

PROPUESTA DIDÁCTICA CON EL EMPLEO DE UN MAPLET PARA LOS TEMAS DE DERIVADA DIRECCIONAL Y GRADIENTE

Gustavo Hernández Corona

gth_m15@yahoo.com.mx

Alexander Yakhno

alexander.yakhno@ucei.udg.mx

Elena Nesterova

elena.nesterova@ucei.udg.mx

CUCEI, Universidad de Guadalajara, México

Palabras clave: Maplet, Derivada direccional, Gradiente, Representación Gráfica.

Resumen

El estudio que se reporta se llevó a cabo en el Departamento de Matemáticas del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara (U de G), en el cual se sometió a experimentación una propuesta didáctica para los temas de derivada direccional y gradiente, la propuesta didáctica consistió en el desarrollo de actividades con el apoyo de un Maplet y un cuaderno de trabajo (notas y ejercicios). La investigación fue de tipo cualitativa, cuantitativa y cuasiexperimental. La propuesta se sustenta en la idea de construir el conocimiento; múltiples representaciones, la visualización, la interactividad y la experimentación. Se tomaron en cuenta resultados en diferentes trabajos desarrollados (Yaacob, Wester y Steinberg, 2008; Leguiza, Camprubí y López, 2001; Rodríguez, 2008) que recomiendan emplear la tecnología para potenciar la comprensión de conceptos matemáticos.

Introducción

Algunos autores afirman que el tratamiento que se da a la derivada en las instituciones educativas se enfoca en el manejo y la aplicación de fórmulas y recursos algebraicos, lo que provoca en los estudiantes dificultades para la comprensión, no solo de este concepto, sino también de los métodos de pensamiento en esta rama de las matemáticas (Artigue, 1995; Moreno, 2005; Zúñiga, 2007; Pino-Fan, Godino y Font 2010).

Para facilitar a los alumnos la comprensión de los conceptos de la derivada direccional y el gradiente y sus propiedades se propuso emplear un Maplet que permite visualizar las representaciones analíticas, gráficas y numéricas de los contenidos matemáticos (objeto, concepto o situación). La investigación consistió en determinar qué tan efectiva es esta propuesta para el aprendizaje de los alumnos en torno a los temas de derivada direccional y gradiente.

Los resultados obtenidos permitieron comparar el aprendizaje alcanzado por los alumnos de los conceptos de derivada direccional y gradiente, al utilizar la propuesta didáctica con el empleo de un Maplet y la forma tradicional de enseñar.

Marco teórico

La postura constructivista rechaza la concepción del alumno como un mero receptor o reproductor de los saberes culturales. Tampoco acepta la idea de que el desarrollo es la simple acumulación de aprendizajes específicos. La filosofía educativa que subyace a estos

planteamientos indica que la institución educativa debe promover el doble proceso de socialización y de individualización. La concepción constructivista del aprendizaje escolar encuentra sustento en la idea de que la finalidad de la educación que se imparte en las instituciones educativas es promover los procesos de crecimiento personal del alumno, en el marco cultural del grupo al que pertenecen, lo que conduce a concebir el aprendizaje escolar como un proceso de construcción del conocimiento a partir de los saberes y las experiencias previas y la enseñanza como una ayuda a este proceso de construcción.

Este proyecto se desarrolló utilizando principios orientadores manejados en la educación virtual: múltiples representaciones, la interactividad, la visualización y la experimentación.

Múltiples representaciones

Según Lupiáñez y Moreno (2001), por representaciones entenderemos, en el ámbito de las matemáticas, notaciones simbólicas o gráficas, o bien manifestaciones verbales, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos en esta disciplina así como sus características y propiedades más relevantes. Por ejemplo, el concepto de función puede representarse en diferentes registros: gráficos, analíticos y numéricos. La naturaleza del registro semiótico que se selecciona, impone una selección de los elementos significativos o informativos del contenido que representa. Toda la representación es parcial cognitivamente con respecto a lo que ella representa y que de un registro a otro no son los mismos aspectos del contenido. Si se selecciona bien el registro de representación, las representaciones en él son suficientes para permitir la comprensión del contenido conceptual representado. Esta comprensión se aumenta con la coordinación de al menos dos registros de representación. En las matemáticas no puede haber aprendizaje verdadero si no se toma en cuenta la necesidad de varios registros de representación para el funcionamiento cognitivo del pensamiento (Duval, 1999).

