

LA GEOMETRÍA DEL TRIÁNGULO PARA ALUMNOS DE ALTAS CAPACIDADES MATEMÁTICAS

María Arroyo Castilleja, Juan Núñez Valdés, Ana Pámpano Muñiz

maria_ac_90@hotmail.com, jnvaldes@us.es, anapammun22@gmail.com

Dpto. Geometría y Topología, Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla, España.

Comunicación Breve

Secundaria y Bachillerato

Núcleo temático V: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Palabras clave: Elementos notables del triángulo; Baricentro; Recta de Euler; Triángulo de Napoleón

RESUMEN: Esta comunicación, centrada en la atención a la diversidad en el aula, muestra una actividad de ampliación teórico-práctica relacionada con la geometría del triángulo, que se dirige a los alumnos de altas capacidades matemáticas de la clase. Su objetivo principal es darles a conocer a estos alumnos los elementos más relevantes de un triángulo, como pueden ser los puntos y rectas notables del mismo: circuncentro, ortocentro, baricentro e incentro, rectas de Euler y de Simson, las circunferencias que se pueden obtener sobre el mismo como son, aparte las circunferencias inscrita y circunscrita, las circunferencias de 6 y 9 puntos y las de Tucker y Taylor, y los triángulos asociados al mismo, como el órtico y el de Napoleón. Sobre todos estos elementos notables, los alumnos desarrollarán un estudio teórico, que les permitirá descubrir sus principales propiedades, y otro práctico, con la ayuda de cualquier programa de Geometría Dinámica (en la comunicación se ha usado Geogebra) que les facilitarán su propia investigación sobre todos estos elementos, pudiendo ellos mismos llegar en su caso a obtener nuevas propiedades de estos elementos o incluso descubrir otros nuevos mediante la manipulación de las figuras que vayan obteniendo con esos programas.

INTRODUCCIÓN

Por diversidad pueden entenderse las diferencias que presenta el alumnado ante los aprendizajes escolares, en cuanto a aptitudes, intereses, motivaciones, capacidades, ritmos de maduración, estilos de aprendizaje, experiencias y conocimientos previos, entornos sociales y culturales, etc. Estos aspectos conforman tipologías y perfiles en el alumnado que deben determinar en gran medida la planificación y la acción educativa.

Sin embargo, esta atención a la diversidad es un apartado al que generalmente no se le presta demasiada atención, siendo sin embargo fundamental para una correcta elaboración y puesta en práctica de una Unidad Didáctica. Ciertamente, es uno de los grandes retos para el sistema educativo y en concreto para los centros escolares, ya que requiere el ajuste de la intervención educativa a las necesidades reales del alumnado para asegurar una acción educativa de calidad, lo cual exige a los centros y al profesorado una importante tarea de reflexión y de trabajo.

Esta comunicación está dirigida a los profesores de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato que deseen interesar a sus alumnos de altas capacidades matemáticas en el conocimiento de los elementos notables de un triángulo.

El desarrollo de la actividad que se propone podría llevarse a cabo en dos partes. En la primera, bien los propios profesores les explicarían a esos alumnos el contenido teórico que deben conocer para realizarla adecuadamente, o bien les propondrían a los alumnos que fuesen ellos mismos los que obtuviesen ese contenido investigando para ello en diferentes fuentes, tanto de tipo bibliográficas como informáticas o en red.

En una segunda parte de la actividad, ya se pasaría al aspecto práctico de la misma, enseñándoles en primer lugar el profesor a esos alumnos los fundamentos más básicos de funcionamiento de cualquier programa de geometría dinámica (nosotros hemos usado Geogebra para la comunicación, si bien puede usarse cualquier otro, como Cabrí-Geómetre, por ejemplo) y pidiéndoles después que fuesen ellos mismos los que hiciesen uso de ese programa para visualizar y sacar conclusiones de toda la teoría aprendida.

Pasamos ahora a tratar el contenido teórico que se desea que los alumnos aprendan, dejando, por razones de extensión, la descripción de los programas de Geometría Dinámica utilizados para mostrar ese contenido para la exposición de la comunicación. Para mayor información, consúltese (1,2) y (web1).

1. PUNTOS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO

1.1 EL CIRCUNCENTRO

El circuncentro es el punto de intersección de las tres mediatrices del triángulo (recuérdese que la mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al mismo que pasa por el centro de dicho segmento).

Las principales propiedades de este punto notable del triángulo son las siguientes:

- El circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo, es decir, de la circunferencia exterior al triángulo que pasa por sus tres vértices.
- En el caso de un triángulo acutángulo, el circuncentro es interior al triángulo.
- En el caso de un triángulo obtusángulo, el circuncentro es exterior al triángulo.
- En el caso de un triángulo rectángulo, el circuncentro es el punto medio de la hipotenusa.

1.2 EL ORTOCENTRO

El ortocentro es el punto de intersección de las tres alturas del triángulo (recuérdese que las alturas de un triángulo son las rectas perpendiculares a cada lado que van desde el vértice opuesto a ese lado (o a su prolongación). También pueden entenderse como la distancia de un lado al vértice opuesto).

