UM OLHAR À APLICAÇÃO DAS INTEGRAIS MÚLTIPLAS: DA PROJEÇÃO GRÁFICA À MAQUETE

Ivanete Zuchi Siple – Elisandra Bar de Figueiredo
ivazuchi@gmail.com – elis.b.figueiredo@gmail.com
Universidade do Estado de Santa Catarina-Centro de Ciências Tecnológicas-Departamento de Matemática-Brasil

Tema: Materiais e Recursos Didáticos para o Ensino e a Aprendizagem da Matemática.
Modalidade: CB
Nível educativo: Terciário - Universitário
Palavras chaves: Integrais Múltiplas; Tecnologias; Registros de Representação; Material Didático

Resumo
A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) tem um papel importante nas primeiras fases da estrutura curricular dos diversos cursos das áreas de ciências exatas e afins, pois fornece ferramentas fundamentais para a interpretação e resolução de problemas. Por outro lado, sabemos que o processo de ensino-aprendizagem dessa disciplina não é uma tarefa fácil, constituindo-se um grande desafio para a maioria dos docentes e alunos envolvidos, em especial no ensino e aprendizagem de funções de várias variáveis. O principal objetivo desse trabalho é relatar uma experiência desenvolvida, há mais de dez anos, na disciplina de CDI- II dos cursos de Engenharias e Licenciaturas de uma universidade pública. Tal experiência envolve a aplicação de integrais múltiplas no cálculo do volume de um determinado sólido, contemplando suas múltiplas representações (analítica, gráfica e algébrica). As atividades consistem em construir uma maquete de um determinado sólido, modelá-lo computacionalmente, aplicar os conhecimentos de Geometria Analítica (GA) para identificar as superfícies envolvidas, as curvas de interseção e as projeções, bem como aplicar os conceitos de integrais múltiplas para determinar o valor numérico do volume do sólido dado e socializar o projeto com os demais integrantes da turma.

Introdução

Neste trabalho relataremos uma experiência oriunda de uma experiência desenvolvida na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II (CDI-II) e aplicada, durante dez anos, aos alunos dos cursos de Engenharia e Licenciatura do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina. Tal experiência envolveu a aplicação de integrais múltiplas no cálculo do volume de um determinado sólido contemplando suas diferentes representações (analítica, gráfica e algébrica). Em nossa prática, como professores, observamos que o processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina não é uma tarefa fácil, constituindo um grande desafio para a maioria dos docentes e alunos envolvidos, em especial no ensino e aprendizagem de integrais múltiplas. Uma das grandes dificuldades encontradas diz respeito a visualização tridimensional que não é imediata no ambiente lápis/papel e gera muitas dificuldades na representação gráfica das superfícies.

Com o intuito de ultrapassar tais dificuldades é fundamental criar mecanismos que possibilitem aos estudantes transitarem entre os diferentes registros de representação das integrais múltiplas. De acordo com Alves, Borges e Machado (2008) a preocupação em propiciar experiências visuais aos alunos deveria ser constante em qualquer nível de ensino, uma vez que pensamos em matemática sobre todos os fatos mentais como fatos representacionais onde a simbologia assume um papel insubstituível. Assim, consideramos que as potencialidades dos recursos tridimensionais de um ambiente computacional, como o Winplot, pode ser fundamental no auxílio dessa questão.

Desse modo, inicialmente faremos algumas considerações sobre os registros de representação intermediada pela tecnologia, a seguir descrevemos a metodologia desenvolvida, alguns recortes das apresentações dos trabalhos apresentados por alunos e algumas considerações. Como anexo I, a título de exemplo, apresentamos as etapas de desenvolvimento de um determinado problema.

Fundamentação Teórica

No processo de ensino e aprendizagem das integrais múltiplas existe uma fragilidade na articulação entre a representação gráfica e analítica. Contudo, essa articulação exerce um papel importante na conceitualização e na modelização de Integrais. Henriques (2008) mostrou, por meio de análise dos protocolos dos alunos, que o registro gráfico é predominante no ambiente lápis/papel em detrimento do registro analítico.