Visualización

Muchos de los problemas de derivada direccional y gradiente son difíciles de visualizar. En este proyecto se utilizaron las instalaciones de gráficos potentes y versátiles de Maple, donde se programó el Maplet, para ayudar a los estudiantes en la comprensión de la relación entre las fórmulas algebraicas y la geometría. Resulta fácil el diseño de nuevos gráficos y animaciones en el Maplet, con sólo modificar los parámetros en los ejemplos existentes. Al visualizar con el Maplet los contenidos matemáticos (objeto, concepto o situación) de un tema en particular, los usuarios podrán descubrir los conceptos matemáticos por sí mismos y en consecuencia, mejorar su comprensión (Amrhein, Bengtsson y Maeder, 1997, citado en Yaacob, Wester y Steinberg, 2008).

Señalan Cantoral y Montiel (2003) que la visualización es la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende. La visualización entonces, trata con el funcionamiento de las estructuras cognitivas que se emplean para resolver problemas, con las relaciones abstractas que se formulan entre las diversas representaciones de un objeto matemático a fin de operar con ellas y obtener un resultado.

Interactividad

Los conceptos sobre aprendizaje interactivo son una fuerte influencia en el diseño del proyecto. Los usuarios pueden elegir sus propias situaciones de aprendizaje, como el pasar de un tema a otro con facilidad y de manera eficiente. Por otra parte, también hacen hincapié en el resultado de orden superior en el aprendizaje interactivo, tales como la motivación y la curiosidad intelectual (Drivers, 1997, citado en Yaacob, Wester y Steinberg, 2008). Es importante que los alumnos se sientan motivados para aprender las matemáticas y que su curiosidad intelectual matemática sea mejor.

Experimentación

Muchas de las teorías psicológicas del aprendizaje de hoy en día consideran que el aprendizaje es un proceso inductivo en el que la experimentación juega un papel importante (Kutzler, 1994; Kutzler, 1998; Kutzler, 2008, citado en Yaacob, Wester y Steinberg, 2008). El proceso de aprendizaje en este proyecto se basó también en la experimentación, el usuario aplicó algoritmos conocidos para generar ejercicios y por lo tanto, la formación de una conjetura mediante la observación de los ejemplos (Heugl, Barzel y Furukawa, 1997, citado en Yaacob, Wester y Steinberg, 2008).

Los alumnos, al usar el Maplet, tuvieron la oportunidad de no solamente graficar una función, o cambiar sus parámetros, sino analizar la gráfica de una función que ellos consideran importante para su aprendizaje, pudieron cambiar la dirección de la derivada, el punto, el estilo del gráfico, el rango de visualización y el estilo de los ejes. En otras palabras experimentaron con el Maplet, lo que determina el aprendizaje experimental, centrado en el alumno.

Metodología

Para determinar los efectos de la propuesta didáctica se seleccionaron dos grupos, uno experimental, de 38 alumnos, al que se aplicó el tratamiento alternativo y otro de control del mismo número de integrantes, en el que se trabajó de manera tradicional. Los alumnos son los que eligen el grupo, por lo cual no fue posible aleatorizar, por lo tanto la investigación es cuasiexperimental.

Se aplicó un examen diagnóstico a los dos grupos para determinar si eran equivalentes antes del experimento, pues no estuvieron formados de manera aleatoria, luego se aplicó el tratamiento y se registraron las calificaciones obtenidas en las actividades individuales, las cuales consistieron en la resolución de problemas que involucran los temas de derivada direccional y gradiente. Posteriormente se aplicó un examen final (post prueba) que consistió en evaluar sólo el aprendizaje de estos temas y finalmente, al grupo experimental se aplicó una encuesta de opinión sobre el uso de la propuesta.

Se recopilaron y analizaron los resultados y se elaboraron las conclusiones.

Exposición de la propuesta

La propuesta didáctica que consistió en resolver actividades, para esto, los alumnos se apoyaron de un cuaderno de trabajo con notas de los temas y actividades y de un Maplet

para los temas de derivada direccional y gradiente, que permitió al alumno relacionar las diferentes representaciones de la derivada direccional y el gradiente, de tal manera que se propicie una mejor construcción de significados que lo lleve más allá de solucionar ejercicios.

