

MODELIZACIONES ECONÓMICAS FUNDAMENTADAS EN EL ANÁLISIS MARGINAL

Sandra Noemí Franco, María Rosa Rodríguez, Gustavo Ariel Sota

Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Tucumán. Argentina
mrrodriguez@face.unt.edu.ar, sandranfranco@hotmail.com, gustavosota1@hotmail.com

Resumen

La modelización matemática explica fenómenos económicos que interpretan la realidad social y aporta la estructura conceptual necesaria para obtener predicciones válidas. El Análisis Marginal estudia la generación de utilidades en una empresa en función de los aportes individuales de cada producto, tangible o intangible, elaborado y vendido. El objetivo de este trabajo es mostrar el uso y la importancia del Análisis Marginal en la toma de decisiones que permitan lograr el máximo beneficio posible frente a cambios en las contribuciones marginales y en cuánto podrían aumentar las ventas si se aplica disminución de los márgenes de marcación o mark up.

Introducción

La Matemática en las Ciencias Económicas es la herramienta fundamental que permite adquirir y consolidar el conocimiento. Se debe fundamentalmente a que obliga a definir claramente las variables de interés en cada problema, a establecer las hipótesis sobre su comportamiento y a definir las relaciones entre ellas. El lenguaje matemático permite explicar los fenómenos económicos y formular modelos que interpretan la realidad social. Estos modelos aportan la estructura conceptual necesaria para obtener predicciones de validez general y su utilización facilita que los conocimientos adquiridos puedan transmitirse con precisión. Cuanto mayor sea la posibilidad de medir sus variables de interés y de establecer reglas generales sobre las relaciones entre ellas, mayor será su contenido matemático.

En el quehacer económico, las decisiones que toman los empresarios son fundamentales para optimizar el beneficio de una empresa. Aquí reside la importancia del desarrollo del pensamiento lógico-formal para la resolución de situaciones problemáticas mediante algoritmos, procesos lógicos, estimación de resultados, la construcción de modelos matemáticos y la utilización de procedimientos del cálculo.

Para optimizar decisiones empresariales se recurre al Análisis Marginal, cuya finalidad es estudiar la generación de utilidades en una empresa, en función de los aportes individuales de cada producto tangible o intangible (servicio) elaborado y vendido. En consecuencia, el Análisis Marginal es una herramienta útil para la toma de medidas de producción y es aplicable con éxito para tomar cualquier decisión sobre costos y precios en el ámbito económico. Modeliza situaciones que precisan los diferentes niveles de producción que persigue el empresario a fin de lograr mayor rentabilidad en función del capital invertido.

Dichas decisiones serán racionales y convenientes sólo si el beneficio excede el costo adicional de hacerlo.

El objetivo de este trabajo es mostrar el uso y la importancia del Análisis Marginal en la toma de decisiones que permitan lograr el máximo beneficio posible frente a cambios en las contribuciones marginales y frente a aumentos en las ventas si se aplican rebajas sistemáticas de precios o disminuciones de márgenes de marcación o Mark up.

Para determinar la relación óptima entre costos y beneficios se analizan los efectos que producen sucesivas modificaciones en los valores de los parámetros intervinientes, apelando a modelos matemáticos sencillos.

Con este trabajo se procura dar sentido y contextualizar los conceptos, a través de modelos matemáticos que aportan valiosa información y conducen de manera rápida y precisa a importantes decisiones e interpretaciones económicas.

Fundamentación. Relaciones Costo – Beneficio

Según el comportamiento de los costos ante cambios en el nivel de actividad existen:

1. **Costos Fijos, Constantes o Estructurales:** son aquellos costos totales que se mantienen más o menos constantes ante cambios en el nivel de actividad. No depende del nivel de producción y/o ventas de la empresa. Es una cantidad determinada, independiente del volumen del negocio.
2. **Costos Variables:** son aquellos costos que aumentan o disminuyen frente a cambios en el nivel de actividad. Dependen del volumen de producción y/o ventas de la compañía. Si la producción fuera nula, estos costos serían prácticamente cero.