> Contudo, ao seguir esse caminho, os alunos encontram dificuldades para produzir os gráficos que precisam para interpretar, compreender e resolver os problemas de cálculo de Integrais. Com efeito, a conversão entre o registro gráfico e o registro analítico dos sólidos, parece difícil e problemática. Em geral, os alunos tratam esses registros de forma independente. Essa independência não lhes permite produzir elementos de controle suficientes para estabelecer uma integral (Henriques, 2008, p.9).

Nesse contexto, visando o desenvolvimento do trabalho em torno do ensino e aprendizagem das Integrais múltiplas, utilizamos elementos da teoria dos registros de representação semiótica (Duval, 2003). Tal teoria refere-se a utilização de representações e enfatiza a importância da diversidade desses registros e a articulação entre esses na aquisição dos conhecimentos matemáticos. Segundo Dann (2002), podemos pensar na utilização dos estudos de Duval como uma maneira didática/metodológica, que o professor ou pesquisador pode utilizar se o objetivo é a aquisição do conhecimento. De acordo com Duval (apud Henriques, Attie e Farias,

2007) é importante, no ensino das integrais, compreender o funcionamento de representações semióticas e, principalmente, as suas conversões e suas coordenações.

Segundo Henriques, Attie e Farias (2007) as regras para efetuar uma conversão entre esses registros pode ser simples, mas a passagem de uma representação gráfica de um sólido para sua representação analítica e vice-versa pode ser uma tarefa difícil, pois a representação tridimensional geralmente é difícil de ser visualizada num ambiente lápis/papel bidimensional. Assim, consideramos que as potencialidades dos recursos tridimensionais de um ambiente computacional, como o Winplot, pode ser fundamental no auxílio dessa questão.

Nos recursos tridimensionais do Winplot, pode-se plotar o gráfico de superfícies e também visualizar o volume delimitado por elas. Entretanto, o gráfico da interseção de superfícies é melhor visualizado quando se utiliza a representação das superfícies no sistema de coordenadas paramétricas e isso motiva o estudante a aprender um novo conceito matemático.

Portanto a incorporação de atividades com o uso de recursos tecnológicos tridimensionais constitui um aspecto relevante para o ensino e aprendizagem do cálculo.

> A tecnologia é essencial no processo da visualização e essa por sua vez ocupa um papel fundamental na compreensão de conteúdos matemáticos (...). Stewart (2008) ao enfatizar a compreensão dos conceitos no ensino de cálculo, lembra que a visualização e as experiências numéricas e gráficas, entre outras ferramentas, alteram fundamentalmente a forma como ensinamos os raciocínios conceituais. A animação proporcionada pelos recursos computacionais constitui um elemento fundamental na visualização de forma que as imagens podem ser dinâmicas e interpretadas pelos alunos em outras formas de produzir o conhecimento (SILVA e FERREIRA, 2009, p. 1)

Com o intuito de contribuir com recursos didáticos auxiliados pelas ferramentas tecnológicas para o ensino de cálculo estamos propondo nesse trabalho uma articulação entre a tecnologia e à docência com a utilização de ferramentas gráficas tridimensionais, em particular o software Winplot, no processo de ensino e aprendizagem da integral múltipla.

Metodologia

A atividade consistiu em propor aos estudantes um problema de cálculo de volume de um sólido definido pela interseção de duas ou mais superfícies e a resolução supôs as seguintes etapas:

- Identificação do problema nos ambientes lápis/papel e computacional;
- Construção da maquete do sólido e cálculo do valor numérico do volume;
- Socialização do trabalho.

O trabalho é realizado em equipe haja vista que o trabalho colaborativo propicia trocas de ideias e compartilhamento de habilidades distintas.

