PROYECTO KLEIN. "SAPERE AUDE"… ¿Y POR QUÉ NO EN MATEMÁTICAS?"

Sixto Romero
sixto@uhu.es
Departamento de Matemáticas-Universidad de Huelva-España

Tema: La Resolución de Problemas como Vehículo del Aprendizaje Matemático.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Secundaria-Terciario
Palabras clave: situación problemática, sapere aude, modelización, motivación..

Resumen

La actividad matemática se encuentra en el corazón de toda enseñanza de las ciencias, en general, y en la de las matemáticas, en particular. Es a la vez un instrumento de motivación de los alumnos, un medio de contextualizar los conceptos estudiados y de hacer la conexión con otras materias escolares, y concebida por diferentes estatus: enseñantes, pedagogos, autores de manuales escolares e investigadores en didáctica de las matemáticas. Se dirige a un público variado y puede ser entendida de varias formas.
Con este trabajo se quiere poner de manifiesto como la naturaleza nos ofrece bellos ejemplos de reflexión para que el matemático pueda realizar cualquier trabajo susceptible de ser modelado.
Se propone como actividades de clase aquellas que sean verdaderos problemas o situaciones problemáticas. Una situación problemática atractiva para el alumno puede ser más valiosa que una docena de ejercicios formales o problemas rutinarios. Los referentes que expondremos servirán para la motivación para el alumno y la funcionalidad y utilidad del contenido matemático. Con el estudio de casos reales presentaremos varias situaciones a nivel de secundaria desde un punto de vista superior.
¡De esta manera, pretendemos hacer realidad en el alumno el sapere aude (atrévete a saber) en Matemáticas!

1. Introducción

Sapere aude es una expresión del latín, que indica «atrévete a saber»; también suele interpretarse como «ten el valor de usar tu propia razón». Su divulgación se debe a Immanuel Kant, en su ensayo *¿Qué es la Ilustración?*, aunque su uso original se da en la Epístola II de Horacio del *Epistularum liber primus*:"*Dimidium facti qui coepit habet: sapere aude"* ("Quien ha comenzado, sólo ha hecho la mitad: atrévete a saber").
La frase es de Horacio en el siglo I a. C., y fue encontrada en una carta a su amigo Lolius. Tiene muchas traducciones pero, en el contexto de la carta (en la cual habla sobre los múltiples mecanismos que Ulises, en su regreso de Troya, usó para superar todas las pruebas con que se enfrentó) se puede entender como «tener el valor de usar tu habilidad para pensar». Otros la traducen como «atreverse a pensar».

2. Propuesta de salida

El nuevo currículo en la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) se diferencia de los anteriores por la introducción de las conocidas competencias básicas. En el marco de la propuesta realizada por la Unión Europea se han concretado ocho competencias básicas en el sistema educativo español: comunicación lingüística, matemática, conocimiento y la interacción con el mundo físico, tratamiento de la información y digitalismo, social y ciudadana, cultural y artística, aprender a aprender y autonomía e iniciativa personal.

Aparte de las competencias básicas están los elementos que aparecen en el currículo: a) **los métodos pedagógicos**, establecidos íntegramente por las Administraciones educativas; y b) **los objetivos específicos** de la materia que el/la alumno/a va adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica para valorar las Matemáticas como parte integrante de nuestra cultura, aparte de otros elementos que conforman el currículo como los contenidos a desarrollar en la enseñanza de las Matemáticas.

3. Proyecto Klein

La Unión Matemática Internacional, entre otras actividades de pública notoriedad, organiza cada cuatro años el Congreso Internacional de Matemáticos (el último, en Madrid 2006) y la Comisión Internacional para la Enseñanza de las Matemáticas (ICMI, ver http://www.mathunion.org/icmi) es el órgano de IMU encargado de los temas relacionados con la enseñanza de las matemáticas en los distintos niveles educativos. Su primer presidente y fundador fue el eminente matemático alemán Félix Klein (1849-1925). ICMI organiza cada cuatro años un Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME), como el celebrado en Sevilla en 1996. En España, por ejemplo, la representación ante ICMI se estructura a través de una subcomisión del CEMAT, (ver http://www.ce-mat.org/educ/educ.htm) siguiendo el modelo IMU/ICMI.