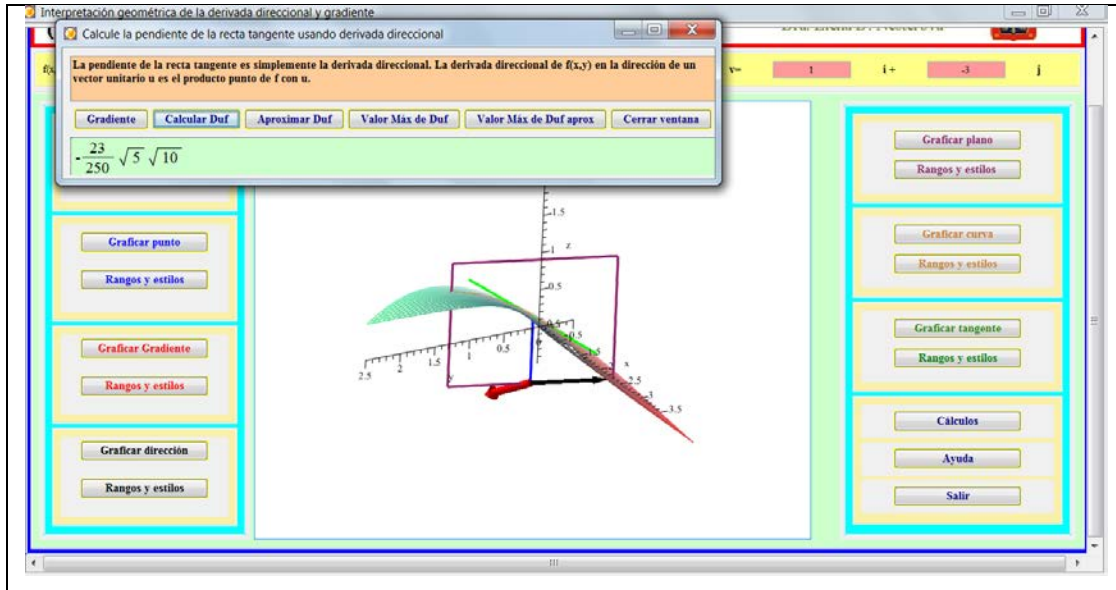


Figura 1. Ventana cálculos

Los Maplets son aplicaciones o interfaces gráficas que se pueden diseñar y programar con Maple y generalmente son ejecutados desde una sesión del programa, que permiten al usuario interactuar y utilizar los paquetes de Maple a través de botones y ventanas como en los programas que utilizamos habitualmente (Fuente, Garay, Valencia & Bastero, 1998).