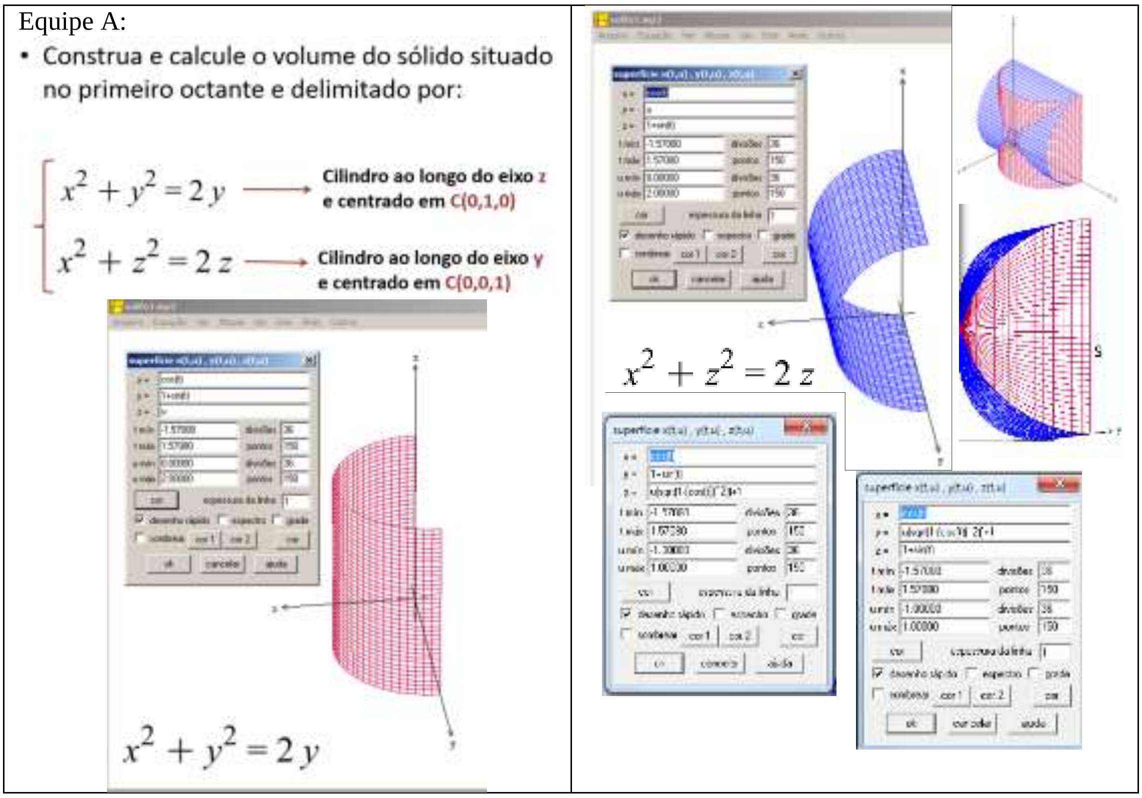
No ambiente lápis/papel o aluno utiliza os conhecimentos matemáticos da Geometria Analítica para identificar as superfícies, suas curvas de interseção e suas projeções nos planos coordenados. No ambiente computacional, o aluno faz as representações gráficas bidimensionais e tridimensionais do sólido.

Na segunda etapa, o aluno constrói a maquete do sólido identificado na primeira etapa e determina o seu volume utilizando os conceitos de integrais duplas ou triplas.

Na última etapa, os alunos socializam o trabalho realizado entre os colegas da classe. Para isso eles usam a maquete, os recursos tecnológicos para a representação gráfica em 2D e 3D da atividade desenvolvida e justificam algebricamente o valor encontrado para o volume do sólido.

