

EVOLUCIÓN EN LAS FORMAS DE VALIDACIÓN PROPORCIONADAS POR ESTUDIANTES AL DESARROLLAR ACTIVIDADES ENMARCADAS EN LA METODOLOGÍA ACODESA

Álvaro Sebastián Bustos Rubilar – Gonzalo Zubieta Badillo
abustos@cinvestav.mx – gzubieta@cinvestav.mx
Cinvestav, México

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos

Modalidad: CB

Nivel educativo: Formación y actualización docente

Palabras clave: Validación matemática, metodología ACODESA

Resumo

En este escrito exponemos parte de los resultados obtenidos en una exploración llevada a cabo con estudiantes de una Maestría en Educación Matemática, a quienes se les propuso una actividad de contenido geométrico diseñada bajo los principios de la metodología de trabajo individual, debate científico y autorreflexión (ACODESA) propuesta por Hitt (2007), la cual consta de cinco etapas: trabajo individual, trabajo en equipo, debate científico, autorreflexión e institucionalización. Mostramos el caso de un estudiante, quien después de conjeturar y validar de manera individual, reformuló sus validaciones durante el desarrollo de la actividad, observándose una notoria evolución en la forma de validar entre la primera y cuarta etapa de la metodología ACODESA.

Introducción

En esta investigación ocupamos el término validación para referirnos a los procedimientos proporcionados por un estudiante para justificar un enunciado matemático. Además, la validación la entendemos como un proceso dinámico, el cual esperamos evolucione en dirección hacia una demostración matemática. Lo anterior, con la finalidad de aprovechar las justificaciones confeccionadas por los estudiantes y tomarlas como punto de partida para que sean ellos mismos, junto a sus pares, quienes las reformulen luego someterlas al juicio de sus compañeros, a fin de mejorarlas y aproximarlas hacia una demostración.

Para generar un ambiente de interacción social en el cual se produzcan instancias donde los estudiantes formulen validaciones individualmente, las analicen junto a sus pares en un trabajo en equipo y luego las debatan en plenario (toda la clase) utilizamos la metodología ACODESA, la cual nos permitió observar las formas de validación elaboradas por los

estudiantes en distintas modalidades: individual, en equipo y con toda la clase. En este trabajo se persiguió como objetivo estudiar la evolución en la forma de validar de los estudiantes al desarrollar actividades geométricas enmarcadas en la metodología ACODESA.

Referentes teóricos

El principal referente teórico utilizado para sustentar la investigación, es la tipología de niveles y tipos de pruebas propuesta por Balacheff (1987), la cual nos fue útil para identificar y clasificar las validaciones proporcionadas por los estudiantes en cada una de las etapas de la actividad. Balacheff diferencia entre los términos demostración, argumentación, prueba y explicación:

Explicación. Discurso con el cual se pretende aclarar la verdad de una posición o resultado adquirido previamente por el locutor.

Argumentación. Discurso destinado a obtener el consentimiento del interlocutor.

Prueba. Explicación aceptada por una comunidad, la cual puede ser rechazada por otra. La prueba puede evolucionar simultáneamente con el avance de los saberes en los cuales se apoya.

Demostración. Consiste en una serie de enunciados organizados según un conjunto de reglas bien definidas.

A partir del análisis de los procedimientos elaborados por los estudiantes para validar conjeturas, Balacheff (1987) propone cinco tipos de prueba:

Empirismo ingenuo. El estudiante afirma la validez de un enunciado después de verificarlo en casos particulares. En este tipo de prueba se evidencia una resistencia del estudiante a la generalización.

Experiencia crucial. El estudiante verifica con un ejemplo lo menos particular posible. En este tipo de prueba el alumno generaliza explícitamente a partir del ejemplo con el cual verifica el enunciado.

Ejemplo genérico. El estudiante da un ejemplo que representa la generalidad, es decir, un ejemplo que no es considerado un caso particular, sino un representante de una clase de casos para los cuales sí es verdadero el enunciado. En este tipo de prueba el enunciado es justificado por medio de operaciones y transformaciones del objeto matemático.

Experiencia mental. El estudiante explica las razones mediante el análisis de las propiedades implicadas en el enunciado, descontextualizándolo y sacándolo de una representación particular.

