Epsilón - *Revista de Educación Matemática* *2010, Vol. 27(2), nº 75, pp. 137-154*

Problemas en la Resolución de Problemas

F. Damián Aranda Ballesteros
Manuel Gómez Lara

1. JUSTIFICACIÓN

La resolución de problemas es considerada en la actualidad la parte más esencial de la educación matemática. Mediante la resolución de problemas, los estudiantes experimentan la potencia y utilidad de las Matemáticas en el mundo que les rodea.

(Extracto de contenidos sacado de la página web http://platea.pntic.mec.es/jescuder/prob_int.htm)

- El párrafo 243 del Informe Cockroft señala en su punto quinto que la enseñanza de las Matemáticas debe considerar la "resolución de problemas, incluyendo la aplicación de las mismas situaciones de la vida diaria".
- El N.C.T.M. de Estados Unidos, declaraba hace más de diez años que "el objetivo fundamental de la enseñanza de las Matemáticas no debería ser otro que el de la resolución de problemas".
- En el libro de Hofsdadter, Gödel, Escher y Bach, se dice que "las capacidades básicas de la inteligencia se favorecen desde las Matemáticas a partir de la resolución de problemas, siempre y cuando éstos no sean vistos como situaciones que requieran una respuesta única (conocida previamente por el profesor que encamina hacia ella), sino como un proceso en el que el alumno estima, hace conjeturas y sugiere explicaciones".
- Santaló (1985), gran matemático español y además muy interesado en su didáctica, señala que "enseñar matemáticas debe ser equivalente a enseñar a resolver problemas. Estudiar matemáticas no debe ser otra cosa que pensar en la solución de problemas".
- En una conferencia pronunciada en 1968 George Polya decía: "Está bien justificado que todos los textos de matemáticas, contengan problemas. Los problemas pueden incluso considerarse como la parte más esencial de la educación matemática. Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema, hay un cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto; pero, si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve

por propios medios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo”.

- M. de Guzmán (1984) comenta que “lo que sobre todo deberíamos proporcionar a nuestros alumnos a través de las matemáticas es la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas matemáticos y no matemáticos. ¿De qué les puede servir hacer un hueco en su mente en que quepan unos cuantos teoremas y propiedades relativas a entes con poco significado si luego van a dejarlos allí herméticamente emparedados? A la resolución de problemas se le ha llamado, con razón, el corazón de las matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha traído y atrae a los matemáticos de todas las épocas. Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas para el desarrollo de herramientas, en una palabra, la vida propia de las matemáticas”.
- En España, el currículo del Área de Matemáticas en Primaria y Secundaria concede extraordinaria importancia al tema dedicándole mucha atención, especialmente desde los contenidos de procedimientos y actitudes.

2. LA CREACIÓN MATEMÁTICA

Una de las reflexiones más profundas que se han hecho sobre la creatividad en matemática es la realizada a principios de siglo por Henri Poincaré, uno de los más grandes matemáticos de su tiempo. En una conferencia pronunciada ante la Sociedad Psicológica de París hizo interesantísimas revelaciones sobre sus propias experiencias como creador:

> “\... ¿Qué es, de hecho, la creación matemática? No consiste en hacer combinaciones nuevas con entes matemáticos ya conocidos. Cualquiera podría hacerlo, pero las combinaciones que se podrían hacer así serían un número limitado y en su mayoría totalmente desprovistas de interés. Crear consiste precisamente no en construir las combinaciones inútiles, sino en construir las que son útiles y que están en una minoría. Crear es discernir, es escoger…”.
>
> “\... A menudo, cuando se trabaja en un problema difícil, no se consigue nada la primera vez que se comienza la tarea. Luego se toma un descanso más o menos largo y uno se sienta de nuevo ante la mesa. Durante la primera media hora se continúa sin encontrar nada. Después, de repente, la idea decisiva se presenta ante la mente…”.
>
> “\...Hay que hacer otra observación a propósito de las condiciones de este trabajo inconsciente. Se trata de que tal trabajo no es posible, y en todo caso no es fecundo, si no está por una parte precedido y por otra seguido de un período de trabajo consciente. Estas inspiraciones súbitas no se presentan más que tras algunos días de esfuerzos voluntarios, aparentemente estériles, en los que uno ha creído no hacer nada interesante, y piensa haber

tomado un camino falso totalmente. Estos esfuerzos no fueron, por tanto, tan estériles como se pensaba…".