Hace 102 años, en 1908, el catedrático de la Universidad de Göttingen, el Profesor Félix Klein, publicaba una obra magistral, titulada *Matemática elemental desde un punto de vista superior*, con la declarada intención de contribuir a la mejora de la enseñanza de las matemáticas en Alemania, mostrando la repercusión, en la consideración de los objetos matemáticos de la enseñanza no universitaria, de los avances de esta disciplina a lo largo del siglo XIX.

La obra de Klein marcó, en muchos sentidos, un hito y constituye una de esas raras ocasiones en las que un investigador de primera fila escribe una obra específicamente dirigida a facilitar a los profesores de secundaria una visión estimulante y viva sobre el contenido del currículo.

Félix Klein trataba de denunciar en su obra, la falta de conexión –«…*desde principios del siglo XIX…*»– entre la enseñanza de las matemáticas no universitarias y los resultados de la investigación. El *Proyecto Klein* es una iniciativa conjunta de IMU/ICMI para desarrollar una versión actualizada (en la forma y en el fondo) del hito que supuso la publicación, en 1908, del libro citado anteriormente.

Se trata de producir, a lo largo de cuatro años, una serie de materiales de diversa naturaleza (libros; recursos de Internet: wikis, foros, portales; audiovisuales, etc.), para profesores de secundaria, que ayuden a trasmitir la amplitud y vitalidad que la investigación matemática ha alcanzado a lo largo del siglo XX, conectándola con el currículo de la enseñanza secundaria. El acuerdo de IMU/ICMI contempla la edición de los distintos materiales en alemán, chino mandarían, español, francés e inglés, al menos.

El carácter universal (destinado a todos los profesores de secundaria del mundo) y enciclopédico (abarcando todas las ramas de la matemática) del objetivo marcado para el proyecto Klein exigirá recabar múltiples colaboraciones y patrocinios y, también, lograr la implicación de investigadores y docentes de diversas especialidades y niveles educativos con el objetivo principal de intentar dar respuesta a la cuestión: "…*¿Cuáles son los desarrollos matemáticos del Siglo XXI que los profesores de secundaria deberían conocer, y cómo se les pueden hacer accesibles?*".

La Comisión aprobó la realización de un libro de cerca de 300 páginas, con el objetivo de inspirar a los profesores de secundaria en la tarea de acercar a sus estudiantes a un panorama más completo sobre el creciente y complejo papel de las matemáticas en el mundo de hoy. Ese libro estaría acompañado por diversos recursos audiovisuales y web. La duración estimada del proyecto es de cuatro años.

Con este espíritu, voy a presentar el SAPERE AUDE en diferentes situaciones.

4. Sapere Aude, Geometría

La Geometría, además de un conjunto de definiciones y fórmulas para el cálculo de superficies y volúmenes, consiste, sobre todo, en describir y analizar propiedades y relaciones, y en clasificar y razonar sobre formas y estructuras. Su estudio ofrece excelentes oportunidades de establecer relaciones con otros ámbitos, como la naturaleza o el mundo del arte, que no debería quedar al margen de atención. Una muestra:

JOYITA 1*: Teorema de Ptolomeo y Teorema de Pitágoras*

El Teorema de Pitágoras que se presenta en las clases de 2º de ESO es de los que cuentan con un mayor número de demostraciones diferentes. Una de las causas de esto es que en la Edad Media se exigía una nueva demostración del teorema para alcanzar el grado de *Magíster matheseos*. Algunos autores proponen hasta más de mil demostraciones. Otros autores, como el matemático estadounidense E. S. Loomis, catalogó 367 pruebas diferentes en su libro de 1927, *The Pythagorean Proposition*. En ese mismo libro, Loomis clasificaría las demostraciones en cuatro grandes grupos: las **algebraicas**, las **geométricas o puzzles**, las **dinámicas** y las **cuaterniónicas**. La demostración que propongo, con seguridad, ya existe pero la bibliografía que he consultado hasta el momento no he encontrado ninguna referencia, no puede ser explotada en el aula, ¡o tal vez sí!, puesto que tenemos que hacer uso del Teorema de Ptolomeo (¡desgraciadamente muy poco conocido en los diferentes niveles de nuestro sistema educativo!) Es una demostración del teorema de Pitágoras rápida y original.

Consideremos un rectángulo ABCD inscrito en un círculo

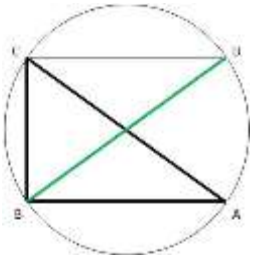

Fig. 1. Teorema de Ptolomeo y Pitágoras

Aplicando el teorema de Ptolomeo al rectángulo ABCD: "*En un cuadrilátero convexo inscrito en un círculo, el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos*", se tiene:

$$AC.\ BD= AB.CD+AD.BC$$

Las propiedades del rectángulo utilizadas en nuestro caso: AD=BC, AB=CD, y como las diagonales son iguales AC=BD nos lleva a la siguiente relación que es el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC:

$$AC.\ AC= AB.AB+BC.BC \Rightarrow AC^2= AB^2+BC^2$$

Concluimos diciendo que el sapere aude aquí nos permitiría una explotación en clase que nos parece necesaria en los ideas innovadoras que utilizan competencias y conocimientos realmente adquiridos por lo alumnos a la finalización de los estudios anteriores. Debemos proponer ideas originales para demostrar de otra manera que ciertos resultados son extremadamente formadores desde un punto de vista científico.

4. Sapere Aude, la aritmética de los números

La **teoría de números** es la rama de matemáticas puras que estudia las propiedades de los números, en particular los enteros y contiene una cantidad considerable de problemas que podrían ser comprendidos por "no matemáticos". De forma más general, este campo estudia los problemas que surgen con el estudio de los números enteros. Tal como cita Jürgen Neukirch:

"La teoría de números ocupa entre las disciplinas matemáticas una posición idealizada análoga a aquella que ocupan las matemáticas mismas entre las otras ciencias."

Según los métodos empleados y las preguntas que se intentan contestar, la teoría de números se subdivide en diversas ramas en la que se estudian los números enteros sin emplear técnicas procedentes de otros campos de las matemáticas. Pertenecen a la teoría elemental de números las cuestiones de divisibilidad, el algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor, la factorización de los enteros como producto de números primos, la búsqueda de los números perfectos y las congruencias. Son enunciados típicos el pequeño teorema de Fermat y el teorema de Euler que lo extiende, el teorema chino del resto y la ley de reciprocidad cuadrática. En esta rama se investigan las propiedades de las funciones multiplicativas como la función de Möbius y la función φ de Euler; así como las sucesiones de números enteros como los factoriales y los números de Fibonacci.

Diversos cuestionamientos dentro de la teoría elemental de números parecen simples, pero requieren consideraciones muy profundas y nuevas aproximaciones, incluyendo las siguientes: Conjetura de Goldbach, Conjetura de los números primos gemelos, Último teorema de Fermat (demostrado en 1995), Hipótesis de Riemann sobre la distribución de los ceros de la función zeta de Riemann, íntimamente conectada con el problema de la distribución de los números primos.

Lo importante, a nivel de secundaria y en todos los cursos, no son sólo las destrezas de cálculo y los algoritmos de lápiz y papel, sino una comprensión de las operaciones que permita el uso razonable de las mismas, en paralelo con el desarrollo de la capacidad de estimación y cálculo mental que facilite ejercer un control sobre los resultados para detectar posibles errores.

Solo presentaré un ejemplo que se puede considerar como "joyita" de naturaleza aritmética.