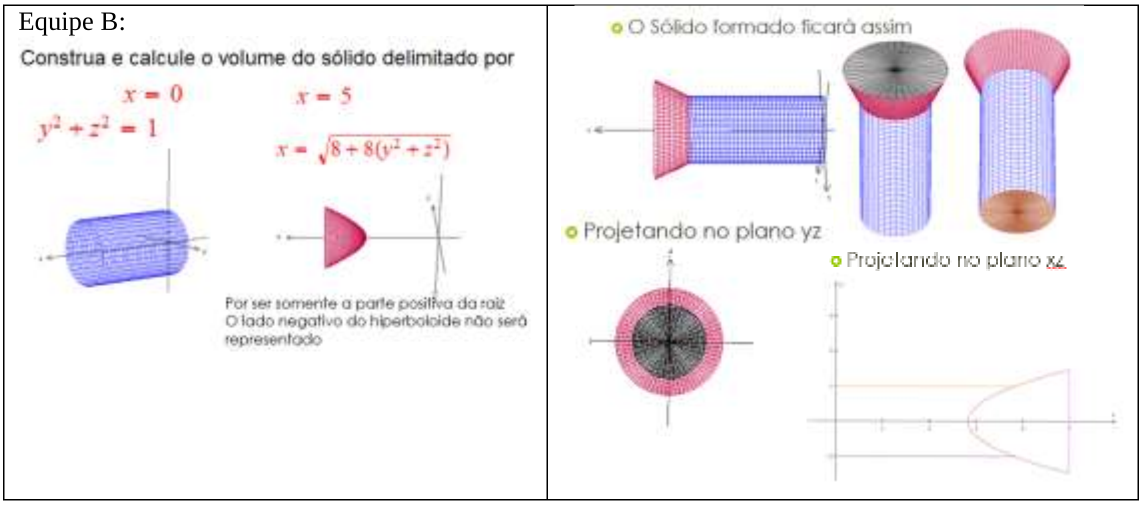
Recortes de apresentações dos trabalhos dos alunos

1) Identificação das superfícies, gráfico tridimensional e parametrizações:



A Equipe A identifica as superfícies dadas por suas representações algébricas fazendo uma conversão dessa representação para o registro gráfico e também realizando o tratamento no registro algébrico[1]. No registro gráfico é plotado primeiramente cada cilindro, na sequência a sobreposição dos dois e por fim o sólido delimitado sem as sobras que evidencia a importância do uso das parametrizações.

2) Representação gráfica tridimensional e projeções:



A equipe B realiza uma conversão da representação algébrica (equações das superfícies) para a representação gráfica das superfícies e em seguida apresenta o sólido delimitado. Além disso, essa equipe também representa a projeção nos planos yz e xz. Observe que a representação algébrica do cilindro e do círculo são idênticas, mas têm representações gráficas e analíticas distintas. Por isso, é importante o aluno saber transitar entre os diferentes registros de representação. Portanto, ao utilizar a representação algébrica $y^2 + z^2 = 1$ cuja representação analítica é $S = \{(x, y, z) \in R^3 / y^2 + z^2 = 1 \ e \ x \in R\}$ ele obterá como representação gráfica um cilindro, enquanto que a mesma equação algébrica cuja representação analítica é $C = \{(y, z) \in R^2 / y^2 + z^2 = 1\}$ representa graficamente um círculo. Quando não são exploradas as representações analíticas surgem dificuldades inerentes ao fato de que os dois objetos matemáticos, círculo e cilindro, possuem a mesma expressão algébrica, podendo inclusive levar ao erro do cálculo da integral (área/volume).

[1] Pela restrição de páginas vários passos da apresentação da Equipe A foram omitidos, incluindo o tratamento algébrico na identificação das superfícies, as projeções e a resolução.

3) Resolução:

Equipe C:

Construa e calcule o volume do sólido delimitado por:

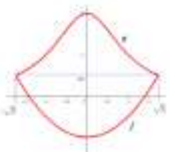
$$2z = x^2 + y^2 - 2 \quad e \quad z = \frac{2}{1 + x^2 + y^2}$$

f g

(12) Região de integração:

Proj. xy, com x ind:

$$R: \begin{cases} -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3} \\ -\sqrt{3-x^2} \le y \le \sqrt{3-x^2} \\ \dfrac{x^2+y^2-2}{2} \le z \le \dfrac{2}{x^2+y^2+1} \end{cases}$$



Logo o volume do sólido é dado por:

$$V = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \int_{\frac{x^2+y^2-2}{2}}^{\frac{2}{x^2+y^2+1}} dz\,dy\,dx$$