Calculo sobre los enunciados. Construcciones intelectuales basadas en teorías más o menos formalizadas o explícitas, originadas en una definición o propiedad y se basan en la transformación de expresiones simbólicas. Este tipo de prueba oscila entre la experiencia mental y la demostración.

Los tipos de prueba descritos, Balacheff (1987) los categoriza en dos niveles; pragmáticas e intelectuales. En el primero encontramos las pruebas que recurren a la acción y a ejemplos concretos: el empirismo ingenuo, la experiencia crucial y el ejemplo genérico. En el segundo nivel se encuentran las pruebas apoyadas en la formulación de propiedades matemáticas puestas en juego y en la relación que existe entre ellas: la experiencia mental.

Otro referente teórico utilizado en la investigación, son los lineamientos del debate científico en la clase de matemática (Alibert & Thomas, 1991; Legrand, 1993, 2001). En el debate científico en matemáticas deben prevalecer los argumentos racionales –justificaciones sustentadas en el corpus teórico de la matemática–, más que en evidencia empírica o declaraciones carentes de una validación propia de la disciplina. Durante el desarrollo del debate, el rol del profesor consiste en facilitar la manifestación de ideas y permitir esclarecer los diferentes puntos de vistas para que los estudiantes sean quienes defiendan sus aseveraciones, siempre y cuando sientan que son más razonables que las expresadas y justificadas por sus pares. Los estudiantes mismos deben ser quienes lideren el consenso de lo debatido.

Metodología

En la implementación de la actividad reportada en este escrito participaron doce estudiantes de un programa de Maestría en Educación Matemática en México. La aplicación de la actividad se llevó a cabo en dos sesiones de dos horas cada una. La actividad fue diseñada bajo los principios de la metodología ACODESA, la cual promueve el aprendizaje colaborativo mediante la interacción social y el uso de tecnología. Con la metodología ACODESA se logran generar en el aula procesos de conjetura, argumentación y validación (Hitt, 2011; Hitt et al., 2016). La metodología ACODESA consta de cinco etapas, detalladas a continuación.

1. **Trabajo individual.** El estudiante desarrolla la actividad en forma individual con papel y lápiz.
2. **Trabajo en equipo.** Los estudiantes trabajan en equipos (tres o cuatro integrantes).
3. **Debate científico.** Se debate en un plenario cada propuesta proporcionada por los equipos. Los lineamientos del debate científico deben ir en el sentido de Legrand (2001).
4. **Autorreflexión.** Cada estudiante lleva a cabo un proceso de reconstrucción de la actividad en lápiz y papel.
5. **Institucionalización.** El docente muestra a los estudiantes la solución institucional de la actividad e incorpora los aportes de los estudiantes que ayudaron en la construcción de la solución.

La actividad reportada en este escrito tiene relación con el contenido de áreas en triángulos y paralelogramos, y su enunciado es el siguiente:

Se sabe que un paralelogramo es un cuadrilátero en el cual sus lados opuestos son paralelos. Si escoges un paralelogramo cualquiera y trazas las diagonales respectivas se formarán cuatro triángulos, entonces, (a) ¿Qué puedes decir respecto a las áreas de los cuatro triángulos? Justifica en forma detallada tu respuesta sin olvidar mencionar el paralelogramo que escogiste. (b) Tus respuestas anteriores, ¿son independientes del tipo de paralelogramo que escojas? ¿Por qué? Justifica en forma detallada tu respuesta.

La información analizada se obtuvo a partir de las producciones en las hojas de trabajo de los estudiantes, videgrabaciones y grabaciones de audio de los diálogos producidos durante las sesiones en las cuales se implementó la actividad.

Análisis y discusión de resultados

Por razones de espacio en este escrito presentamos el caso de uno de los estudiantes, Arturo, quién evidenció cambios durante el desarrollo de la actividad en los argumentos utilizados para validar su conjetura. En la etapa de trabajo individual Arturo proporcionó la siguiente respuesta al primer inciso de la actividad (Figura 1).