JOYITA 2: Un número curioso, el 6174

Consideremos el número 6174, reordenemos sus dígitos para construir con ellos el mayor número posible; es decir, coloquémoslo en orden decreciente. Reordenémoslo

ISSN 2301-0797

también para construimos el menor número posible y restemos. Obtenemos así: 7641-1467=6174 que es el número con el que empezamos. Consideremos otro número por ejemplo 4959. Obtenemos: 9954-4599=5355. Hasta aquí no parece que haya sucedido nada interesante. Hagamos lo mismo con la diferencia 5355: 5553-3555=1998.
Nada especial. Seguimos con 1998: 9981-1899=8082; 8820-0288=8532;
8532-2358=6174.
¡Otra vez el dichoso número! Con respecto a este problema, surgen las siguientes preguntas: ¿Siempre será así? ¿Habrá restricciones al problema?
Las respuestas a estos dos interrogantes comenzará a vislumbrar el estudiante al notar que esto siempre ocurre, con la única condición que los cuatro dígitos no sean iguales. A medida que el estudiante se introduzca en la resolución del problema, pueden surgir interrogantes como los siguientes: a) Si ello siempre ocurre, ¿cuál es el número máximo de restas necesarias para obtener el número 6174?; b) Dado cualquier entero de cuatro dígitos, ¿se puede saber cuántos pasos son necesarios para obtener el 6174?
Con estas cuestiones en el aire se puede trabajar dando lugar a nuevos e interesantes problemas de aritmética. ¡Como adelanto: a) Siempre es posible llegar al 6174. b) El número máximo de pasos es siete y está determinado por la relación entre los dígitos y no por la forma de ellos!

5. Sapere Aude, la dimensión fractal

5.1. Formas dibujadas

Cuando viajamos en avión tenemos la oportunidad de observar las distintas formas que la naturaleza y el hombre han generado sobre la piel de la superficie de la Tierra. También si nos subimos a un mirador notamos cómo la naturaleza y los humanos “conciben” de diferentes maneras los infinitos elementos que conforman el paisaje. ¿Dónde está diferencia? Hay que encontrarla en la geometría. Por un lado la geometría euclidiana trazada como si un tira-línea se tratara por las máquinas creadas por el hombre, y por otro, la geometría de la curva. Podemos decir que es una lucha de titanes entre dos estilos distintos. Tenemos formas dibujadas por: **la Tierra, la vida, el hombre, la naturaleza, …** La necesidad de medir da origen a la geometría euclidiana ¿Por qué la humanidad le dio la espalda a las formas sinuosas y ramificadas de la naturaleza y se decantó por la línea recta, el círculo y la esfera? ¿Por qué hemos roto el patrón natural que venía dibujando la piel de la tierra desde su formación hace cuatro mil años? Una sola respuesta: para medir.

La geometría de Euclides es uno de los hitos del pensamiento deductivo que basándose en cinco axiomas crea un sistema de descripción del mundo que colmó las necesidades de las ciencias de la naturaleza, de la historia natural hasta bien entrado el siglo XIX.

5.2. La geometría fractal: una nueva manera de medir

Actualmente, hemos llegado a un punto en el que la abstracción que realiza la geometría euclidiana no es suficiente para entender la verdadera complejidad del mundo natural. Nuestra forma de mirar el planeta ha cambiado.

Por un lado el pintor Paul Cezanne afirma: "*Todo en la Naturaleza puede verse en términos de conos, cilindros y esferas"*, pero la réplica la pondría Mandelbrot al contestar: *"Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, las cortezas de los árboles no son suaves y nada, excepto la luz, viaja en línea recta*". Si el mensaje de Mandelbrot es que la Naturaleza responde mejor a otro tipo de descripción, sería conveniente que pudiésemos comprobarlo más allá de la simple intuición. ¿Qué es la estructura ramificada del brócoli? ¿Y la de una nube? ¿O el perfil de una costa? ¿O los ríos en los países nórdicos? ¿Y los árboles en la nieve? ¿Cuánto mide la frontera de Portugal o de cualquier país?

