

ANTECEDENTES Y FUNDAMENTACIÓN DE UNA INVESTIGACIÓN SOBRE ERRORES EN LA RESOLUCIÓN DE TAREAS ALGEBRAICAS

José García¹, Isidoro Segovia² y José Luis Lupiáñez²

¹Universidad de Guadalajara (México), ²Universidad de Granada

Resumen

Este artículo hace un recorrido sobre diferentes perspectivas que a través del tiempo se le han asignado a la definición del término álgebra, además de los diversos enfoques desde donde se han abierto distintas líneas de investigación con el objetivo de indagar las posibles fuentes de error en la enseñanza y aprendizaje de la misma. Finalmente, para evidenciar los errores más comunes que los estudiantes presentan al resolver distintas tareas algebraicas, se tomó en cuenta el trabajo de investigación de García (2010) realizado con un grupo de estudiantes universitarios de primer curso, con el objetivo de caracterizar las principales fuentes de errores que se presentan en las producciones de los alumnos al resolver dichas tareas.

Palabras claves: álgebra; tareas algebraicas; errores; estudiantes universitarios.

Abstract

This article talks about the different perspectives over time has been allocated to the meaning of algebra, as well as the various approaches from which opened various lines of research aimed to investigate the possible sources of error in the teaching and learning of it. Finally, to highlight the common mistakes that students make when solving algebraic variety of tasks, took into account the research of Garcia (2010) conducted with a group of first-year university students, in order to characterize the main sources of errors that occur in the productions of the students to solve such tasks.

Keywords: algebra; algebraic tasks; mistakes; college students.

El álgebra desde su nacimiento como conocimiento científico, fue concebida como una generalización de la aritmética para la resolución de ecuaciones y el estudio de las operaciones y sus propiedades. Sin embargo, a través del tiempo ha sufrido diferentes variaciones, por lo que el presente estudio pretende, en un primer momento, realizar una aproximación a la definición del concepto de álgebra, analizando las características más comunes estudiadas desde las diferentes perspectivas establecidas por algunos investigadores de la educación matemática. El recorrido, evidencia, además, la existencia de diversos conceptos que pueden ser considerados como fuente de errores y dificultades en la enseñanza y aprendizaje del álgebra.

Para ejemplificar lo anterior, se toma en cuenta la investigación previa de García (2010), en donde se analizan los errores encontrados al resolver distintas tareas algebraicas por parte de estudiantes de primer curso universitario, a través de la revisión de sus respuestas en 153 pruebas aplicadas en el Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara, México.

Cabe señalar que los alumnos de primer curso universitario acceden a este nivel, después de una formación escolar previa, en donde hipotéticamente adquieren conocimientos algebraicos en los distintos cursos de matemáticas de la educación secundaria y del bachillerato, como quedo comprobado al analizar los contenidos de los currículos del álgebra documentados de los niveles mencionados en distintos planes educativos, en los cuales se reconoció la presencia de los distintos enfoques que se describen en este trabajo y sin embargo, los distintos errores identificados en las producciones de los estudiantes en el trabajo de García (2010), revelan un aprendizaje deficiente de los mismos.

La fase inicial de esta investigación consistió en una revisión bibliográfica de las distintas concepciones del álgebra que forman parte de la instrucción matemática de los estudiantes, y una vez que consideramos los distintos contenidos que implican la enseñanza del álgebra desde esas perspectivas, inferimos la necesidad del diseño y fundamentación de un instrumento de evaluación que nos permita explorar los conocimientos adquiridos por los alumnos que reciben la instrucción del álgebra bajo los enfoques mencionados. Así mismo, estimamos que al evaluar las producciones de los alumnos de las distintas tareas algebraicas propuestas en el citado instrumento, podremos obtener información valiosa al analizar los errores que se presenten en dichas producciones, para posteriormente orientarnos hacia el estudio de las posibles fuentes que pudieran estar en la base de los distintos errores encontrados. Con ese fin, un segundo eje de este trabajo gira en torno a la revisión de las investigaciones acerca de los errores en la educación matemática que tratan de aclarar las fuentes de errores más comunes.