(14) Conversão para C. Cilíndricas:

$$f(x,y,z) \to f(r,\theta,z) \quad \to \quad \begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ x^2+y \end{cases}$$

$$f:\ z = \frac{x^2+y^2-2}{2} = \frac{r^2-2}{2}$$

$$g:\ z = \frac{2}{x^2+y^2+1} = \frac{2}{r^2+1}$$

$$R: \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le \sqrt{3} \\ \dfrac{r^2-2}{2} \le z \le \dfrac{2}{r^2+1} \end{cases}$$

Logo o volume do sólido é dado por:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_{\frac{r^2-2}{2}}^{\frac{2}{r^2+1}} r\,dz\,dr\,d\theta$$

Na resolução apresentada pela equipe C, observamos que eles realizaram o tratamento e conversão de registros para chegar a resolução do problema proposto.

4) Maquetes:

Maquete do sólido da Equipe A:	Maquetes do sólido da Equipe B:	Maquetes do sólido da Equipe C:
		

Na produção das maquetes os alunos são muito criativos, utilizando desde materiais recicláveis até o envolvimento familiar para a sua construção. A escala é livre, entretanto solicita-se que a maquete seja visível numa apresentação em classe visando a socialização com os colegas.

Considerações

A exploração da articulação entre os diferentes quadros, mediados por um instrumento tecnológico, pode potencializar elementos importantes na aprendizagem da matemática. O trânsito entre essas diferentes formas de registros constituiu um desafio tanto para alunos quanto para professores, pois nas aulas tradicionais geralmente observa-se que temos alunos com excelentes habilidades algébricas e frágil visualização tridimensional e/ou vice-versa. Esse desafio está presente na linguagem matemática e na significação dos conceitos, como na forma analítica, algébrica e gráfica das superfícies. Explorar a maquete nesses diferentes registros ameniza as dificuldades existentes no ensino de integrais múltiplas. Com a exploração desse trabalho é possível verificar a habilidade dos alunos nas transformações de tratamentos que ocorre dentro do mesmo sistema de representação, por exemplo manipulando algebricamente as equações das superfícies; e conversões que consistem numa mudança de sistema conservando os objetos denotados, por exemplo passando da representação algébrica de uma superfície para a sua representação gráfica.

A construção da maquete propiciou um envolvimento dos alunos em uma aprendizagem ativa. Eles pesquisaram materiais alternativos para a construção da maquete, exploraram softwares gráficos para a construção computacional do sólido, se colocaram na situação de professor, pois precisavam explicar o trabalho para os demais colegas e, portanto, elegeram estratégias de ensino, que na visão deles facilitavam o processo de ensino e aprendizagem.

Nesse trabalho foi possível explorar as conexões importantes da disciplina de CDI-II com as disciplinas de Geometria Analítica e Cálculo Vetorial. Na fase da identificação das superfícies e projeções gráficas no ambiente lápis/papel os alunos necessitaram dos conhecimentos da Geometria Analítica e em geral usaram o sistema de coordenadas cartesianas que nem sempre é o mais simples para a representação gráfica no ambiente computacional. Portanto, o aluno precisou reconhecer as superfícies nos diferentes tipos de sistemas de coordenadas (cartesiana, cilíndricas e esféricas), pois isso facilitou a representação gráfica bem como a resolução da integral.

Uma extensão interessante desse trabalho foi também a conexão com o Cálculo Vetorial, pois no momento de representar computacionalmente o sólido obtido pela interseção das superfícies o aluno não queria plotá-lo com as sobras. Entretanto para fazer os recortes era necessário saber trabalhar com a parametrização de superfícies (conteúdo a ser visto na fase seguinte do curso). Neste momento, evidenciou-se uma boa motivação por parte dos alunos para aprender esse conteúdo, pois eles tinham um problema para apresentar e queriam fazê-lo da melhor forma possível.