JOYITA 3: La dimensión fractal

La palabra **fractal** procede del adjetivo latino *fractus* que significa *interrumpido*, y en cierta forma algunos objetos de la naturaleza son fragmentados, irregulares, rugosos. Un ***fractal*** es una figura geométrica en la que un motivo (patrón) se repite pero siempre disminuyendo su escala en el mismo porcentaje.

Midiendo longitudes y volúmenes

Una forma de medir la longitud de una curva es aproximarla a la longitud de una serie de pequeñas rectas que la recubren. A ese procedimiento le llamamos *rectificación*. Cuánto más pequeñas sean las rectas escogidas para el recubrimiento, más exacta será nuestra medida. Pero… ¿qué ocurre si intentamos medir la *longitud total* de un cuadrado? No su perímetro, sino la longitud del cuadrado por este método de rectificación. ¿Tiene, siquiera, sentido tal pregunta? (Anexo 3. Fig.12). Cuando hayamos repetido esta tediosa operación infinitas veces, podremos decir que hemos recubierto el cuadrado con líneas. No existirá ni un solo punto por el que no pase una línea, ni por ninguno de ellos pasará a la vez más de una. Para hallar matemáticamente el valor de la longitud de la línea que recubre al cuadrado empleamos el límite**:**

$$L = lim_{n \to \infty} 2^{2n} \left(\frac{1}{2^n} \right) = lim_{n \to \infty} 2^n = \infty$$

Pero… ¿qué ocurre si intentamos medir el volumen de un objeto geométrico? (Anexo 3. Fig.13). llegaríamos con un proceso análogo a que

$$V_\infty = lim_{n\to\infty} 2^{2n}\left(\frac{1}{2^n}\right)^3 = lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$$

¡De modo que la longitud de un cuadrado es infinita y el volumen es cero! El conocido caso del triángulo de Sierpinski tiene longitud infinita y área cero (Anexo3. Fig. 14).

¿Sorpresa? El triángulo de Sierpinski es un objeto geométrico de infinita longitud, aunque se encuentra en una región finita del plano, cosa que implica dimensión mayor que uno. Pero a la vez tiene área nula, que indica dimensión menor que 2. ¿Pero entonces, qué dimensión tiene? Esto nos lleva a la **Definición de autosimilaridad,** D de un objeto, hecho de N copias exactas a él mismo y reducidas en un factor R:

$$D = -\frac{\ln N}{\ln R}.$$

Conclusión General

Debemos analizar algunos de los principales dominios o ámbitos de Educación Matemática en los que resulte pertinente proponer innovaciones y presentar algunos ejemplos concretos utilizando la expresión latina SAPERE AUDE.

Hay muchos dominios matemáticos casi inexplorados en la Enseñanza Primaria y/o Secundaria que, organizados de una manera original y creativa, permitirían el diseño de actividades del aula enriquecedoras y realizar actividades como la propuesta ut-supra e introducir en el mundo de las Matemáticas a toda persona, desde el convencimiento, "*¿Debe usar su valor como lo usaba el héroe mitológico Ulises*?"

Referencias bibliográficas

Atweh, B; Forsgaz, H; Nebres, B. (Eds).(2001) *Sociocultural Research on Mathematics Education. An international perspective*.

Lane, S. (2005). *The Conceptual Framework for the Development of a Mathematics Performance Assessment Instrument*. Educational Measurement: Issues and practice. Wiley Interscience.

Perie, M.; Marion, S.;Gong,B. (2009). *Moving Toward a Comprehensive Assessment System: A Framework for Considering Interim Assessments*.Vol. 28. Wiley Interscience.

Romero, S; Castro, F. (2008). *Modelización matemática en Secundaria desde un punto de vista superior. El problema de Dobogókó*. Vol.2. Modelling in Science Education and Learning. . Valencia.

Ruthven, K. (1996). Calculators *in the mathematics curriculum: the scope of personal computational technology*. In Bishop, A.J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., Laborde, C. (Eds.). *International handbook of mathematics education*. Kluwer.