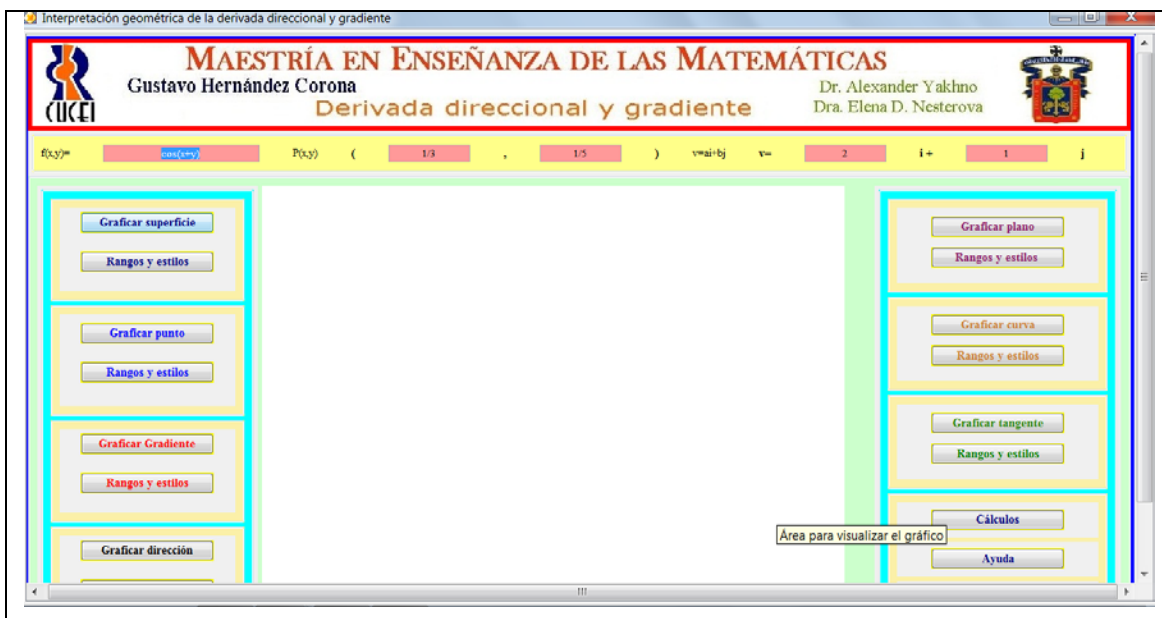


Figura 2. Ventana principal del Maplet



Figura 3. Alumnos del grupo experimental.

Resultados

Como hipótesis se consideró que el empleo de la propuesta didáctica basada en uso del Maplet produce mejores resultados de aprendizaje por parte de los alumnos en los temas derivada direccional y gradiente, que con la forma tradicional de enseñar. La prueba de hipótesis se realizó con el estadístico de *t de Student* para muestras independientes con un nivel de significancia del 5%, un 95% de confianza de que se adoptó la decisión correcta.

La hipótesis nula se rechaza (Devore, 2008) si $t \geq t_{0.05,74}$, en este caso $t = 3.72$ y $t_{0.05,74} = 1.66$, como $t > t_{0.05,74}$, con lo cual se concluye que con un nivel de confianza del 95% el empleo de la propuesta didáctica con el uso del Maplet propicia significativamente mejores resultados en el aprendizaje del tema derivada direccional y gradiente que la forma tradicional de enseñar.

El análisis de los resultados experimentales, permitió concluir que el uso de la propuesta didáctica con el empleo de un Maplet, influyó positivamente al aprendizaje de los alumnos del CUCEI que cursan la materia de Cálculo Avanzado en los temas de derivada direccional y gradiente contra los alumnos que trabajan de manera tradicional. El resultado del análisis estadístico, rechaza la hipótesis nula a favor de la hipótesis alternativa, es decir, el empleo de la propuesta didáctica con el uso del Maplet propicia mejores resultados en el aprendizaje del tema derivada direccional y gradiente en comparación con resultados obtenidos en la forma tradicional de enseñar.

Tabla 1. Prueba *t* para dos muestras suponiendo varianzas iguales

	<i>G Experimental</i>	<i>G Control</i>
Media	77.1052632	60.6842105
Varianza	302.799431	434.492176
Observaciones	38	38
Varianza agrupada	368.645804	
Diferencia hipotética de las medias	0	
Grados de libertad	74	
Estadístico <i>t</i>	3.72797633	
P(T<=t) una cola	0.00018762	
Valor crítico de <i>t</i> (una cola)	1.66570689	

P(T<=t) dos colas	0.00037525
Valor crítico de t (dos colas)	1.99254347

Del análisis de las respuestas a la encuesta se obtuvo que todos los alumnos están de acuerdo que el contenido del material didáctico es adecuado al tema y que la visualización de los conceptos y las explicaciones del profesor contribuyeron positivamente en su aprendizaje del tema.

El 97% de los alumnos consideró que los gráficos facilitan el entendimiento de los conceptos, las instrucciones para usar Maplet son claras, el contenido del material didáctico potencia la comprensión y las instrucciones del profesor facilita el aprendizaje.

La mayoría de los alumnos opinaron que la presentación del material didáctico es atractivo (92%) y es indispensable para el desarrollo del curso (87%), los ejemplos presentados en el material didáctico apoyaron el aprendizaje (94%) y el contenido teórico del material didáctico fue claro (87%).

Como faltas los alumnos mencionaron que el tiempo para aprender el tema (48%) y la cantidad de ejemplos en el material didáctico (32%), fueron insuficientes.

Conclusiones

Para lograr el aprendizaje de los conceptos y propiedades de derivada direccional y gradiente fue valiosa la visualización de diferentes superficies y vectores, además la interacción. Con el uso del Maplet se dio la oportunidad a los alumnos reflexionar sobre los efectos que produce el cambio de algunos parámetros, involucrados en los problemas propuestos, para interpretar sus soluciones de manera verbal. Utilizando argumentos de visualización los alumnos que utilizaron la propuesta lograron aprender qué representa el gradiente y la derivada direccional (cuando es positiva, negativa o cero) de manera más eficaz que los alumnos de grupo de control.