Também foi notório que as potencialidades dos recursos tridimensionais oferecidos pelas ferramentas computacionais propiciaram a construção de atividades que podem auxiliar a visualização das integrais múltiplas. Porém, as possibilidades que os instrumentos tecnológicos oferecem para o ensino de cálculo necessitam, por parte dos professores, uma forte implicação e um grande trabalho colaborativo. Sabemos que a questão do trabalho colaborativo dentro do domínio da educação não é nova, mas deve ser compreendida como um processo contínuo, fruto de trocas entre os pesquisadores, professores e alunos. Devemos lembrar que é a aplicação dos recursos em classe que fizeram (e fazem sempre) encontrar pistas de prolongamentos e evoluções dos recursos.

Referências bibliográficas

Alves, F.R.V., Borges, H. e Machado, R.C.C. (2008). Aplicação da Sequência Fedathi na Aquisição do Processo de Integral Tripla com o Auxílio do Maple. In: *XII EBRAPEM - Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática*. Rio Claro. Disponível em: http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/9-2-A-gt10_VIEIRA-2_TC.pdf. Acessado em:25 de junho de 2013.

Dann, R.F. (2002) Registros de representação. In: Machado, S.D.A. et al. *Educação Matemática: uma introdução*. São Paulo, SP: EDUC, p. 135-153.

Duval, R. (2003). Registros de representação semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: Machado, S.D.A. et al. *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. Campinas, SP: Papirus, p.11-33.

Henriques, A., Attie, J.P. e Farias, L.M.S. (2007). Referências teóricas da didática francesa: análise didática visando o estudo de integrais múltiplas com auxílio do software Maple. In: *Educação Matemática e Pesquisa*. São Paulo, v. 9, n. 1, p. 51-81.

Henriques, A. (2008). O papel de técnicas instrumentais no ensino e aprendizagem de integrais múltiplas usando Maple. In: *11 th Internacional Congress on Mathematical Education*, Monterrey.

Silva, J.I.G. e Ferreira, D.H.L. (2009) O uso de tecnologias na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. Anais: *XIV Encontro de Iniciação Científica da PUC* - Campinas - 29 e 30 de setembro de 2009. Disponível em: http://www.puc-campinas.edu.br/websist/portal/pesquisa/ic/pic2009/resumos/2009824_134141_207335402_res08C.pdf Acessado em: 24 de junho de 2013.

Stewart, J. (2009). *Cálculo.* Vol.2. São Paulo: Cengage Learning.

Anexo I

Construa e calcule o volume do sólido delimitado simultaneamente por $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + z^2 = 1$.

Resolução: 1) **I**dentificamos, no ambiente lápis/papel, as duas superfícies que delimitam o sólido e fazemos um esboço do sólido.

2) Representamos no ambiente computacional as superfícies cilíndricas que delimitam o sólido, conforme as figuras 1a e 1b e também representamos a interseção dos dois cilindros (figura 2a), bem como o sólido resultante na figura 2b.