Toda empresa tendrá una serie de costos fijos y de costos variables. Incluso algunos costos que son fijos para una, pueden ser variables para otra y viceversa.

Esta clasificación de los costos no es absoluta. Algunos se mantienen constantes, mientras que otros experimentan modificaciones al pasar de un nivel de producción a otro. En cualquier caso, existen modificaciones en los costos.

El costo total es la suma del costo fijo total más el costo variable total y se expresa:

$CT = CF + cv \cdot Q$ donde el costo variable total es el producto entre el costo variable unitario (cv) y la cantidad producida (Q).

Las situaciones comerciales más significativas se presentan cuando los empresarios adoptan las decisiones más ventajosas, a fin de lograr mayores beneficios, utilidades o rentas.

El costo-beneficio es una lógica basada en el principio de obtener los mejores resultados al menor esfuerzo invertido. Si los beneficios superan el costo son exitosos, caso contrario fracasan.

El análisis de costo-beneficio es una técnica importante dentro de la teoría de la decisión. Determina la ventaja de un proyecto de inversión mediante la valoración posterior de sus costos y beneficios, con el fin de evaluar su rentabilidad. El proyecto puede consistir en el desarrollo de nuevos productos o cambios en los niveles de producción de un negocio.

El beneficio o utilidad es: $B = I - CT$ donde el ingreso I es la cantidad que recibe una empresa por venta de productos o servicios.

Siendo pv el precio de venta unitario: $B = pv \cdot Q - (CF + cv \cdot Q)$ entonces
 $B = (pv - cv) \cdot Q - CF$

Una herramienta central de la investigación económica es conocida como Análisis Marginal, que estudia el cambio en los costos y beneficios frente a cambios en las acciones. La cuestión central en el Análisis Marginal es que los beneficios esperados de la acción superen el costo añadido. Se recurre a este análisis cuando se presentan modificaciones en los costos fijos, en los costos variables unitarios o en los precios de venta. O sea, cuando existen cambios en alguno de los términos de la expresión del Beneficio.

El factor $cm = pv - cv$ recibe el nombre de contribución marginal unitaria de un producto y muestra el modo en que contribuyen los precios de los productos o servicios para cubrir los costos fijos y generar utilidad, que es la finalidad de una empresa.

El producto de la contribución marginal unitaria por el número de unidades producidas o vendidas da la contribución marginal total (CM) del producto.

Como $B = cm \cdot Q - CF$ entonces $B = CM - CF$ y se pueden dar las siguientes alternativas:

1. Si la contribución marginal total contribuye a absorber el costo fijo, deja un "margen" para la utilidad o beneficio. $CM > CF$ entonces $B > 0$
2. Cuando la contribución marginal total es igual al costo fijo, no deja ganancia y la empresa está en su punto de equilibrio. No gana ni pierde y su beneficio es nulo. $CM = CF$ entonces $B = 0$
3. Cuando la contribución marginal total no alcanza a cubrir los costos fijos, la empresa puede seguir trabajando en el corto plazo ya que la contribución marginal absorbe parte de los costos fijos. En este caso la actividad da resultado negativo. $CM < CF$ entonces **Pérdida**
4. La situación más crítica se da cuando la contribución marginal unitaria es negativa. En este caso extremo, se debe tomar la decisión de no continuar con la elaboración de un producto o servicio. $cm < 0$ o sea $pv < cv$

El concepto de contribución marginal es muy importante en las decisiones de mantener, retirar o incorporar nuevos productos de una empresa, por la incidencia que tienen en la

absorción de los costos fijos y la capacidad de generar utilidades. Es importante relacionar la contribución marginal unitaria de cada artículo con las cantidades vendidas porque una empresa puede tener productos de alta rotación con baja contribución marginal, pero la ganancia total que generan supera ampliamente la de otros artículos que tienen mayor contribución marginal unitaria pero menor venta y menor ganancia total.

Al sumar la contribución marginal de todos los productos de una línea o unidad de negocios, se obtiene la de esa unidad y al sumar la contribución marginal de todas las líneas o unidades de un negocio, se obtiene la de la empresa.