El pensamiento creativo se ha dividido en divergente y convergente. El primero consiste en la habilidad para pensar de manera original y elaborar nuevas ideas, mientras que el segundo se relaciona con la capacidad crítica y lógica para evaluar alternativas y seleccionar la más apropiada. Evidentemente ambos tipos de pensamiento juegan un rol fundamental en la resolución de problemas. La rutina suprime los estímulos necesarios para el acto creativo. La mayor parte de los grandes artistas comienzan imitando a sus maestros. Más aún se ha llegado a afirmar, en parte en broma y en parte en serio, que la originalidad no es otra cosa que un plagio no detectado". En cualquier caso es claro que la imitación puede ser un primer paso válido hacia la originalidad. En particular observaremos y no vacilaremos, llegado el caso, en imitar las técnicas de resolución de problemas empleadas con éxito por nuestros compañeros, maestros o colegas.

3. IMPLEMENTACIÓN EN NUESTRA REVISTA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Nuestra revista EPSILON no es ajena a este sentir y por ello, desde este foro, se impulsará de un modo práctico y concreto este quehacer matemático. La faceta de Resolución de Problemas comprenderá varios aspectos interesantes:

- Una primera será la de enviar problemas a la redacción. Es evidente que la faceta de creación de un problema es la más importante. La originalidad de los mismos no debe servir de obstáculo e impedimento para nuestra participación. Un "viejo problema" ya conocido puede servirnos de estímulo por sus nuevos enfoques, su justificación en un contexto diferente o por las distintas formas de resolución, sus aspectos didácticos, etc. Puede que un problema nos sirva como fuente de otras nuevas o similares situaciones problemáticas convirtiéndose dicho problema en un Problema-Tipo. Por tanto, animamos desde aquí a que se nos envíen toda clase de problemas sin más que indicar la referencia del mismo y la solución propuesta por parte del remitente.
- Un segundo aspecto será la del envío de la propia resolución del problema. Para ello, el lector enviará su propuesta a la redacción. Esta revisará la misma y será referenciado en el siguiente número de la Revista. De entre todas las respuestas recibidas, se publicará en la página web, la más adecuada teniendo en cuenta los aspectos de originalidad, simplicidad, elegancia, y posibilidades de generalización. Se estudiará la posibilidad de incluir también algunas de las propuestas recibidas en elsiguiente número de la Revista.

Aquellos lectores que deseen colaborar deberán contactar con nosotros por el correo electrónico: problemas.epsilon@thales.cica.es

4. DISTINTAS SECCIONES DE PROBLEMAS, DISTINTOS OBJETIVOS

4.1. RETOS MATEMÁTICOS: Problemas de Nivel Medio y de Nivel Superior (propuestos y resueltos)

A esta sección pertenecerán todos aquellos problemas cuyos contenidos (objeto) y destinatarios (sujeto) queden implicados dentro de nuestro sistema educativo (Secundaria, Bachillerato y Universidad). Pueden servir como recursos para una preparación olímpica, a modo de un cierto desafío o reto matemático o, simplemente como un puro divertimento en nuestro quehacer matemático. Más adelante, con la recopilación y catalogación que de los mismos problemas se vayan haciendo a posteriori, se irá constituyendo un importante banco de problemas como recurso didáctico. No creemos que de un problema lo único que importa sea su solución. Este aspecto es el último y, a veces, sucederá que en la puesta en escena de las ideas previas relacionadas con el problema, se sucedan más éxitos que en el propio desarrollo del mismo. Esto ya significa, en sí mismo, un avance en nuestro conocimiento aunque, puede que no se vea reconocido posteriormente con la solución del mismo. Ahora bien, una vez trabajado el problema en todos sus aspectos colaterales, la propia lectura a posteriori de la resolución del mismo profundizará, sin duda, en nuestro conocimiento enriqueciéndonos con nuevas destrezas y estructuras de pensamiento. La reflexión final del problema desde su inicio hasta su resolución final ha adquirido así una impronta propia e individualizada en nosotros, convirtiéndonos en sujetos activos e interactivos de la resolución de problemas.

Por tanto, pensamos que sus aspectos previos, es decir, la génesis del mismo, las motivaciones del autor que lo crea o lo recrea, su desarrollo y su posterior destino hacia el futuro resolutor hacen de la resolución de problemas un recurso inigualable como generador de contenidos, relaciones, destrezas, procedimientos y actitudes.

4.2. PROBLEMAS DIVULGATIVOS: Problemas-Tema y Problemas Divulgativos (propuestos y resueltos)

A esta sección pertenecerán aquellas otras propuestas que se puedan considerar como problemas-tipo, monográficos, con una gran riqueza en sus aspectos divulgativos y didácticos, relacionados con las ciencias, la naturaleza y el arte. Deberán pertenecer a esta sección aquellos problemas o situaciones cotidianas que la Matemática explica y justifica. Somos conocedores de la importancia de la Matemática como ciencia que interpreta la realidad física y encuentra en la Naturaleza, el Arte y la Técnica auténticos problemas. Debido a su abstracción, las matemáticas son universales en un sentido en que no lo son otros campos del pensamiento humano. Tienen aplicaciones útiles en los negocios, la industria, la música, la historia, la política, los deportes, la medicina, la agricultura, la ingeniería y las ciencias naturales y sociales. Es muy amplia la relación entre las matemáticas y los otros campos de la ciencia básica y aplicada. Ello obedece a varias razones, incluidas las siguientes:

- La relación entre la ciencia y las matemáticas tiene una larga historia, que data de muchos siglos. La ciencia le ofrece a las matemáticas problemas interesantes para investigar, y éstas le brindan a aquélla herramientas poderosas para el análisis de datos. Con frecuencia, los modelos abstractos que han sido estudiados por los matemáticos, por el puro interés que despiertan han resultado ser muy útiles para la ciencia tiempo después. La ciencia y las matemáticas están tratando de descubrir pautas y relaciones generales, y en este caso ambas son parte del mismo quehacer.
- Las matemáticas son el principal lenguaje de la ciencia. El lenguaje simbólico matemático ha resultado ser en extremo valioso para expresar las ideas científicas sin ambigüedad. La declaración $a = F/m$ no es sólo una manera abreviada de decir que la aceleración de un objeto depende de la fuerza que se le aplique y de su masa; sino que es un enunciado preciso de la relación cuantitativa entre esas variables. Más importante aún, las matemáticas proporcionan la gramática de la ciencia, las reglas para el análisis riguroso de ideas científicas y datos.

5. EPÍLOGO

No queremos finalizar esta presentación sin agradecer y reconocer públicamente cuántas páginas web y revistas, tanto electrónicas como en formato papel, que desde hace tiempo cubren desde sus contenidos, este importante quehacer matemático. Sin menoscabo del simplismo que ello conlleva, debemos testimoniar las siguientes tres direcciones de Internet, con un alto e interesantísimo nivel divulgativo en la Resolución de Problemas:

1. **La Revista Escolar de Matemáticas** digital para uso de alumnos y profesores de Educación Media promovida por el profesor **D. Francisco Bellot Rosado**, cuya labor ha sido distinguida tanto a nivel nacional como internacional.

   http://www.oei.es/oim/revistaoim/index.html/

2. **Página personal de D. Francisco Javier García Capitán**, amplísimo compendio de múltiples contenidos que rebosan entusiasmo, trabajo, genialidad y mucha generosidad.

   http://garciacapitan.auna.com

3. **El Laboratorio Virtual de Triángulos con CABRI** es una revista on-line de matemáticas dedicada a la resolución de problemas sobre triángulos. Está dirigida desde 2002 por **D. Ricardo Barroso Campos**, que puntualmente, quincena a quincena, realiza una labor investigadora y divulgativa sobre la Geometría. Es causa de la aparición de un amplio número de magníficos resolutores de problemas, siendo además pionero en el uso de los recursos tecnológicos.

   http://personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm/

6. PROPUESTA DE PROBLEMAS

Sección 1 (Retos matemáticos)

RE_001_EPSILON

Sea a_n la sucesión de números reales que verifica para todo número natural *n*:

$$1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_3 + \ldots + n \cdot a_n = n^3 \cdot a_n$$

Halla el valor que debe tener a_1 para que se cumpla: $2011 \cdot a_{2011} = 1$.

RE_002_EPSILON

Los puntos A(m,16), B(18,p) y el origen de coordenadas forman un triángulo equilátero.

Calcula los valores de “m” y de “p”.

RE_003_EPSILON

Construye un triángulo rectángulo cuya hipotenusa c es dada, si se sabe además que la mediana relativa al ángulo recto C es la media geométrica de los catetos de dicho triángulo.

RE_004_EPSILON

Prueba las siguientes igualdades:

a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . k = 2^{n-1} . n$

b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . k^2 = 2^{n-2} . (n+1) . n$

RE_005_EPSILON

Halla el valor de la suma siguiente:

$$\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$$

RE_006_EPSILON

a) Una recta trazada desde el vértice A de un triángulo equilátero ABC corta al lado opuesto BC en un punto P y a la circunferencia circunscrita en el punto Q.

Prueba que se verifica la igualdad: $\dfrac{1}{PQ} = \dfrac{1}{BQ} + \dfrac{1}{CQ}$

b) Con la notación del apartado anterior, prueba que las siguientes sumas son constantes y halla el valor de las mismas:

$$AQ^2 + BQ^2 + CQ^2 = K_1;\ AQ^4 + BQ^4 + CQ^4 = K_2;$$

SECCIÓN 2 (PROBLEMAS DIVULGATIVOS)

DI_001_EPSILON. *TRIÁNGULOS EPSILIANOS*

Sea un triángulo ABC.

a) Probar la equivalencia de estas dos condiciones:

i) $\angle A = 2.\angle B$

ii) $a^2 = b^2 + b.c$

Nota: A los triángulos que verifican alguna de las dos condiciones anteriores, los llamaremos **triángulos epsilianos**. Este tipo de triángulos ha sido estudiado por muchos autores (F. Bellot). Han aparecido en muchos problemas de Olimpiadas Matemáticas. Son ejemplos notables de este tipo, los triángulos de la escuadra y del cartabón y el triángulo sublime (36º, 72º y 72º).