Enfoques del álgebra

De acuerdo con Katz (2007, p.41), Euler, definía álgebra en el siglo XVI, como “la ciencia que enseña a determinar las cantidades desconocidas a través de lo que se sabe”. Así mismo, Lacampagne en 1995, considera álgebra como el lenguaje de las matemáticas, sin embargo, otra idea extendida es que el álgebra es la ciencia que se encarga de resolver ecuaciones, graficar funciones en el plano de coordenadas, y muchos otros algoritmos que se realiza con las omnipresentes letras x e y .

La naturaleza del álgebra tiene una de sus raíces epistemológicas en el problema de las consideraciones históricas del álgebra como una generalización de la aritmética y su definición precisa ha estado en el centro de las discusiones desde siempre. Kieran (1990), por ejemplo, habla de un serio debate entre los matemáticos británicos en la primera mitad del siglo XX. Por un lado, sostenían la posición de que el álgebra es la aritmética universal (o aritmética generalizada). En una corriente contraria, debatían si el álgebra era puramente un sistema de símbolos arbitrarios, esencialmente regida por principios arbitrarios.

Por su parte Wheeler (1996), sostiene que el álgebra debería ser una etapa terminal de la aritmética, ya que reconoce que el álgebra resuelve problemas que la aritmética no considera dentro de su campo de estudio.

Durante el siglo XX, se desarrolló el concepto de que el álgebra es la disciplina que involucra la manipulación de símbolos, la resolución de ecuaciones y expresiones en donde se implica la simplificación de símbolos. Sin embargo, el álgebra es más que mera manipulación de símbolos. Coincidimos con el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), quienes afirman que el álgebra comprende además las relaciones entre cantidades, incluyendo las funciones, formas de representar las relaciones matemáticas, y el análisis del cambio. Sharma (1988) sostiene que hacer o realizar

álgebra es la manipulación de los símbolos para producir otro tipo de relaciones y soluciones a los ejemplos, ejercicios y problemas, que en determinado momento se pueden plantear.

Por su parte Lane y Birkhoff (1999), consideran que el álgebra empieza como el arte de manipular sumas, productos y potencias de los números; las reglas para estas manipulaciones deben de ser válidas para todos los números, por lo que dichas manipulaciones nos deben llevar a la utilización de letras en lugar de números.

Más allá de las discusiones epistemológicas y de contenido que en torno al álgebra se han desarrollado, cabe añadir que diversos investigadores han descrito diferentes caracterizaciones del álgebra que se pueden encontrar en el currículo de matemáticas. Por ejemplo Kaput (1995) afirmó que hay varios conceptos de álgebra en el programa de enseñanza de las matemáticas, él sostiene que, en este caso, el álgebra se basa en la generalización, la manipulación de la sintaxis, el aprendizaje de la estructura, el estudio de las funciones, relaciones y variaciones, y el lenguaje de modelado.

Asimismo, Kieran (1996) caracteriza el álgebra escolar como una actividad de generación. Esta actividad consiste en la formación de las ecuaciones como incógnitas o variables que representan las situaciones problemáticas, las expresiones que forman a partir de patrones numéricos y geométricos, y la formación de las expresiones de las relaciones numéricas. También caracteriza al álgebra escolar como una actividad de transformación, es decir, en actividades que se basan en normas como la factorización, la sustitución, sumar, restar, multiplicar, dividir polinomios, resolver ecuaciones y expresiones simplificar y trabajar con ecuaciones y expresiones equivalentes. Además de que también Kieran caracteriza el álgebra escolar como las actividades “global/meta-level”, es decir, las actividades para las que, el álgebra se utiliza como una herramienta, pero que no son exclusivas de la misma. Entre las actividades que pueden considerarse de este tipo están algunas soluciones de problemas, el modelado, los esquemas, la generalización, el análisis de las relaciones, las justificaciones, demostraciones y las predicciones.