Cuando se producen cambios en los costos variables unitarios y en los precios de venta unitarios, el estudio se reduce a las modificaciones en la contribución marginal unitaria. Esta puede disminuir o aumentar por diversas razones. La disminución se debe, especialmente cuando existe aumento de los costos variables unitarios o disminuciones de los precios de venta, que afecta a toda la actividad o por tramos.

Desarrollo

Contribuciones marginales decrecientes

Si no se modifican los costos fijos, pueden sufrir cambios alguno de los otros parámetros. Estos cambios se producirían en los costos variables unitarios o en los precios de venta.

El aumento en los costos variables unitarios puede deberse a incrementos en el costo de incentivos a la producción. Una disminución de los precios de venta puede obedecer a la apertura de nuevos mercados mediante ofertas de menores precios justificados por rebajas sistemáticas o a clientes que compran en grandes cantidades.

Existen diversos argumentos que originan una disminución en la contribución marginal unitaria.

Las modificaciones pueden afectar a toda la actividad con la misma magnitud o bien afectar a distintos tramos de la actividad con magnitudes diferentes para cada tramo.

Aumento del costo unitario

Se analiza el caso de la toma de decisiones sobre la producción de un artículo en una empresa cuando varía el costo variable unitario debido a diversos incentivos que otorgan los directivos a sus operarios, manteniéndose fijo el precio de venta. Se quiere conocer si se incrementa el beneficio para la empresa, aumentando la producción.

Sea la empresa cuyos costos fijos son de \$70.000 mensuales y el precio de venta de su producción es de \$250 cada unidad. El costo variable unitario se compone de \$100 de materia prima más un incentivo a la producción cuyo valor por unidad producida aumenta cada vez que son superadas las 400, 700 y las 1000 unidades. La producción varía de acuerdo al siguiente cuadro:

Cuadro N°1 – Comportamiento de los Parámetros frente a Cambios en la Contribución Marginal

Tramos	Unidades		Costos Variables			Precio de Venta (pv)	Contribución marginal (cm)
	Desde	Hasta	Materia Prima	Incentivo	Total (cv)		
1	1	400	100	20	120	250	130
2	401	700	100	40	140	250	110
3	701	1000	100	60	160	250	90

Como el **pv** no experimenta cambios y los **cv** aumentan entonces las **cm** decrecen.

El Punto de Equilibrio (o punto muerto o punto de ruptura) es el nivel de actividad en el cual la empresa no tiene beneficios ni pérdidas. Es un punto crucial en el nivel y por lo tanto requiere mucha atención por parte de los directivos.

Para determinar si se puede lograr beneficio en cada tramo, se calculan los Puntos de Equilibrio en cada uno:

$$Q_1 = \frac{70000}{130} = 539 \qquad Q_2 = \frac{70000}{110} = 636 \qquad Q_3 = \frac{70000}{90} = 778$$

Se observa, que el Punto de Equilibrio del primer tramo, correspondiente a 539 unidades, no es posible porque la **cm** ya no es de \$130 sino sólo de \$110. En el segundo tramo es de 636 unidades que corresponde a la **cm** de \$110; por lo tanto este Punto de Equilibrio existe en la realidad de la empresa. En el último tramo, el Punto de Equilibrio es de 778 unidades y también es un dato real porque la **cm** es realmente de \$90.

Por lo tanto, la empresa no puede operar en el primer tramo porque sólo obtendría quebrantos, mientras que en los siguientes tramos el beneficio sí es posible.

En el segundo tramo el máximo nivel de actividad es de 700 unidades con una contribución marginal unitaria de \$110 por lo tanto su beneficio es: $B_2 = 700 * 110 - 70000 = \7000

Es importante conocer si aumenta el beneficio de la empresa en el tercer tramo. Para ello se recurre a la expresión $Q = \frac{B + CF}{cm}$ donde varía la contribución marginal unitaria en este

tramo, sin modificarse el costo fijo. Por lo tanto $Q_{n3} = \frac{B_2 + CF}{cm_3} = \frac{7000 + 70000}{90} = 856$