Veamos algunas de sus consecuencias inmediatas:

b) En todo triángulo epsiliano ($a^2 = b^2 + b.c \Leftrightarrow \angle A = 2.\angle B$) se verifica:

i) AI = a-b. (I= incentro)

ii) La longitud de la bisectriz interior $w_a = b\cdot c/a$

c) Encuentra los triángulos epsilianos que sean isósceles.

d) Si denominamos triángulo genuinamente epsiliano al que cumple la doble condición de ser epsiliano, es decir, A=2B=4C.

Es evidente que entonces se verificará la relación $a^2=2s\cdot c$ (siendo s = semiperímetro).

e) Prueba que sólo existe un único triángulo epsiliano en el que las medidas de sus lados sean números naturales consecutivos.

f) Determina el triángulo epsiliano de menor perímetro posible, si se sabe que el tercer ángulo $\angle C$ es obtuso y las medidas de sus lados a, b y c son números naturales.

g) Encuentra los triángulos epsilianos en los que uno de sus lados sea dos veces mayor que otro.

h) Encuentra y ordena de forma creciente, según su perímetro, los primeros seis triángulos epsilianos tales que las medidas de sus lados vengan representadas por números naturales.

DI_002_EPSILON. *VISTA DESDE LA CIMA DEL TEIDE*

La constitución atmosférica tiene un influjo muy grande sobre la visibilidad de los objetos distantes. Las experiencias físicas demuestran que la transparencia del aire aumenta prodigiosamente cuando se halla difundida en la atmósfera con uniformidad cierta cantidad de agua.

Así se puede asegurar en general que el Pico será rarísima vez visible a una gran distancia en los meses secos y calurosos; y que por el contrario se verá de más lejos en los meses de Enero y Febrero, inmediatamente después de haber llovido con fuerza, ó bien pasadas algunas horas.

"Varias personas de inteligencia y verdad aseguran haber visto el Teide a la distancia de cuarenta y seis ó cuarenta y siete leguas de veinte al grado, lo que supone el valor de refracción atmosférica de ciento cincuenta y ocho milésimas del arco, cosa que no es extraordinario en zonas templadas".

La refracción levanta los objetos y modifica la tangente del ángulo de depresión del horizonte del mar:

$$Tang(D) = \frac{1}{1-r} \cdot Tan(\alpha)\ ; \quad \begin{array}{ll} D & \rightarrow \textit{ángulo de depresión aparente} \\ \alpha & \rightarrow \textit{ángulo de depresión real} \\ r & \rightarrow \textit{coeficiente de refracción} \end{array}$$

Primera cuestión: Calcula la altura de Teide.

Segunda cuestión: Compara la superficie avistada desde la cima del Teide con la superficie de España.

Tercera cuestión: "Se ha suscitado la cuestión de si sería posible que desde la cima del Teide se descubriera la costa de África". La parte más cercana es el cabo de Borjador, que dista 56 leguas. Si se considera un coeficiente de refracción normal para la zona r=0'08, ¿A qué altura debería situarse un lugar de la costa de África para ser visto desde la cima del Teide?

7. SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS

Sección 1 (Retos Matemáticos)

Sección 2 (Problemas Divulgativos)

DI_001_EPSILON. *TRIÁNGULOS EPSILIANOS*

Sea un triángulo ABC.

a) Probar la equivalencia de estas dos condiciones:

i) $\angle A = 2.\angle B$

ii) $a^2 = b^2 + b.c$

Nota: A los triángulos que verifican alguna de las dos condiciones anteriores, los llamaremos **triángulos epsilianos**. Este tipo de triángulos ha sido estudiado por muchos autores (F. Bellot). Han aparecido en muchos problemas de Olimpiadas Matemáticas. Son ejemplos notables de este tipo, los triángulos de la escuadra y del cartabón y el triángulo sublime (36º, 72º y 72º).