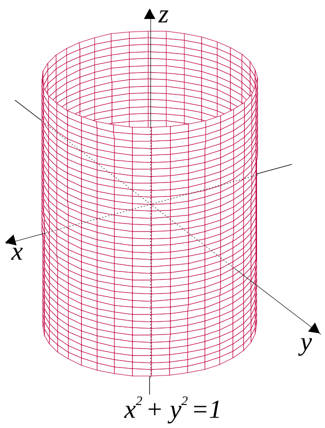


Figura 1a

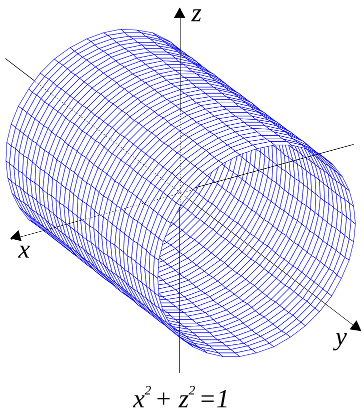


Figura 1b

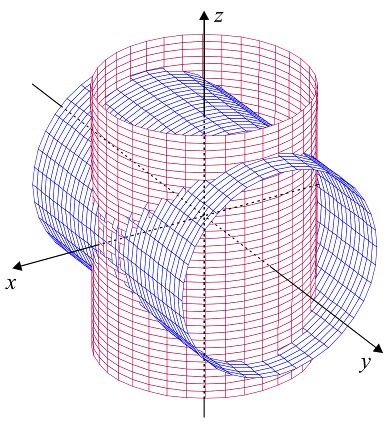


Figura 2a

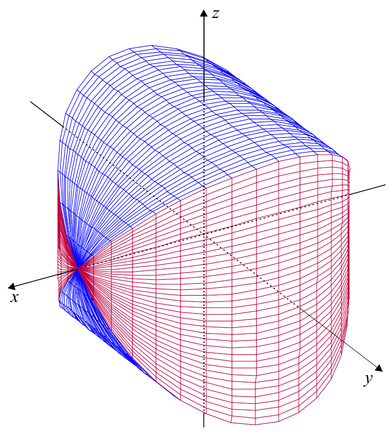


Figura 2b

3) Identificamos que esse sólido possui simetrias em relação à origem, aos eixos e aos planos coordenados, então podemos trabalhar com o gráfico apenas no primeiro octante para obter seu volume. A figura 3 representa o sólido delimitado no primeiro octante.

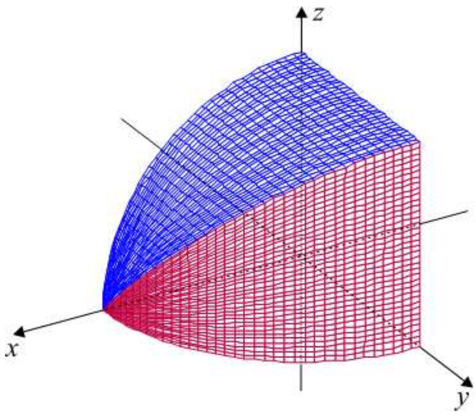


Figura 3

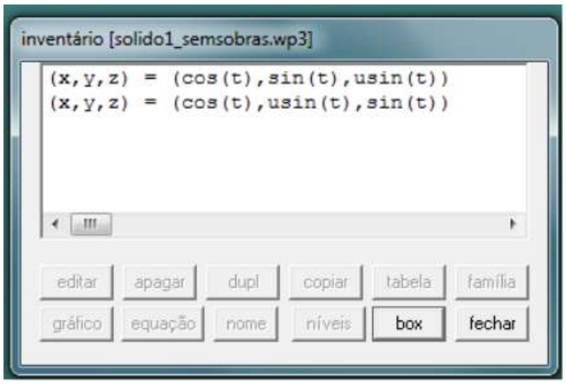


Figura 4

4) Representamos graficamente o sólido no Winplot por ser um software gratuito. Para o uso do Winplot é preciso parametrizar as superfícies para obter a representação do sólido sem as sobras. Na figura 4 pode-se observar as parametrizações usadas para sua construção, sendo que o parâmetro t varia de 0 a $2\,\pi$ e o parâmetro u varia de -1 a 1.

5) Apresentamos a maquete: a figura 5 é uma composição de fotos dos sólidos construídos pelos alunos para esse exercício.