Cuando varía la contribución marginal unitaria, se presenta la producción en tres tramos, acorde a un costo variable unitario que aumenta, manteniendo constante el precio de venta que lleva a una contribución marginal unitaria que disminuye. En el análisis, se calcularon los Puntos de Equilibrio y el posible beneficio en cada tramo, con el fin de examinar la conveniencia del aumento de la actividad. En el primer tramo la empresa tiene pérdidas y

no le conviene operar; mientras que, en los dos siguientes sí logra beneficios que son considerados para decidir la producción necesaria para alcanzar el máximo beneficio. Así, resulta que sólo convendrá aumentar la actividad para pasar al tercer tramo si se supera la producción de 856 unidades, pues es en este nivel donde se recupera el máximo beneficio posible dentro del segundo tramo.

Rebaja del precio de venta por margen de marcación (Mark up)

Margen o Márgenes es una palabra que se oye mucho en los negocios y tiene distintos significados según quién lo conceptualice. Por lo general está relacionado con el concepto de ganancia en la venta. El más sencillo es el margen de marcación o mark up, que es una estrategia de fijación y ajuste de precios.

En este caso se tiene un negocio que vende carteras para damas y está analizando la posibilidad de generar más ventas con mayor rentabilidad. Los comerciantes casi siempre fijan sus precios considerando el costo de adquisición más el margen de marcación (mark up). Si un comerciante compra a sus proveedores cada cartera a \$1.000 y le aplica un mark up del 100%, significa que la venderá a \$2.000. Esto es costumbre en la mayoría de los negocios.

Es un caso de contribuciones marginales decrecientes por tramos porque la empresa hace un estudio de mercado que le permite estimar cuánto podrían aumentar sus ventas si aplica rebajas sistemáticas de precios. Esto se traduce en una disminución de los márgenes de marcación, en vez de 100%, un 90% y luego un 80%. Lo interesante del problema es que determina el nivel de ventas mínimo que se debe lograr para aplicar una rebaja de precio con mark up del 90% y luego cual sería el nivel de ventas mínimo a alcanzar para que justifique aplicar un mark up del 80%.

Una marroquinería vende principalmente carteras para damas con costos fijos mensuales de \$200.000, está evaluando la posibilidad de aumentar sus ventas a través de una política apoyada en ofertas sistemáticas a precios rebajados. Actualmente su margen de marcación sobre los costos de adquisición es del 100% y su venta total mensual asciende a \$500.000. Algunos estudios de mercado le permiten estimar las siguientes posibilidades: si se disminuye el margen al 90% podría aumentar sus ventas a \$ 600.000; si disminuye al 80%, podría aumentar a \$700.000. Se solicita asesorar al empresario acerca de la política más conveniente.

Cuadro N°2 – Comportamiento de los Parámetros frente a Cambios en los Mark Up

Tramos	Ventas en Términos Monetarios (\$)		Mark Up (%)
	Desde	Hasta	
1	1	500.000	1.00
2	500.001	600.000	0.90
3	600.001	700.000	0.80

Pensamiento matemático avanzado

Para obtener el precio de venta, al costo se le agrega el margen $pv = cv (1 + m)$ donde $m =$ margen de marcación. Luego $\frac{pv}{cv} = 1 + m$ (1)

Es importante considerar el Punto de Equilibrio, para determinar la cantidad de productos o servicios que se deben comercializar para cubrir o igualar a los costos fijos. Se los calcula considerando los mark up y los costos de adquisición.

$$B = cm \cdot Q - CF \quad \text{con} \quad B = 0 \quad \text{entonces} \quad CF = cm \cdot Q$$

Se sabe que $cm = pv - cv$ entonces (1) $\frac{pv}{cv} cm = cm (1 + m)$

Luego $pv \left(\frac{pv - cv}{cv}\right) = cm (1 + m)$ y $pv \left(\frac{pv}{cv} - 1\right) = cm (1 + m)$

Así $pv \cdot m = cm (m + 1)$ luego $pv = \frac{m + 1}{m} \cdot cm$

Multiplicando ambos miembros por la cantidad Q , resulta $pv \cdot Q = \frac{m + 1}{m} \cdot cm \cdot Q$

Por lo tanto el ingreso I que recibe una empresa por venta de productos o servicios se expresa por $I = \frac{CF(m+1)}{m}$ que es el Punto de Equilibrio en términos monetarios con margen de marcación, donde I : Ventas, CF : Costos Fijos y m : margen de marcación o mark up.