Veamos algunas de sus consecuencias inmediatas:

b) En todo triángulo epsiliano ($a^2 = b^2 + b.c \Leftrightarrow \angle A = 2.\angle B$) se verifica:

i) AI = a–b. (I = incentro)

ii) La longitud de la bisectriz interior $w_a = b \cdot c/a$

c) Encuentra los triángulos epsilianos que sean isósceles.

d) Si denominamos triángulo genuinamente epsiliano al que cumple la doble condición de ser epsiliano, es decir, A=2B=4C. Es evidente que entonces se verificará la relación $a^2=2s \cdot c$ (siendo s = semiperímetro).

e) Prueba que sólo existe un único triángulo epsiliano en el que las medidas de sus lados sean números naturales consecutivos.

f) Determina el triángulo epsiliano de menor perímetro posible, si se sabe que el tercer ángulo $\angle C$ es obtuso y las medidas de sus lados a, b y c son números naturales.

g) Encuentra los triángulos epsilianos en los que uno de sus lados sea dos veces mayor que otro.

h) Encuentra y ordena de forma creciente, según su perímetro, los primeros seis triángulos epsilianos tales que las medidas de sus lados vengan representadas por números naturales.

Sol:

a) Probar la equivalencia de estas dos condiciones:

$$i)\ \angle A = 2.\angle B$$
$$ii)\ a^2 = b^2 + b.c$$

(i→ii) $\angle A = 2.\angle B \Rightarrow a^2 = b^2 + b.c$

$\dfrac{senA}{a} = \dfrac{senB}{b};\qquad \dfrac{2.senB.\cos B}{a} = \dfrac{senB}{b};\qquad \dfrac{a}{b} = 2.\cos B$

$\dfrac{senB}{b} = \dfrac{senC}{c} = \dfrac{sen(A+B)}{c};\qquad \dfrac{senB}{b} = \dfrac{senA.\cos B + \cos A.senB}{c} = \dfrac{2.senB.\cos^2 B + \cos A.senB}{c};$

$\dfrac{1}{b} = \dfrac{2\cos^2 B + \cos A.}{c};\qquad \dfrac{c}{b} = 2.\cos^2 B + \cos A = 4.\cos^2 B - 1$

En definitiva:

$$\frac{a}{b} = 2\cos B; \qquad \frac{c}{b} = 4.\cos^2 B - 1$$

Por tanto,

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{c}{b} + 1 \Rightarrow a^2 = b^2 + b.c$$

$$(\text{ii}\rightarrow\text{i})\ a^2 = b^2 + b.c \Rightarrow \angle A = 2.AB$$

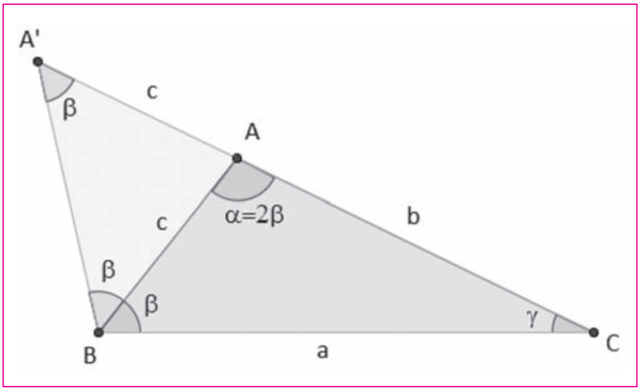
La relación a2=b2+b·c la podemos expresar de la forma:

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a}$$

En el triángulo inicial ABC, prolongamos el lado b hasta una longitud igual al lado c. Así, determinamos el punto A´. Obtenemos dos triángulos ABC y A´BC que son semejantes, al tener el ángulo C en común y verificarse entre sus lados:

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a}$$

Por tanto, la medida del ángulo A´ será igual a la del ángulo B del triángulo ABC, que por otra parte coincidirá con el ángulo A´BA. De esta forma, tenemos que la medida del ángulo A deberá ser el doble de la del ángulo B, ∠A = 2.∠B:



b) En todo triángulo epsiliano ($a^2 = b^2 + b.c \Leftrightarrow \angle A = 2.\angle B$) se verifica:

i) AI = a–b. (I = incentro)

ii) La longitud de la bisectriz interior $w_a = b{\cdot}c/a$

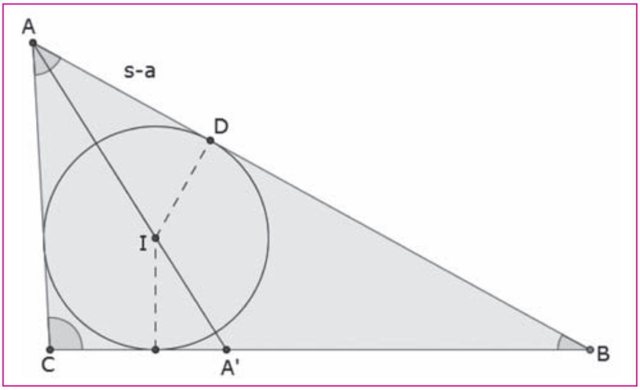
$$i)\ \cos B = \frac{a}{2b} = \frac{s-a}{AI} \Rightarrow AI = \frac{(2s-2a).b}{a} = \frac{(b+c-a).b}{a} \Rightarrow$$

$$AI = \frac{(\frac{a^2}{b} - a).b}{a} = a - b$$

ii) AA´=wa=A´B. Por el teorema de la bisectriz, se tiene que:

$$\frac{c}{BA'} = \frac{b}{CA'} \Rightarrow \frac{c}{wa} = \frac{b}{a-wa} = \frac{b+c}{a} \Rightarrow$$

$$w_a = \frac{a.c}{b+c} = \frac{a.c}{\frac{a^2}{b}} = \frac{b.c}{\mathrm{a}}$$



c) Encuentra los triángulos epsilianos que sean isósceles.