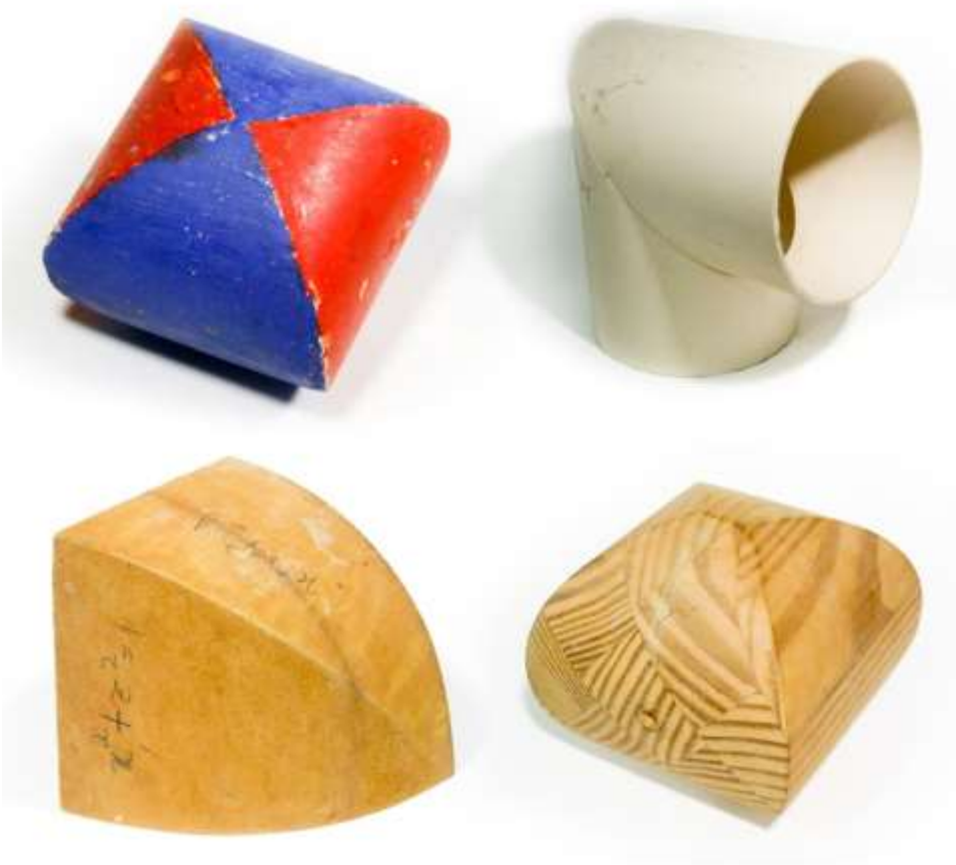


Figura 5

6) Projetamos o sólido no plano *xy* e obtivemos a circunferência $x^2+y^2=1$ representada na figura 6.

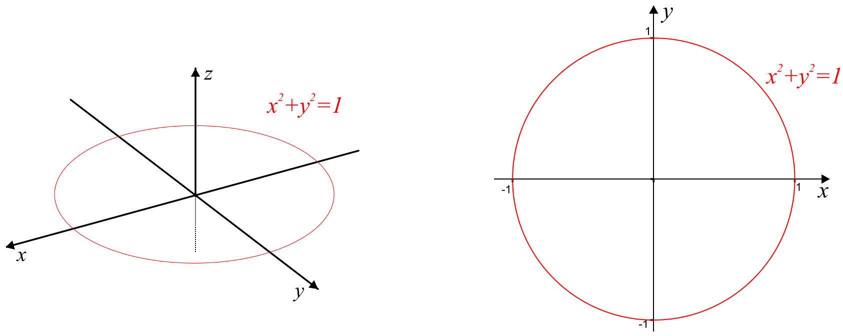


Figura 6

7) Montamos as integrais que calculam o volume desse sólido e para tal é preciso escolher em qual sistema de coordenadas iremos trabalhar. Nesse exemplo o primeiro sistema considerado é geralmente o sistema de coordenadas cilíndricas por estar envolvendo cilindros. Usando a projeção no plano *xy*, a simetria no primeiro octante e o sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) obtemos os limitantes

$$\begin{cases} 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 1 \\ 0 \le z \le \sqrt{1 - r^2 cos^2(\theta)} \end{cases}$$

e assim o volume é dado por $V = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-r^2cos^2(\theta)}} r \, dzdrd\theta$.

Porém, essa expressão não é a mais simples para obter o valor numérico. No sistema de coordenadas cartesianas tomando como base a projeção sobre o plano *xy*, no primeiro octante como apresentado na figura 3, com x como variável independente obtemos os limitantes

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2} \\ 0 \le z \le \sqrt{1 - x^2} \end{cases}$$

e consequentemente o volume é dado por

$$V = 8\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dzdydx = 8\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}\, dydx = 8\int_0^1 \left(1 - x^2\right) dx = 8\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{16}{3} \text{u.v.}$$