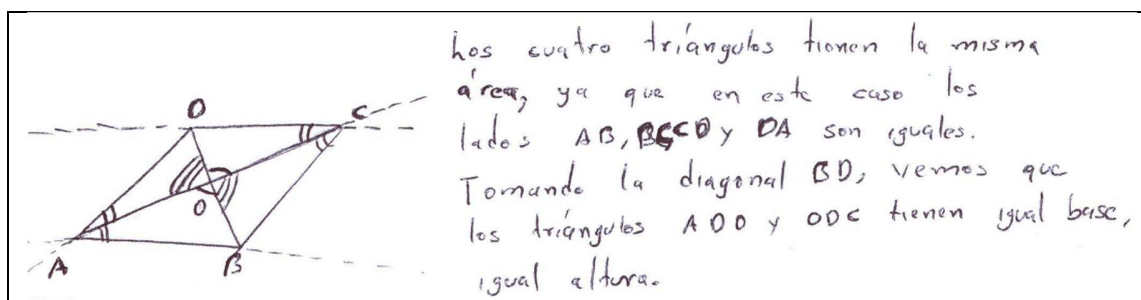
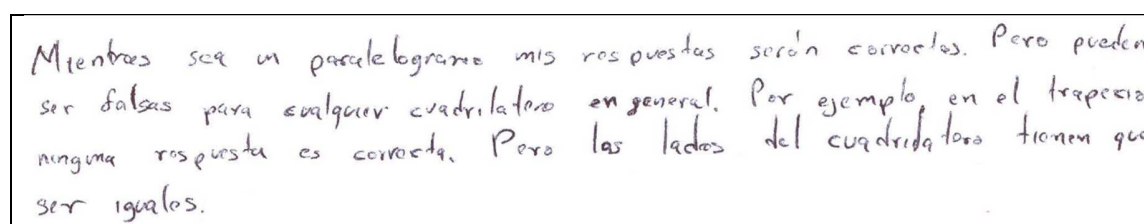


Figura 1. Respuesta confeccionada por Arturo en la etapa de trabajo individual.

Arturo conjeturó (Figura 1) que los cuatro triángulos tienen la misma área. En el cuerpo de la validación proporcionada por el estudiante para justificar dicha conjetura encontramos dos afirmaciones: (i) AB , BC , CD y DA son iguales y, (ii) los triángulos AOD y ODC tienen igual base e igual altura. Por la primera afirmación y la inclinación del paralelogramo trazado por el estudiante inferimos que su respuesta es apoyada en un rombo. Arturo no menciona las propiedades que le permiten justificar la igualdad de base y altura de los triángulos AOD y ODC , ya que utiliza un rombo como un representante de una clase de casos para los cuales sí es verdadero el enunciado, pero no explica las razones de sus afirmaciones. Entonces, la validación corresponde a una prueba pragmática de tipo ejemplo genérico.

En el siguiente inciso de la actividad, donde se incentiva al estudiante a generalizar su respuesta, Arturo sostiene que su conjetura es válida para todos los paralelogramos de lados iguales (Figura 2).



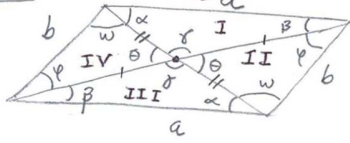
Mientras sea un paralelogramo mis respuestas serán correctas. Pero pueden ser falsas para cualquier cuadrilátero en general. Por ejemplo, en el trapecio ninguna respuesta es correcta. Pero los lados del cuadrilátero tienen que ser iguales.

Figura 2. Generalización proporcionada por Arturo en la etapa de trabajo individual.

Lo expresado por Arturo (Figura 2) es correcto [válido para el cuadrado y rombo solamente], pero no confecciona una nueva validación. El estudiante apoya su generalización en la validación proporcionada en la Figura 1, la cual corresponde al caso particular del rombo. Entonces, generaliza a partir de un ejemplo representativo de una clase de paralelogramos – el rombo representa a los paralelogramos de lados congruentes–. Por lo anterior, seguimos considerando la validación elaborada por el estudiante en la etapa de trabajo individual una prueba pragmática de tipo ejemplo genérico.

En la etapa de trabajo en equipo Arturo trabajó con otras dos compañeras, Daniela y Paulina. La primera, en la etapa de trabajo individual conjeturó que las áreas de los triángulos opuestos serían siempre iguales, independientemente del tipo de paralelogramo, y elaboró una prueba intelectual de tipo cálculo sobre los enunciados para validar su conjetura (Figura 4).