Bednarz, Kieran y Lee en 1996 desarrollaron cuatro enfoques relacionados con los objetivos y contenidos del currículo de álgebra en la escuela, que se basan en los cuatro aspectos diferentes del álgebra y en cada uno de ellos pone un especial énfasis. Los aspectos a los que se refieren son: el álgebra como la expresión de la generalidad, el álgebra como una herramienta para resolver problemas, el álgebra como modelado y uso de múltiples representaciones y, el álgebra como el estudio de las funciones

Una perspectiva utilitarista y mas apegada al currículo escolar, la encontramos en Usiskin (1998), quien propone enfoques para el álgebra a partir de lo que hacemos con ella. Él sostiene que los propósitos para el álgebra son determinados por las diferentes concepciones, y usos de las variables.

Así pues Usiskin, desarrolla la concepción del álgebra como: 1) aritmética generalizada, en donde las variables pueden ser consideradas como patrones generalizadores; 2) estudio de procedimientos para la resolución de ciertos tipos de problemas en los que las variables aparecen como incógnitas o constantes; 3) el estudio de las relaciones entre las cantidades en que las variables varían; y 4) el estudio de la manipulación y justificación de las estructuras en las que la esencia se encuentra en las propiedades de las variables, en las relaciones entre una o varias x , y o n ya sean sumandos, factores, bases, o exponentes. Cabe señalar que en esta percepción, la variable, se ha convertido en un objeto arbitrario, en una estructura abstracta relacionada con ciertas propiedades algebraicas.

Estas distintas perspectivas del álgebra concebidas por Usiskin (op. cit.), son compartidas por diversos autores que concuerdan en percibir el álgebra como una generalización de la aritmética (Kaput,1995 y 1999; Mason,1996; Bell , 1996; Hewitt,1998; Kieran,1989 y 2006; Socas Palarea y Ruano, 1997),como un método de resolución de problemas (Kaput,1995; Langrall y Swafford,1997; Filloy, Rojano y Puig 2008; Bell, 1996; Socas, Palarea y Ruano, 1997), como el estudio de las funciones (Fey y Good,1985; Kaput,1995; Dugdale, Thompson, Harvey, Demana, Waits, Kieran, McConnell, y Christmas 1995; Bell, 1996; Driscoll, 1999), así como el estudio de las estructuras abstractas (Kaput ,1995; Ruano, Socas y Palarea, 1997; NCTM , 2000).

A manera de conclusión, podemos decir que no existe un acuerdo global para definir el término álgebra, ya que involucra diferentes tareas y procesos cognitivos, por lo que es difícil que exista un consenso en el que todos los involucrados estén satisfechos. Por consiguiente, orientamos nuestro estudio hacia la investigación de la valoración de las habilidades algebraicas de los alumnos de primer curso universitario al resolver distintas tareas algebraicas, relacionadas con los cuatro enfoques antes mencionados (Generalización de la aritmética, método para la resolución de problemas, herramienta para el estudio de las funciones y estudio de estructuras matemáticas).

Considerando estos enfoques, se propondrá la aplicación de un instrumento de evaluación que nos proporcione, por un lado, información relacionada con los conocimientos algebraicos que los estudiantes adquieren bajo estas perspectivas, respecto a la resolución de tareas algebraicas, y por otro, evidencias de errores, que nos permitan investigar las principales fuentes que se encuentran en las bases de los mismos.

En virtud de lo anterior, presentamos a continuación, la revisión de literatura de trabajos relacionados con la investigación de los errores en la educación matemática, como fundamento para el análisis de los errores que pudieran presentarse como consecuencia de la aplicación del instrumento de evaluación referido anteriormente.

Errores en la educación matemática

Rico (1995), considera que los errores forman parte de las producciones de los alumnos durante el aprendizaje de la matemática y constituyen datos objetivos que se encuentran frecuentemente en todo proceso educativo.