ANEXO 1. Formas dibujadas

Fig. 2. Por la Tierra

Fig. 3. Por la vida

Fig. 4. Por la vida

Fig. 5. Por el hombre

ANEXO 2. Estructuras ramificadas. Fractales

Fig. 6. Brocoli

Fig. 7. Nube

Fig. 8. Perfil de costa

Fig. 9. Árboles en la nieve

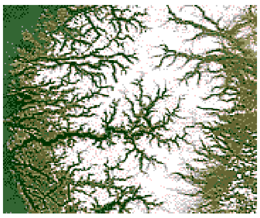

Fig. 10 Ríos Nevados

Fig.11. Frontera Portugal

ANEXO 3. Midiendo longitudes y volúmenes

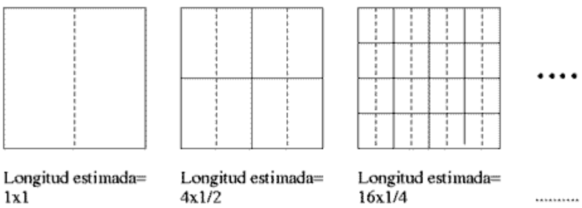

Fig.12. Longitud de un cuadrado

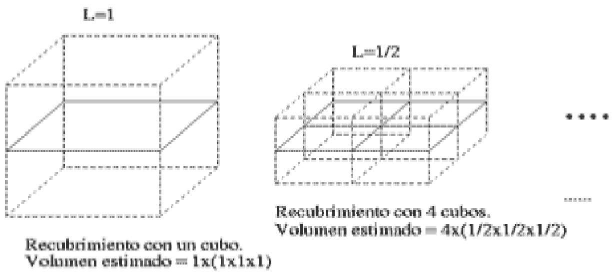

Fig.13. Volumen de un cuadrado

Fig.14. Triángulo de Sierspinki

ANEXO IV. Dimensión Fractal de algunos objetos geométricos

Línea $D = -\frac{\ln 2}{\ln \frac{1}{2}} = 1.$

Cuadrado $D = -\frac{\ln 4}{\ln \frac{1}{2}} = 2.$

Cubo $D = -\frac{\ln 8}{\ln \frac{1}{2}} = 3.$

Triángulo de Sierspinski $D = -\frac{\ln 3}{\ln \frac{1}{2}} = 1.589496...$

Fig. 15. Dimensión de objetos geométricos

ANEXO V. Obtención de algunos objetos geométricos fractales

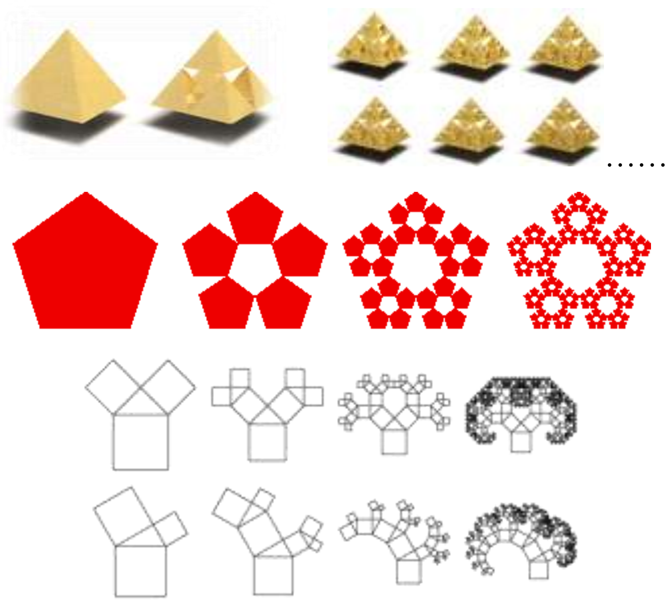

Fig. 16. Pirámide, Pentágono de Sierspinski y Árbol de Pitágoras