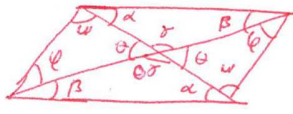
Si nos fijamos en la siguiente figura: un paralelogramo arbitrario con la siguiente forma.



Se están cumpliendo las relaciones ahí descritas, luego concluimos que $\Delta_I \cong \Delta_{III}$ y $\Delta_{II} \cong \Delta_{IV} \therefore$
 Área $\Delta_I =$ Área Δ_{III} & Área $\Delta_{II} =$ Área Δ_{IV} .

Figura 3. Respuesta elaborada por Daniela en la etapa de trabajo individual.

Durante el trabajo en equipo cada integrante expuso su conjetura y respectiva validación, a fin de lograr un consenso para generar una nueva respuesta a la actividad. Al analizar las hojas de trabajo de los estudiantes y diálogos producidos en esta etapa observamos la influencia ejercida por Daniela en sus compañeros de equipo. Lo anterior queda en evidencia al revisar lo escrito por Arturo al finalizar dicha etapa (Figura 4).



En el caso ~~en el~~ donde los ~~lados~~ lados nos son iguales, vemos que las áreas son iguales dos a dos, es decir los triángulos opuestas por el vértice desde el punto O. Pero las áreas son iguales, puesto que las diagonales pasan por los puntos medios.

Figura 4. Comentario escrito por Arturo en la etapa de trabajo en equipo.

Aunque es notoria la influencia de Daniela en la respuesta de Arturo, no se observa una validación como la proporcionada por su compañera. Inferimos que Arturo intentó confeccionar una justificación similar a la de Daniela, pero en su intento le faltó explicitar en la figura que acompaña su discurso (paralelogramo de la Figura 4) la congruencia de los lados correspondientes en los triángulos opuestos. Lo anterior, porque en la figura solo está representada la correspondencia de ángulos entre los triángulos opuestos. No obstante, consideramos el intento de validación elaborado por Arturo (Figura 4) como una aproximación incompleta a una prueba intelectual de tipo experiencia mental.

Durante la etapa de debate, la discusión primero estuvo centrada en determinar si los cuatro triángulos tenían igual área o solo los opuestos. Luego de la presentación de las respuestas elaboradas por cada equipo, los estudiantes consensuaron que en cualquier paralelogramo los

cuatro triángulos formados al trazar las diagonales tendrán la misma área. Para elaborar la validación de la conjetura consensuada en esta etapa se utilizó como principal argumento la congruencia de triángulos para justificar la igualdad de las áreas de los triángulos opuestos. Arturo no elaboró una nueva respuesta en esta etapa, ni escribió algo para complementar o corregir sus respuestas. Sin embargo, en la etapa de autorreflexión Arturo elaboró una nueva validación para la conjetura consensuada en el debate (Figura 5).

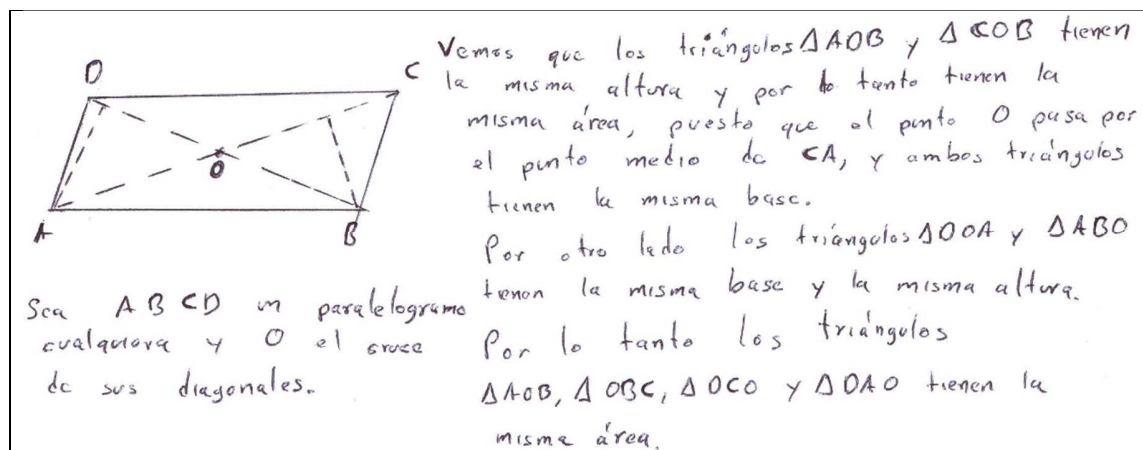


Figura 5. Respuesta confeccionada por Arturo en la etapa de autorreflexión.

En el cuerpo de la validación confeccionada por Arturo en la etapa de autorreflexión se distinguen tres partes. En la primera el estudiante define y traza un paralelogramo $ABCD$ cualquiera. En la segunda parte justifica la igualdad de área de los triángulos adyacentes AOB y COB , y luego justifica la igualdad entre los triángulos AOB y COB . Al validar la igualdad de los triángulos adyacentes, Arturo validó correctamente la conjetura. Notamos en esta validación que, a diferencia de sus respuestas anteriores, el estudiante explicita los argumentos que le permitieron afirmar las declaraciones escritas en el cuerpo de la validación (Figura 5). Esta validación la consideramos una prueba de tipo cálculo sobre los enunciados, ya que, al utilizar un representante general de los paralelogramos, notamos la aplicación (implícita y explícitamente) de definiciones y propiedades en forma más simbólica.

Conclusiones y reflexiones finales

Observamos evolución en la manera de validar del estudiante, ya que en la etapa de trabajo individual elaboró una prueba pragmática de tipo ejemplo genérico para justificar la igualdad de áreas de los triángulos opuestos formados al trazar las diagonales del paralelogramo. Posteriormente, en la etapa de trabajo en equipo, se observó una marcada influencia por una

de sus compañeras de equipo, lo cual probablemente ayudó al estudiante para intentar construir una prueba intelectual de tipo experiencia mental. En la etapa de autorreflexión, cuarta fase en la cual el estudiante vuelve a desarrollar la misma actividad individualmente y en lápiz y papel, observamos una prueba de tipo cálculo sobre los enunciados para justificar la conjetura consensuada en la fase de debate. Esto último es importante, ya que las pruebas de cálculo sobre los enunciados son la transición entre una prueba intelectual y una demostración matemática (Balacheff, 1987). Luego de pasar por las etapas de trabajo en equipo y debate, el estudiante tuvo a su disposición más argumentos y otros puntos de vista para el mismo problema, hecho que le ayudó tanto en la reformulación de su conjetura como en la elaboración de su validación en las distintas etapas de la metodología ACODESA. Tal como señalan Hitt et al. (2016) con la metodología ACODESA se propiciaron instancias de interacción social en las cuales los estudiantes contrastaron sus conjeturas y validaciones. Por último, mencionamos que la evolución en la forma de validar de Arturo fue también observada en la mayoría de los estudiantes participes.

Referencias bibliográficas

- Alibert, D., & Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 215–230). New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic.
- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147–176. <https://doi.org/10.1007/BF00314724>
- Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. *Environnements Informatisés et Ressources Numériques Pour L'apprentissage. Conception et Usages, Regards Croisés*, 65–88.
- Hitt, F. (2011). Construction of mathematical knowledge using graphic calculators (CAS) in the mathematics classroom. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42(6), 723–735. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2011.583364>
- Hitt, F., Saboya, M., & Cortés, C. (2016). Rupture or continuity: The arithmetico-algebraic thinking as an alternative in a modelling process in a paper and pencil and technology environment. *Educational Studies in Mathematics*. [https://doi.org/10.1007/s10649-](https://doi.org/10.1007/s10649-2016-00000-0)

016-9717-4

Legrand, M. (1993). Debat scientifique en cours de mathematiques et specificite de l'analyse. *Repères-IREM*, 10, 123–159. Retrieved from http://www.univ-irem.fr/exemple/reperes/articles/10_article_68.pdf

Legrand, M. (2001). Scientific Debate in Mathematics Courses. In *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (pp. 127–135).