Sea el triángulo epsiliano dado por la caracterización ya probada: $a^2 = b^2 + b.c \Leftrightarrow \angle A = 2.\angle B$.

Si buscamos que el triángulo además sea isósceles, tendrá que ser de alguna de las dos formas siguientes:

c1.- A=2B, C=A→ Triángulo sublime {A=72º, B=36º, C=72º}.

Consecuencias inmediatas de este particular triángulo.

$$a^2 = b^2 + b.a \rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1 + \left(\frac{a}{b}\right) \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1\sqrt{5}}{2} = ø \text{ (Número de Oro)}$$

c2.- A=2B, C=B→ Triángulo rectángulo isósceles {A=90º, B=45º, C=45º}.

d) Si denominamos triángulo genuinamente epsiliano al que cumple la doble condición de serepsiliano, es decir, A=2B=4C.

Es evidente que entonces se verificará la relación $a^2=2s\cdot c$ (siendo s = semiperímetro):

Por ser A=2B → $a^2=b^2+b\cdot c$;

Por ser B=2C → $b^2=c^2+c\cdot a$;

Entonces: $a^2=c^2+c\cdot a+b\cdot c =c\cdot(a+b+c)=2s\cdot c$

e) Prueba que sólo existe un único triángulo epsiliano en el que las medidas de sus lados sean números naturales consecutivos.

Sea el triángulo epsiliano dado por la caracterización ya probada: $a^2 = b^2 + b.c \Leftrightarrow \angle A = 2.\angle B$.

Si imponemos que las medidas de sus lados sean números naturales consecutivos, deberá pasar alguno de los siguientes casos:

Casos posibles	$a^2 = b^2 + b.c$
{b=n–1; a=n; c=n+1}	$n^2 = (n-1)^2+(n-1)(n+1)$ n=0 → b=–1, a=0, c=1 ABSURDO n=2 → b=1, a=2, c=3 TRIÁNGULO IMPOSIBLE
{b=n–1; c=n; a=n+1}	$(n+1)^2 = (n-1)^2+(n-1)n$ n=0 → b=–1, c=0, a=1 ABSURDO **n=5 → b=4, c=5, a=6 TRIÁNGULO EPSILIANO**
{c=n–1; b=n; a=n+1}	$(n+1)^2 = n^2+(n-1)n$ NO HAY SOL ENTERA

Solamente pue, tenemos el triángulo epsiliano de lados b=4, c=5, a=6.

f) Determina el triángulo epsiliano de menor perímetro posible, si se sabe que el tercer ángulo ∠C es obtuso y las medidas de sus lados a, b y c son números naturales.

Sea el triángulo epsiliano dado por la caracterización ya probada: $a^2 = b^2 + b.c \Leftrightarrow \angle A = 2.\angle B$.

Supongamos ahora que el ángulo C es obtuso.

Entonces se tendrá la desigualdad b<a<c. Como C=180º–(A+B) = 180º–3B >90º.

Entonces B<30º y $\cos B = \dfrac{a}{2b} > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $2 > 2\cos B = \dfrac{a}{b} > \sqrt{3}$. Por tanto,

$\sqrt{3} < \dfrac{a}{\mathrm{b}} < 2$.

Como a, b y c son números naturales sin divisores comunes (menor perímetro) y $a^2=b\cdot(b+c)$, se tendrá que tanto b como b+c no tendrán ningún divisor en común y así para que sea cierta la igualdad $a^2=b\cdot(b+c)$ con números naturales, se tendrá que cumplir que $b= m^2$ y $b+c= n^2$.

De esta forma, $a^2 = (m\cdot n)^2$. Entonces: $a=m\cdot n$;

$$\sqrt{3} < \frac{a}{b} = \frac{m.n}{m2} = \frac{n}{m} < 2 \; ; \quad \sqrt{3} < \frac{n}{m} < 2$$

El primer par de números enteros m, n que satisfacen la desigualdad anterior se obtiene para los valores m=4; n=7, lo que da lugar a los valores: a=28, b=16 y c=33, triángulo epsiliano con los lados números enteros y de perímetro mínimo con el ángulo C obtuso.

g) Determina, salvo semejanzas, los triángulos epsilianos en los que uno de los lados del triángulo sea dos veces mayor que otro.

Sea el triángulo epsiliano dado por la caracterización ya probada: $a^2 = b^2 + b.c \Leftrightarrow \angle A = 2.\angle B$. Si imponemos la condición de que uno de los lados sea el doble que otro, se nos presentarán los siguientes casos:

Casos posibles	$a^2 = b^2 + b.c$	Triángulo
a =2b	$4b^2=b^2+bc$; $3b=c$	{a=2k; b=k; c=3k} No hay triángulo
a =2c	$4c^2=b^2+bc$; $b=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}.c$	{a=2k; $b=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}.k$; c=k} **TRIÁNGULO OBTUSÁNGULO,** ya que: $\cos A=\frac{c-b}{2b}<0$
b =2a	b>a ; b<a CONTRADICCIÓN	
b =2c	$a^2=4c^2+2c^2$; $a=\sqrt{6}.c$	{$a=\sqrt{6}.k$; b=2k; c=k} **TRIÁNGULO OBTUSÁNGULO,** ya que: $\cos A=\frac{c-b}{2b}<0$
c = 2a	$a^2=b^2+2a.b$; $a=(1+\sqrt{2}).b$	{$a=(1+\sqrt{2}).k$, b=k, $c=(2+2\sqrt{2}).k$ } No hay triángulo
c=2b	$a^2=b^2+2.b^2$; $a=\sqrt{3}.b$	{$a=\sqrt{3}.k$, b=k, c=2k} **TRIÁNGULO RECTÁNGULO**: A=60º, B=30º,C=90º

h) Encuentra y ordena de forma creciente, según los valores del lado a, los primeros siete triángulos epsilianos tales que las medidas de sus lados vengan representadas por números naturales.

a	b	c	Perímetro	Triángulo
6	4	5	15	Acutángulo
12	9	7	28	Acutángulo
15	9	16	40	Acutángulo
20	16	9	45	Acutángulo
28	16	33	77	Obtusángulo
30	25	11	66	Obtusángulo
35	25	24	84	Obtusángulo

DI_002_EPSILON. VISTA DESDE LA CIMA DEL TEIDE

La constitución atmosférica tiene un influjo muy grande sobre la visibilidad de los objetos distantes. Las experiencias físicas demuestran que la transparencia del aire aumenta prodigiosamente cuando se halla difundida en la atmósfera con uniformidad cierta cantidad de agua.

Así se puede asegurar en general que el Pico será rarísima vez visible a una gran distancia en los meses secos y calurosos; y que por el contrario se verá de más lejos en los meses de Enero y Febrero,inmediatamente después de haber llovido con fuerza, ó bien pasadas algunas horas.

“Varias personas de inteligencia y verdad aseguran haber visto el Teide a la distancia de cuarenta y seis ó cuarenta y siete leguas de veinte al grado, lo que supone el valor de refracción atmosférica de ciento cincuenta y ocho milésimas del arco, cosa que no es extraordinario en zonas templadas”.

La refracción levanta los objetos y modifica la tangente del ángulo de depresión del horizonte del mar:

$$Tang(D) = \frac{1}{1-r} \cdot Tan(\alpha) \; ; \qquad \begin{array}{ll} D & \rightarrow \textit{ángulo de depresión aparente} \\ \alpha & \rightarrow \textit{ángulo de depresión real} \\ r & \rightarrow \textit{coeficiente de refracción} \end{array}$$

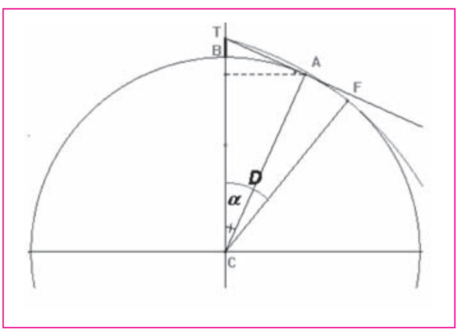
Primera cuestión: Calcula la altura de Teide.

Segunda cuestión: Compara la superficie avistada desde la cima del Teide con la superficie de España.

Tercera cuestión: “Se ha suscitado la cuestión de si sería posible que desde la cima del Teide se descubriera la costa de África”. La parte más cercana es el cabo de Borjador, que dista 56 leguas. Si se considera un coeficiente de refracción normal para la zona r=0’08, ¿A qué altura debería situarse un lugar de la costa de África para ser visto desde la cima del Teide?

Sol:

SOLUCIÓN PRIMERA CUESTIÓN:



α es el ángulo de depresión real.

La distancia $\overline{BT} = H$ es la altura del Teide.

La distancia $\overline{CB} = R$ es la radio de la Tierra.

La línea $\overline{TA}$ es la visual sin refracción.

El arco $\overline{BA}$: distancia que permite ver el Teide sin refracción.

La línea $\overline{TF}$ es la visual con refracción.

El arco $\overline{BF}$: distancia que permite ver el Teide con refracción

Podemos hacer los cálculos con el Coseno o con la Tangente (es más fácil con la tangente al considerar la refracción).

$$Tang(\alpha) = \frac{Sen(\alpha)}{Cos(\alpha)} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{R}{R+H}\right)^2}}{\frac{R}{R+H}} = \frac{\sqrt{(R+H)^2 - R^2}}{R} = \frac{\sqrt{2RH + \cancel{H}^2}}{R} = \sqrt{\frac{2H}{R}}$$

D es el ángulo de depresión aparente.

$$Tang(D) = \frac{1}{1-r}\sqrt{\frac{2H}{R}}$$

Sabemos que 46’5 leguas equivalen a un ángulo:

$$D = \frac{46'5}{20} = 2^{\circ}\ 19'\ 30''$$

Radio medio de la Tierra:

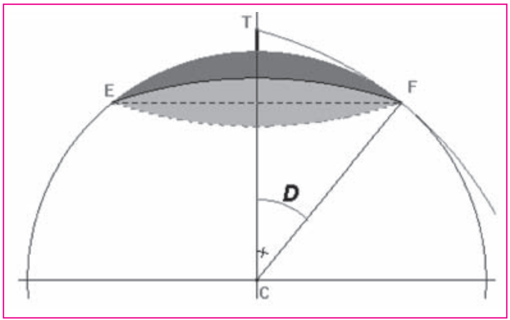
$$R = \frac{4000000}{6'28} \approx 6371000 \text{ metros}$$

$$Tang(2^{\circ}\ 19'\ 30'') = \frac{1}{1-0'158}\sqrt{\frac{2H}{6371000}} \Rightarrow H \approx 3722 \text{ metros}$$

CON CARÁCTER DIVULGATIVO:

$$\textit{Una legua marina s}\ \frac{1}{20} \cdot \frac{40000\ km}{360^{\circ}} = 5555 \text{ metros}$$

SOLUCIÓN SEGUNDA CUESTIÓN:



El arco *EF* girado alrededor del eje *CT* describirá un casquete esférico que será la extensión superficial de superficie terrestre que descubre la vista desde la cima.

La superficie del casquete esférico es:

$$S_{Casquete} = Circulomáximo \times Alturadel\ casquete$$

CON CARÁCTER DIVULGATIVO:

Seno verso (D) = 1 – Cos(D)

La altura del casquete es:

$$h_{Casquete} = R – R \cdot Cos(D) = R[1 – Cos(D)] = R \times Senoverso(D)$$

Por lo tanto:

$$S_{Casquete} = 40000 \text{ km} \times 6371 \text{ km} \times Senoverso\ (2^{\circ}\ 19'\ 30'')$$

Extensión superficial que descubre la vista desde la cima del Teide:

$$S_{Casquete} = 209787 \text{ km}^2$$

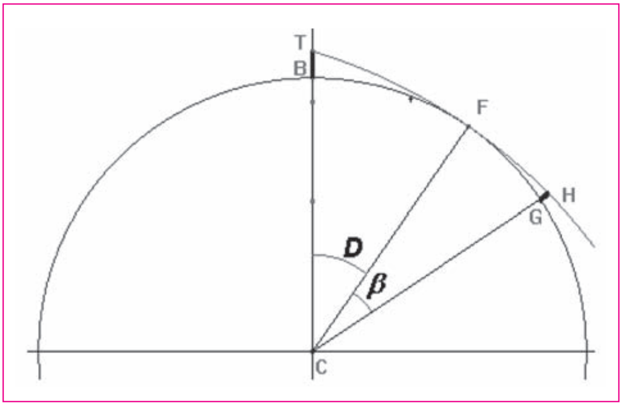
Extensión superficial de España:

$$S_{España} \approx 500000 \text{ km}^2$$

Comparación:

$$\frac{209787}{500000} \approx 40\%$$

SOLUCIÓN TERCERA CUESTIÓN:



Si el coeficiente de refracción es $r = 0'08$, el ángulo de depresión aparente será:

$$Tang(D) = \frac{1}{1-0'08}\sqrt{\frac{7444}{6371000}}$$

Se obtiene $D = 2^{o}\ 7'\ 40''$.
Si el cabo Borjador está del Teide a 56 leguas:

$$56 \text{ leguas} = \left(\frac{56}{20}\right)^{o} = 2^{o}\ 48' \Rightarrow \beta = 40'\ 20''$$

Por lo tanto:

$$Tang(40'\ 20'') = \frac{1}{1-0'08}\sqrt{\frac{2\overline{GH}}{6371000}} \Rightarrow \overline{GH} = 371 \textit{ metros de altura}$$