Luego, el Punto de Equilibrio en el primer tramo es $I_1 = \frac{200000 \cdot 2}{1} = 400.000$

El Beneficio Máximo del primer tramo se expresa $B_1 = \frac{\text{Ventas Máx Primer Tramo} \cdot m}{1 + m} - CF$

Por lo tanto, el Beneficio máximo (tramo 1) es $B_1 = \frac{500000 \cdot 1}{2} - 200000 = 50000$

Se denomina Punto de Resultado Indiferente al valor de las ventas necesarias en el tramo siguiente que representa el nivel de actividad que arroja un beneficio igual al que se consigue usando al máximo la capacidad de la estructura anterior.

El Punto de Resultado Indiferente se calcula usando la fórmula del Punto de Equilibrio, donde se suma a los Costos Fijos el Beneficio Máximo del tramo anterior:

Pensamiento matemático avanzado

$$I_2 = \frac{(CF + B_1) (1 + m)}{m}$$

El Punto de Resultado Indiferente (tramo 2) es $I_2 = \frac{(200000 + 50000) \cdot 1.90}{0.90} = 527778$

El Beneficio máximo en el segundo tramo $B_2 = \frac{600000 \cdot 0.90}{1.90} - 200000 = 84211$

El Punto de Resultado Indiferente (último tramo) es $I_3 = \frac{(200000 + 84211) \cdot 1.80}{0.80} = 639474$

El Beneficio máximo en el tercer tramo es: $B_3 = \frac{700000 \cdot 0.80}{1.80} - 200000 = 111111$

Para los cálculos debe considerarse en cada tramo el mark up correspondiente.



Puede operar con beneficios a partir de \$400.000 de ventas, situación que es posible dentro del primer tramo.

Si el estudio de mercado es acertado, la alternativa de vender rebajando el margen al 90% en el segundo tramo, es conveniente superar los \$527.778 de ventas. Pues, a menores niveles el beneficio es menor que el que se obtiene operando al máximo en el tramo anterior. Análogamente, para que sea conveniente disminuir el margen al 80% como en el tercer tramo, se debe conseguir un nivel de ventas que supere los \$639.474.

Con los datos se elaboró un cuadro de gran simplicidad, logrando mayor visualización y comprensión del problema.

Tramos	I	m	CM	CF	RESULT
1	0	1,00	0	200.000	-200.000
	20.000	1,00	10.000	200.000	-190.000
	40.000	1,00	20.000	200.000	-180.000
	60.000	1,00	30.000	200.000	-170.000
	80.000	1,00	40.000	200.000	-160.000
	100.000	1,00	50.000	200.000	-150.000
	120.000	1,00	60.000	200.000	-140.000
	140.000	1,00	70.000	200.000	-130.000
	160.000	1,00	80.000	200.000	-120.000
	180.000	1,00	90.000	200.000	-110.000
	200.000	1,00	100.000	200.000	-100.000
	220.000	1,00	110.000	200.000	-90.000
240.000	1,00	120.000	200.000	-80.000	