Además, Rico (Op. cit), afirma que la investigación en torno a los errores en el proceso de aprendizaje es una de las principales preocupaciones actuales de la Educación Matemática. Para sustentar lo anterior, Rico, describe cuatro líneas actuales de investigación en torno a los errores:

- Estudios sobre análisis, causas, elementos, taxonomías de clasificación de los errores.
- Trabajos acerca del tratamiento curricular de los errores.
- Estudios relativos a la formación de los docentes en cuanto a la capacidad para detectar, analizar, interpretar y tratar los errores de sus alumnos.
- Trabajos de carácter técnico que incluyen técnicas estadísticas, como contrastar hipótesis para el análisis de los errores.

Estimamos que nuestro estudio, está relacionado principalmente con la primera línea de investigación, sin descartar las posibles implicaciones que pudieran surgir con las demás líneas.

En la investigación bibliográfica realizada, identificamos diversos trabajos que tratan de clasificar los errores de acuerdo a sus causas, pero sin tener especificidad en el

contenido algebraico, y posteriormente, al efectuar una revisión más detallada desde el punto de vista del álgebra de esos errores, consideramos que muchos de ellos tienen su concreción en ella.

Por otra parte, también identificamos, aquellos errores cuyas fuentes son consideradas de carácter procedimental, es decir, cuyas causas pudieran generarse en el proceso de resolución de las tareas, y que han sido descritos en la bibliografía consultada, algunos de esos errores serían, los que se mencionan a continuación: errores de manipulación de distintas expresiones matemáticas (Ruano, Socas y Palarea, 2003), errores ocasionados en la transcripción de la información (Esteley y Villareal; 1996; Astolfi, 1999), secuencias incoherentes en los procedimientos de los alumnos (Caputo y Macías, 2006), aplicación de algoritmos defectuosos (Roberts, 1968), errores de cálculo simple (Roberts, 1968; Esteley y Villareal, 1996), errores en los cuales se truncan algunas operaciones o no se completan las demostraciones (Engelhart, 1977; Caputo y Macías; 2006; Mosvshovits et al., 1987; Esteley y Villareal, 1996), y algunos errores fortuitos (Cox, 1975; Zigmund, Vallecorsa y, Silverman; 1981).

Así mismo, se reconocieron aquellos errores cuyas fuentes son consideradas de carácter conceptual u originados en los procesos de adquisición del conocimiento algebraico, siendo algunos de estos, los que se refieren a continuación: errores ocasionados por inferencias erróneas (Mosvshovitz et al, 1987; Esteley y Villareal, 1990; Astolfi, 1999), aquellos ocasionados por la interferencia de los conocimientos previos (Davis, 1984; Caputo y Macías, 2006); los originados por la estructura semántica del lenguaje matemático (Davis, 1984; Radatz, 1980; Mosvshovitz et al., 1987; Esteley y Villareal, 1990), los provocados por las representaciones inadecuadas de la información (Davis, 1984); los motivados por la rigidez del pensamiento (Radatz, 1980); aquellos cuyo origen está en las propiedades y reglas aritméticas (Astolfi, 1999; Ruano, Socas y Palarea 2003), los engendrados por conceptos estructurales mal comprendidos (Zigmund et al., 1981; Davis, 1984; Mosvshovitz et al., 1987; Esteley y Villareal, 1990; Astolfi, 1999; Caputo y Macías, 2006) y los originados por una sobrecarga cognitiva (Astolfi, 1999).

En cuanto a las investigaciones vinculadas con el análisis de errores relacionados con contenidos algebraicos, destacamos el trabajo de Booth (1984), quien cita los estudios realizados en el proyecto *Strategies and Errors in Secondary Mathematics (S.E.S.M.)*, para explicar algunas de las causas que, a su juicio, originan errores al trabajar con expresiones de carácter algebraico, en dichos estudios se describen las siguientes categorías como fuentes de los errores:

- La naturaleza y el significado de los símbolos y las letras.
- El objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas.
- La comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes.
- El uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimientos.

En este mismo sentido, recalcamos el trabajo de Matz (1980), quien sostiene que los errores que se presentan en la resolución de tareas algebraicas, pueden ser resultado razonable de los intentos por parte de los estudiantes de adaptar sus conocimientos previos a las nuevas situaciones que se les presentan. Así mismo, afirma que los estudiantes recurren a sus conocimientos previos, para resolver las nuevas situaciones que se les presentan y que generalmente dichos conocimientos consisten en reglas básicas de la aritmética, las cuales han estudiado con anterioridad y además, hacen uso de distintas técnicas de extrapolación de las que se auxilian para la resolución de dichas situaciones. Estas técnicas de extrapolación, les puede generar dos escenarios al momento de utilizarlas para resolver problemas, el primero sería un contexto conocido

en el cual, aparentemente dominan las reglas para la resolución del problema y un segundo entorno nuevo en el cual se ven obligados a la creación nuevos procedimientos o intentar adaptar sus procedimientos conocidos a las nuevas condiciones de las situaciones que se les presentan.

Por consiguiente, y continuando bajo estas perspectivas; retomamos el trabajo previo (García, 2010) en el cual se detectaron diez categorías de errores que en su momento, y bajo los objetivos que se perseguían, sus fuentes fueron descritas como de carácter procedimental. Así pues, recurrimos a las categorías propuestas de Booth (Op. cit), con la acotación de que consideramos que éstas son muy amplias y debemos profundizar un poco más para precisar el análisis de las causas de los errores.

La revisión de nueva literatura nos permitió elaborar un análisis más detallado de esos errores que nos orientó hacia la búsqueda de fuentes conceptuales y procedimentales en la base de los mismos.

Presentamos a continuación algunos ejemplos de esa nueva revisión de los errores encontrados.

Ejemplo 1

Efectuar la siguiente división: $(2y^3 + 5y^2 + 2y + 15) / (y + 3)$

Solución: $2y + 5y + 2 + 5$

En este caso produce una disociación entre letras con números y números que no van acompañados de letras; así los números acompañados por letras se operan de manera independiente de los números que van solos; divide por tanto las expresiones con letras por y, y 15 lo divide por 3.

Inicialmente, este error fue clasificado como debido a procedimientos propios incorrectos e inferencias no validas (García, 2010). Y complementado nuestra visión encontramos que estos errores estarían asociados a la naturaleza y significado de los símbolos y las letras en el álgebra como lo sugiere Booth (1984), quien sostiene que a pesar de que, aparentemente, para los estudiantes es más fácil concebir que las letras representan números con valores únicos, en algunos casos pueden manejarlas como entidades más que como cantidades, y es común que inventen reglas para operar con los números por un lado y agrupar o eliminar las letras por otro.

Ejemplo 2

Cuando se les indica factorizar la siguiente expresión, se tuvo como respuesta:

$$8x^2y^3 + 4x^3y^2 + x^2y^2 - 2xy^2 = 11x^8y^9$$

En este caso observamos como el estudiante realiza la suma de los coeficientes por separado y la de los exponentes por otro lado.

Estos errores se habían clasificado inicialmente como: Uso de la aritmética básica ignorando las reglas del álgebra (García, 2010). Al realizar un nuevo análisis, los consideramos relacionados con la segunda de las clasificaciones de Booth (1984), quien sugiere que la fuente de este tipo de error se puede encontrar en las dificultades que presentan los estudiantes para separar el álgebra de la aritmética, al considerar el álgebra como una generalización de la aritmética y por consecuencia tratan de aplicar las reglas que conocen de la aritmética en las expresiones algebraicas. Así mismo, dichos errores pueden ser causados, por la tendencia común de los estudiantes de buscar obtener una respuesta numérica de las operaciones algebraicas, lo que los lleva a realizar operaciones inventadas, que los conducen a resultados erróneos.

Ejemplo 3

Esta es la respuesta encontrada al resolver un sistema de ecuaciones lineales:

$$2x + 2y + 2z = 4 \quad 2x + 2y + 2z = 6xyz$$

$$4x + 10y + 6z = 24x + 10y + 6z = 20xyz$$

$$6x - 2y - 4z = -2 \quad 6x - 2y - 4z = 8xyz$$

En este ejemplo, se les pedía a los estudiantes resolver un sistema de ecuaciones lineales y en este caso vemos como los resuelven, sumando los coeficientes y agrupando las incógnitas del sistema.