El análisis de los resultados permite concluir que la propuesta didáctica con el empleo de un Maplet para los temas de derivada direccional y gradiente tiene efectos positivos tanto en el aprendizaje, como en la motivación de los alumnos; a la mayoría les agradó el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) para aprender conceptos matemáticos, la comprobación inmediata de los cálculos y la experimentación (cambiar funciones, puntos, dirección, rango de visualización, estilo del gráfico y estilo de los ejes) influyó de manera positiva en el aprendizaje de los alumnos.

El uso del Maplet propició en los alumnos pensamiento crítico, reflexión y ayudó a tener argumentos para dar conclusiones, a problemas relacionados con los temas de derivada direccional y gradiente. Los alumnos mostraban interés por conocer más allá de lo que las actividades sugerían. La actitud hacia el desarrollo de las actividades en su mayoría fue positiva.

El uso del Maplet evitó perder tiempo en cálculos algebraicos complicados que aportan poco para lograr el aprendizaje de los temas de derivada direccional y gradiente, además, con el Maplet la inversión cognitiva se centró en aprender los temas, debido a que el manejo de éste fue muy sencillo, sin la necesidad de muchas instrucciones los alumnos

experimentaron cambiando parámetros matemáticos para observar los efectos que se producían.

Se recomienda que la práctica de este tipo de propuestas adquiriera cierta sistematicidad al incorporarla a la tarea diaria del docente. La nueva tecnología tiene la capacidad de incidir en la formación matemática del alumno, pues brinda representaciones de objetos matemáticos con los que pueden interactuar, ayudando al aprendizaje del conocimiento matemático.

Referencias bibliográficas

- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97–140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Cantoral, R. & Montiel, G. (2003). *Visualización y pensamiento matemático*. Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México. Recuperado el 10 de diciembre de 2012 de [http://www.matedu.cicata.ipn.mx/archivos/\(Cantoral-Montiel2003\)-ALME16-.pdf](http://www.matedu.cicata.ipn.mx/archivos/(Cantoral-Montiel2003)-ALME16-.pdf).
- Devore, J. (2008). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. México: Cengage Learning.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Traducción al español a cargo de M. Vega, realizada en la Universidad del Valle, Colombia, del original francés del mismo título publicado por P. Lang, Suiza en 1995.
- Font, V. (2010). Representation in Mathematics Education. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, num 14, pp. 25-67.
- Fuente, J. G., Garay Navarrete, A., Ricondo Iriondo, I., Valencia Marco, P., & Bastero de Eleizalde, C. (1998). *Aprenda Maple como si estuviera en primero*. San Sebastián.
- Leguiza, D., Camprubí, G. & López Molina, J.A. (s.f.). *El uso de software matemático como herramienta didáctica y de cálculo*. Recuperado el 14 de abril de 2012 de <http://ing.unne.edu.ar/pub/at3/35com.pdf>
- Lupiáñez, J., L. & Moreno, L. (2001). Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. En Gómez, P.; Rico, L. (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 291-300). Granada: Editorial Universidad de Granada. Recuperado el 23 de octubre de 2012 de <http://funes.uniandes.edu.co/586/1/LupianezJ01-2603.PDF>
- Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. En A. Maz, B. Gómez & M. Torralba (Eds.), *IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 81–96). Córdoba, España: Universidad de Córdoba.

- Pino, L., Godino, J. D., Font, V. (2010). Conocimiento didáctico-matemático sobre la enseñanza y aprendizaje de la derivada. *Trabajo presentado en: XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, Monterrey, México, 13-16 de diciembre.
- Rodríguez, G. (2008). *Algunas ideas acerca del uso de los CAS para la enseñanza del Cálculo Diferencial en varias variables*. Universidad de Salamanca. Recuperado el 25 de agosto de 2012 de http://portalevlm.usal.es/Portal/e_books/guiaprofesor/guia_profesor_11.pdf
- Yaacob, Y., Wester, M. & Steinberg, S. (2008). Towards the Development of an Automated Learning Assistant for Vector Calculus: Integration Over Planar Regions *International Journal for Technology in Mathematics Education, Volume 16, No 2*
- Zúñiga, L. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*. Recuperado el 11 de agosto de 2012 de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S166524362007000100007&script=sci_arttext&tlng=es