Pensamiento matemático avanzado

	260.000	1,00	130.000	200.000	-70.000	
	280.000	1,00	140.000	200.000	-60.000	
	300.000	1,00	150.000	200.000	-50.000	
	320.000	1,00	160.000	200.000	-40.000	
	340.000	1,00	170.000	200.000	-30.000	
	360.000	1,00	180.000	200.000	-20.000	
	380.000	1,00	190.000	200.000	-10.000	
	400.000	1,00	200.000	200.000	0	
	420.000	1,00	210.000	200.000	10.000	
	440.000	1,00	220.000	200.000	20.000	
	460.000	1,00	230.000	200.000	30.000	
	480.000	1,00	240.000	200.000	40.000	
	500.000	1,00	250.000	200.000	50.000	
	510.000	0,90	241.579	200.000	41.579	
2	520.000	0,90	246.316	200.000	46.316	
	530.000	0,90	251.053	200.000	51.053	
	540.000	0,90	255.789	200.000	55.789	
	550.000	0,90	260.526	200.000	60.526	
	560.000	0,90	265.263	200.000	65.263	
	570.000	0,90	270.000	200.000	70.000	
	580.000	0,90	274.737	200.000	74.737	
	590.000	0,90	279.474	200.000	79.474	
	600.000	0,90	284.211	200.000	84.211	
3	610.000	0,80	271.111	200.000	71.111	
	620.000	0,80	275.556	200.000	75.556	
	630.000	0,80	280.000	200.000	80.000	
	640.000	0,80	284.444	200.000	84.444	
	650.000	0,80	288.889	200.000	88.889	
	660.000	0,90	312.632	200.000	112.632	
	670.000	0,90	317.368	200.000	117.368	
	680.000	0,80	302.222	200.000	102.222	
	690.000	0,80	306.667	200.000	106.667	
700.000	0,80	311.111	200.000	111.111		

(1) PRI = Punto Resultado Indiferente; Ingresos o Ventas = 527778 y Beneficio = 50000

(2) PRI = Punto Resultado Indiferente; Ingresos o Ventas = 639474 y Beneficio = 84211

Conclusiones

Con el estudio analítico se visualiza el comportamiento de los distintos parámetros ante modificaciones en el nivel de actividad.

El Análisis Marginal es una herramienta muy útil para la toma de decisiones en el ámbito empresarial, tanto en el caso de producción simple como de producción múltiple. También estudia los casos de modificaciones en la contribución marginal unitaria (creciente o decreciente) debido a cambios en los precios de venta. No obstante, este análisis es eficiente para los casos en que sufren modificaciones varios parámetros simultáneamente.

El objetivo fundamental de todo empresario es lograr mayor rentabilidad en función del capital invertido.

Con este trabajo se procura dar sentido y contextualizar los conceptos y, sobre todo, revelar la inmensa lógica empresarial que tiene la sencillez de su origen y la facilidad de comprensión de sus modelos matemáticos y analíticos. Estos modelos con formulaciones algebraicas aportan una valiosa información, que lleva a importantes decisiones e interpretaciones económicas. También, muestran la significación y utilidad para el empresario, permitiéndole evaluar el impacto económico de sus decisiones, de manera rápida y precisa. Se intenta generar en estudiantes y usuarios un nuevo significado operativo, predominando una metodología que explica y predice fenómenos económicos.

Esta propuesta proporciona a los docentes una modelización accesible que promueve un pensamiento no lineal y una cierta intuición racional, enseñando a los estudiantes a encontrar múltiples alternativas de solución.

Referencias bibliográficas

- Arya, J. y Lardner R. (2004). *Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía*. 4^{ta} Edición. México: Pearson Educación
- Camacho Peñalosa, E., et ali. (2006). *Fundamentos de Cálculo para Economía y Empresa*. 1^{era} Edición. Madrid: Delta Publicaciones.
- Giménez, C. (2007). *Sistemas de Costos*. Buenos Aires: La Ley.
- Horngren, C.; Foster, G y Datar, S. (2007). *Contabilidad de Costos, Un Enfoque Gerencial*. Décimo segunda Edición México: Pearson, Prentice Hall.
- Monsalve, S. (2010). *Matemáticas Básicas para Economistas. Cálculo*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias Económicas.
- Sydsaeter, K. y Hammond, P. (2006). *Matemáticas para el Análisis Económico*. Madrid: Pearson Educación.
- Yardín, A.; Rodríguez Jáuregui, H. y Bottaro, O. (2004). *El Comportamiento de los Costos y la Gestión de la Empresa*. Buenos Aires: La Ley
- Yardín, A. (2010). *El Análisis Marginal, la Mejor Herramienta para Tomar Decisiones sobre Costos y Precios*. Buenos Aires: Osmar Buyatti.