Clasificamos estos errores inicialmente dentro de la categoría: Procedimientos propios incorrectos e inferencias no válidas (García, 2010). Estos errores los relacionamos con las categorías descritas por Booth (1988), en las cuales dichos errores pudieran tener su origen en el objetivo de la actividad algebraica y la naturaleza de sus respuestas. Cabe añadir, que otra fuente de error de estos errores, puede estar en el hecho de que en la aritmética, el centro de actividad es encontrar soluciones numéricas concretas, y por lo tanto, muchos estudiantes no se dan cuenta y suponen que en las cuestiones algebraicas se les exige siempre una solución única y numérica. Al mismo tiempo estos errores pueden explicarse a partir de la técnica de extrapolación descrita por Matz (1980), como rescritura del problema, en la cual menciona, que algunos estudiantes cuando se enfrentan a una situación desconocida, tratan de describir las condiciones del problema intentando adaptarlo a sus conocimientos previos y en muchas ocasiones, tan solo insertan sus reglas conocidas en el nuevo contexto, en este caso la suma de los coeficientes de las incógnitas, inventando reglas de agrupación de las incógnitas y finalmente “arreglan” los resultados para que parezcan correctos.

En un primer análisis de los errores encontrados en el estudio de García (2010), se obtuvieron entre otros resultados, los que destacamos a continuación y en los cuales se evidenciaron, entre otras cosas:

- Un rendimiento de los estudiantes bastante deficiente en la resolución de distintas tareas algebraicas: Productos notables, ecuaciones lineales, operaciones con expresiones algebraicas y desigualdades.
- Una amplia gama de errores presentes en sus producciones relacionadas con la resolución de distintas tareas algebraicas: Se distinguieron 10 categorías de errores.
- Diversos errores desfasados con el nivel de enseñanza donde se aplicaron las pruebas.

Los últimos resultados referidos, fueron los que nos abrieron una línea de investigación para continuar con nuestro trabajo, ya que es nuestro interés profundizar en el estudio de las probables fuentes que pudieran estar en las bases de los errores hallados.

Conclusiones

En resumen, la revisión de la literatura ha puesto de manifiesto que no hay una definición única del álgebra y pero si distintas aproximaciones que son compatibles, además no encontramos una definición consensuada del término álgebra. La investigación realizada hasta el momento nos ha permitido observar grandes similitudes entre los enfoques mencionados y la práctica docente derivada de los distintos documentos curriculares de los diferentes planes educativos revisados en nuestro trabajo.

A manera de conclusión final, se propone, una perspectiva holística del álgebra, la cual se estructura con base en las definiciones y enfoques mencionamos anteriormente y sustentada en los distintos trabajos de investigación revisados. Dicha perspectiva estriba en considerar el álgebra como:

- Una generalización de la aritmética.
- Un método para la resolución de problemas.
- Una herramienta para el estudio de las funciones.
- Como estudio de estructuras matemáticas.

Consecuentemente con lo anterior, consideramos que surge la necesidad de fundamentar y diseñar un instrumento que nos permita evaluar y caracterizar los conocimientos de los estudiantes acerca de esa visión holística del álgebra que estamos considerando, el cual nos permita analizar y caracterizar las distintas habilidades cognitivas de carácter operacional y las habilidades cognitivas de carácter conceptual, presentes en las producciones de los alumnos de primer curso universitario al resolver distintas tareas algebraicas. Para posteriormente, una vez que se obtengan resultados de la aplicación del instrumento de evaluación, realizar la organización y caracterización de los errores que se manifiestan en las producciones antes mencionadas y poder establecer las fuentes en donde se encuentran las bases de esos errores.