Las principales propiedades de este punto notable del triángulo son las siguientes:

- En un triángulo rectángulo, el ortocentro coincide con el vértice que forman los dos catetos.
- El ortocentro podría estar en el exterior del triángulo, en el caso de que este triángulo sea obtusángulo. En los triángulos acutángulos, el ortocentro será un punto interior.

1.3 EL BARICENTRO

El baricentro es el punto de intersección de las tres medianas del triángulo (recuérdese que las medianas de un triángulo son las rectas que van desde cada vértice al punto medio del lado opuesto en el triángulo).

Las principales propiedades de este punto notable del triángulo son las siguientes:

- El baricentro, también denominado centro de gravedad del triángulo o centroide, dista dos tercios de cada vértice y un tercio del lado opuesto, es decir, la distancia del baricentro a cada vértice es de $\frac{2}{3}$ la longitud de cada mediana.
- En Física, el baricentro sería el centro de gravedad del triángulo (de ahí su otro nombre).
- El baricentro está siempre en el interior del triángulo.

1.4 EL INCENTRO

El incentro es el punto de intersección de las tres bisectrices interiores del triángulo (recuérdese que las bisectrices interiores de un triángulo son las rectas que dividen, respectivamente, a cada uno de sus ángulos en dos partes iguales).

Como principal propiedad de este punto notable del triángulo, indicar que el incentro es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo, es decir, de la circunferencia interior al triángulo tangente a sus tres lados.

1.5 LOS EXINCENTROS

Los exincentros de un triángulo son los tres puntos exteriores al mismo que equidistan (igual distancia) de las rectas que contienen a los lados del triángulo.

La principal propiedad de estos tres puntos de un triángulo es que cada exincentro es el centro de la circunferencia exinscrita al triángulo, que es aquella circunferencia cuyo centro es un exincentro y es tangente a los lados del triángulo o a sus prolongaciones.

Una vez ya definidos estos puntos notables de un triángulo, se indican a continuación algunas propiedades que relacionan a algunos de ellos entre sí.

- En un triángulo equilátero el circuncentro, ortocentro, baricentro e incentro coinciden en un mismo punto interior, que está a la misma distancia de los tres vértices.

- A consecuencia de lo anterior, en un triángulo equilátero, el centro de la circunferencia circunscrita es el baricentro y la altura coincide con la mediana, por lo que el radio de la circunferencia es igual a dos tercios de la longitud de la altura.
- La distancia del ortocentro al baricentro es el doble que la del baricentro al circuncentro.

2. RECTAS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO

2.1 LA RECTA DE EULER

Es la recta que une el circuncentro, el ortocentro y el baricentro de un triángulo.

Sus principales propiedades son las siguientes:

- Sobre ella, el baricentro dista doble distancia del ortocentro que del circuncentro.
- En triángulos equiláteros, esta recta contiene también al incentro del triángulo, es decir, en un triángulo equilátero los cuatro primeros puntos notables indicados están alineados.

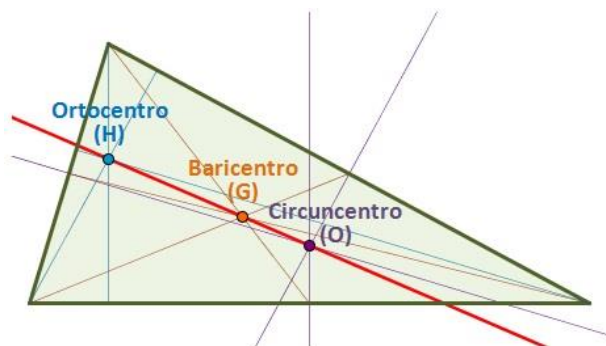


Figura 1. La recta de Euler.

2.2 LA RECTA DE SIMSON

Es la recta que une los pies de las rectas perpendiculares a los lados de un triángulo trazadas desde cualquier punto arbitrario de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo. Es también conocida con el nombre de *recta de Wallace-Simson*.

Las principales propiedades de esta recta son las siguientes:

- Si desde un punto P se trazan perpendiculares a los lados de un triángulo o a sus prolongaciones, los respectivos pies de las perpendiculares estarán alineados si y sólo si el punto P pertenece a la circunferencia circunscrita del triángulo (este enunciado se conoce con el nombre de Teorema de Wallace-Simson).
- La recta de Simson de un vértice del triángulo es la altura del triángulo trazada desde ese mismo vértice, mientras que la de un punto diametralmente opuesto a un vértice es el lado formado por los otros dos vértices.
- El ángulo formado entre las rectas de Simson de dos puntos P, Q es exactamente igual a la mitad del ángulo central del arco PQ .
- La línea de Simson de un punto P pasa por el punto medio del segmento PH , donde H es el ortocentro del triángulo. Además, dicho punto de intersección está sobre la circunferencia de los nueve puntos (ver más adelante).

3. TRIÁNGULOS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO

3.1 EL TRIