega t+\varphi)$, donde A y φ son constantes. Mediante pasos algebraicos es posible mostrar que las expresiones de las soluciones encontradas en MC y en Física I son iguales, existiendo una relación entre los pares de constantes (c_1, c_2) y (A, φ) (Henry, 2008). En general en los cursos de MC, no se muestra esta relación.

Objetivo y Metodología

El objetivo de esta investigación es el de caracterizar las creencias de un grupo de profesores sobre la enseñanza de las EDO y principalmente si lo vinculan con situaciones de la física, en particular con el MAS, en las clases de MC.

El instrumento para conocer las creencias de este grupo de profesores es una encuesta con cinco preguntas abiertas. Los resultados de la encuesta son analizados cualitativamente.

Los profesores encuestados, son seis. Todos enseñan la asignatura MC, desde por lo menos hace 10 años. Llamaremos a los profesores: P1, P2, P3, P4, P5 y P6. Los profesores P1, P2 y P3, son licenciados en matemática y han realizado estudios de posgrados en áreas del Análisis Numérico y Simulación. Los otros tres profesores, P4, P5 y P6, son licenciados en física y poseen títulos de doctorado.

El protocolo de la encuesta es el siguiente:

	Pregunta
--	----------

1	¿En sus clases cuando se expone el tema de ecuaciones diferenciales de segundo orden lineal, $x''(t)+p(t)x'(t)+q(t)x(t)= r(t)$, la vinculan o hacen referencia a alguna situación física que la represente? ¿Cuál?
2	¿Durante el desarrollo de este tema, los alumnos lo asocian a alguna situación física vista anteriormente? ¿Cuál?
3	¿Utilizaron en sus clases algún software para visualizar soluciones? ¿Le asociaron alguna interpretación física?
4	¿Vincula en sus clases la ecuación $x''(t)+\omega^2x(t)=0$ con el movimiento armónico simple dado en Física I? (En Física I, segundo semestre del primer año, se propone como solución a: $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ e interpretan físicamente las constantes A y ϕ)
5	¿Usted cree que es importante para el alumno, realizar estas vinculaciones?

Resultados de la encuesta

Presentamos las respuestas de los profesores para cada una de las preguntas.

Pregunta 1

P1: Empezamos con el caso más sencillo: ya que en Matemática A vieron que conociendo la aceleración de una partícula pueden hallar la expresión de la función posición $x(t)$. Usamos esa situación porque en Matemática A ya trabajamos llevando la búsqueda de la solución de la ecuación a un sistema y mostramos que resolver la ecuación de orden superior es en realidad resolver un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden y además porque en ese momento también quedó claro que en principio hay infinitas soluciones pero que estableciendo dos condiciones se puede encontrar la única solución del problema. Esta situación es usada como problema disparador del tema.

P2: NO, en general cuando empiezo el tema de sistemas de ecuaciones diferenciales lo presento con alguna aplicación. Luego solo menciono el sistema masa-resorte que menciona la Guía. En general en el parcialito pongo un problema (por ejemplo predador-presa para resolver donde se desea calcular las poblaciones), en el que pueda darse una interpretación a las soluciones del sistema.

P3: En general, presento la aplicación a vibraciones, con y sin amortiguamiento, que se encuentra en algunos libros de Cálculo

P4: SI, oscilador armónico simple, amortiguado y forzado

P5: En las clases comento el ejemplo de la partícula colgada de un resorte en un medio viscoso, que corresponde a la ecuación anterior para $p(t)=g/m>0$, $q(t)=w^2>0$ y $r(t)=0$ o cte. Se comienza en realidad con el caso armónico ($g=0$) y luego el amortiguado, con los tres casos (sobre amortiguado, crítico y oscilatorio amortiguado). Luego damos el caso anterior pero forzado, es decir sujeto a una fuerza externa $f(t)$, que corresponde a $r(t)=f(t)/m$. Y discutimos especialmente el caso armónico $r(t)=A\cos(\omega t+\phi)$. Se explican además las enormes ventajas de tratar el caso anterior en forma compleja, comentando asimismo que es la forma estándar de trabajar tanto en ingeniería como en física. Finalmente, discutimos la estructura de la solución en el caso general con $p(t)$ y $q(t)$ variable, que se interpreta como generalización del sistema anterior. Se explica además que la misma ecuación representa el circuito eléctrico LCR (inductancia-capacitor-resistencia) con voltaje aplicado.

P6: Sí, siempre recordamos las ecuaciones de movimiento de los cuerpos que se deducen de la Ley de Newton, en particular la ecuación del oscilador armónico.

Pregunta 2

P1: Suelen asociarlo al tema del resorte. Sin embargo el año que se intentó usar esta situación como problema disparador, el recordar la situación física y adaptarla al lenguaje usado hizo que se perdiera el espíritu de problema disparador. Igualmente una vez avanzado el tema algunos alumnos suelen asociarlo a lo dado en Física, pero muy tangencialmente.

P2: NO

P3: Después de dar la aplicación masa-resorte, ahí recuerdan lo dado en Física I.

P4: Leyes de la mecánica de Newton (ej. Osciladores y péndulos)

P5: Asocian muy bien con el problema de la partícula colgada de un resorte, pero con respecto al circuito eléctrico depende del caso (en algunos años no estudiaron aun el tema en física II)

P6: Antes de ver ecuaciones diferenciales de segundo orden u orden superior, tenemos que formalizar sistemas de ecuaciones diferenciales y motivar el por qué es importante conocer la teoría que nos permite resolver y asegurar existencia y/o unicidad de la solución. Entonces empiezo las clases de sistemas de ecuaciones diferenciales presentando el problema de una partícula de carga q en presencia de un campo magnético uniforme en la dirección z , al plantear las ecuaciones de movimiento, inmediatamente uno se da cuenta de que tiene que resolver un sistema de ecuaciones diferenciales. También planteo el problema de tanques con soluciones con diferentes

concentraciones, pero me gustaría encontrar otro problema que derive, por ejemplo de química que también involucre sistemas de ecuaciones, pero es difícil, ya que la mayoría de los problemas que conozco involucran derivadas parciales.

Pregunta 3

P1: NO usamos software. Para el caso de sistemas llevé impresas las gráficas de las trayectorias que eran la solución de distintos sistemas para mostrar la relación entre los autovalores de la matriz y la gráfica de la trayectoria. Me parece que habría que dedicarle tiempo a trabajar con software pero dado lo ajustado de los tiempos y la situación de la disponibilidad de máquinas.

P2: Sólo muestro como graficar las soluciones en un ejemplo usando Matlab.

P3: Si las clases lo permiten, en cuanto a tiempo y cantidad de alumnos se refiere, graficamos y obtenemos la solución para algún problema en particular usando Maple.

P4: NO

P5: SI, con Matlab y les he mostrado simulaciones hechas con Mathematica

P6: NO, nunca. Trato de que los alumnos visualicen ellos las soluciones.

Pregunta 4

P1: NO, pero realmente me parece una situación más que interesante para darle sentido a las ecuaciones que llevan a autovalores complejos y dar una interpretación sobre un hecho concreto.

P2: NO

P3: NO

P4: SI

P5: Como mencioné arriba, este es el caso con el cual comienzo el tema, tratando además el caso forzado $x''(t)+kx(t)=f(t)$ y discutiendo especialmente el caso de fuerza oscilante $A\cos(\omega t)$ o $\text{Re}[A\exp[i\omega t+\phi]]$ y en particular el fenómeno de resonancia (Este último muy importante y que justamente pueden entender muy bien con los métodos que están aprendiendo).

P6: Doy, como aplicación de lo que aprendimos, el caso del movimiento armónico: simple, forzado y amortiguado. Empiezo planteando la ecuación diferencial del caso más general, discutimos el significado de los autovalores de la matriz del sistema, la forma general de las soluciones, y después analizamos cada caso por separado, el caso simple, el amortiguado (por ejemplo si hay roce) (incluyendo el sobreamortiguado), y el caso forzado (con fuerza externa), y para este caso vemos lo que es resonancia. En el caso del oscilador armónico simple, no escribo la solución como un seno y una fase,

sino como combinación lineal de seno y coseno, con constantes a determinar a partir de las condiciones iniciales. También les doy la idea de lo que pasaría con osciladores acoplados, trato de que vean cómo quedan las ecuaciones y les cuento qué representan entonces los autovalores de la matriz del sistema.

Pregunta 5

P1: SI. Creo que la articulación con las otras materias es fundamental y las vinculaciones de los problemas planteados con situaciones reales que se modelizan siguiendo las propuestas enseñadas debieran ser mostradas en las materias.

P2: Muy importante, y estaría de acuerdo en incorporarlas!!!

P3: Si. Es importante que el alumno vincule los conceptos adquiridos tanto en el área de física como en el área matemática pudiendo aplicarlos en otros contextos.

P4: SI

P5: SI, para motivar el interés y entender las soluciones. Pero también es importante que vinculen el tema con lo que estudiaron antes en MC, es decir, con operadores Lineales y espacios Vectoriales, que es el tema dominante del curso, y enfatizar las muy ventajosas propiedades fundamentales derivadas de la linealidad. Por eso es también conveniente comenzar con sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de 1er orden, y luego mostrar que las ecuaciones lineales de 2º orden y orden n en general se pueden ver también como sistemas de 1er orden.

P6: Sí, desde mi punto de vista, todos los alumnos necesitan conectar lo que ven en las matemáticas con los problemas derivados de la física o la ingeniería que resuelven.

Análisis de la encuesta

De las respuestas inferimos lo siguiente. En relación a la pregunta 1, los profesores P3, P4, P5 y P6, expresan que cuando enseñan las EDO lo vinculan con situaciones físicas. Mencionan el oscilador armónico simple, amortiguado y forzado y uno de ellos además menciona el circuito eléctrico LCR. De estos cuatro profesores, tres de ellos son licenciados en física. En relación a la pregunta 2, cuatro de los seis profesores, mencionan que los alumnos suelen asociar el tema de estudio (EDO) con el sistema masa-resorte, estudiado previamente en los cursos de Física I. En relación a la pregunta 3, tres profesores mencionan que no utilizan software para graficar las soluciones obtenidas, uno de ellos si, y el resto según sea si los tiempos de clase se lo permiten. En relación a la pregunta 4, sólo los tres profesores licenciados en física son los que vinculan en sus clases la ecuación $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$ con el movimiento armónico

simple estudiado en Física I. En relación a la pregunta 5, todos los profesores expresan lo importante para el alumno vincular las EDO con la física e ingeniería.

Conclusiones

En el contexto de una facultad de ingeniería, a partir de una encuesta realizada a seis profesores que enseñan las EDO en un curso de Algebra Lineal, analizamos las creencias que tienen acerca de la enseñanza de las EDO y su vinculación con el MAS. Del análisis antes expuesto, observamos que la enseñanza de las EDO por parte de ese grupo de profesores, está fuertemente ligado a la formación académica de cada uno de ellos. Los profesores que poseen título académico de licenciados en física enseñan las EDO vinculando el tema con diversas situaciones de la física, oscilador armónico simple, amortiguado y forzado, el efecto de resonancia y los circuitos eléctricos LCR (inductancia-capacitor-resistencia). Todos los profesores creen que es importante para el estudiante vincular los conceptos adquiridos, en matemática y física, y aplicarlos en otros contextos. Sin embargo, no todos ellos contextualizan la enseñanza de las EDO en sus clases. Además, algunos de los profesores creen importante en la enseñanza de las EDO, motivar su estudio con conceptos adquiridos en materias previas a MC (Matemática A y B), y con los operadores lineales y espacios vectoriales, tema dominante del curso MC.

Referencias

- Costa V. A., Bordogna C. M. y Torroba P. L. (2011). *El movimiento armónico simple y las ecuaciones diferenciales de segundo orden lineal: su articulación en la enseñanza*. Primeras Jornadas de Investigación y Transferencia. 1ª. Ed. La Plata. Universidad Nacional de La Plata. Disponible en: <http://www.ing.unlp.edu.ar/investigacion/archivos/jornadas2011/cb04.pdf>
- Flores, P. (1996). Creencias y concepciones de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 8, 103-111.
- García L., Azcárate C. y Moreno M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 9(1), 85-116. Disponible en <http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=33590105&iCveNum=3968>
- Gómez-Chacón, I. (2007). Sistema de creencias sobre las matemáticas en alumnos de secundaria. *Revista Complutense de Educación*. 18 (2), 125-143. Disponible en <http://revistas.ucm.es/edu/11302496/articulos/RCED0707220125A.PDF>
- Henry, R. (2008). *Ecuaciones diferenciales: una introducción moderna*. Editorial Reverte.