Referencias

- Astolfi, J. P. (1999). *El error, un medio para enseñar*. Sevilla: Diada
- Bednarz, N., Kieran, C., y Lee, L. (Eds.). (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Bell, A. (1996). Problem-solving approaches to Algebra: Two aspects. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*, (pp. 167-185). Dordrecht: Kluwer.
- Caputo, S. y Macías, D. (2006). *Análisis de los errores de los alumnos de la asignatura "Álgebra I" al elaborar demostraciones*. Disponible en: <http://www.unne.edu.ar/Web/cyt/cyt2006/09-Educacion/2006-D-012.pdf>.
- Cox, L. (1975). Systematic errors in the four vertical algorithms in normal and handicapped populations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 6(4), 202-220.
- Driscoll, M (1999). *Fostering Algebraic Thinking: A Guide for Teachers, Grades 6-10*. Portsmouth, NH: Heinemann
- Dugdale, S., Thompson, P., Harvey, W., Demana, F., Waits, B., Kieran, C., Mcconnell, J., y Christmas, P. (1995). Technology and algebra curriculum reform: Current issues, potential directions, and research questions. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 14(3), 325-357.
- Engelhardt, j. M. (1977). Analysis of children's computational errors: a qualitative approach. *British Journal of Educational Psychology*, 47,149–154.
- Esteley, C.; Villarreal, M. (1990). *Categorización de errores en Matemática*. XIII REM. San Luis
- Esteley, C.; Villarreal, M. (1996). *Análisis y Categorización de errores en Matemática*. *Revista de Educación Matemática*. Volumen 11. N° 1. (16–35). Universidad Nacional de Córdoba. Córdoba.
- Fey, J. T., y Good, R. A. (1985). Rethinking the sequence and priorities of high school mathematics curricula. In C. R. Hirsch y J. Zweng (Eds.), *The secondary school mathematics curriculum, 1985 yearbook* (pp. 43-52). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Filloy, E.; Rojano, T. y Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. New York: Springer
- García, J. (2010). *Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer ingreso en nivel licenciatura* (Tesis de fin de Master). Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, Granada
- Hewitt, D. (1998). Approaching arithmetic algebraically. *Mathematics Teaching*, 163, 19-29.
- Kaput, J. (1995). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by “algebrafying” the K-12 curriculum. *Paper presented at the Annual Meeting of the National Council of Teachers Mathematics*. Boston MA.
- Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema, y T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Katz, V. J. (2007). Learning algebra: An historical overview. En V. J. Katz (Ed.), *Algebra: Gateway to a technological future* (pp. 7-25). Washington, DC: The Mathematics Association of America.
- Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. En P. Neshier y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 97-136 ST - Cognitive processes involved in learn). Cambridge University Press.
- Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. En C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde, y A. Pérez (Eds.), *8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures* (pp. 271-290). Sevilla: S.A.E.M. Thales.
- Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 11-50). Rotterdam: Sense.
- Lane, S. M. y Birkhoff, G. (1999). *Algebra*, AMS Chelsea Publishing.
- Langrall, C. W. y Swafford, J. O. (1997). Grade six students’ use of equations to describe and represent problem situation. *Paper presented at the American Educational Research Association*, Chicago, IL.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (pp. 65–86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Children’s Mathematical Behaviour*, 3(1), 93-166.
- Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O. y Inbar, S., (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(1), pp. 3-14.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Radatz, H. (1980). Student’s Errors in the Mathematical Learning Process: A Survey. *For the Learning of Mathematics*. 1(1), 16-20.
- Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las Matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico, y P. Gómez (Eds.). *Educación Matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.
- Roberts, G. H. (1968). The failure strategies of third grade arithmetic pupils, *Arithmetic Teacher*, 15, 442-446.

- Ruano, R.; Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 311-322).
- Sharma, M.C. (1988). Math Notebook (From Theory to Practice). *Information for Teachers/Parents of Children with Learning Problems in Mathematics*. Volumes 5 and 6. Center for Teaching/Learning of Mathematics, Framingham, MA.
- Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variable. En A. F. Coxford y A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12 (1988 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics)* (pp. 8-19). Reston, VA: NCTM.
- Wheeler, D. (1996). Backwards and Forwards: Reflections on different approaches to algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 317-325). Netherlands: Kluwer Publishers.
- Zigmond, N., Vallecorsa, A., y Silverman, R. (1981). *Assessment for instructional planning in special education*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall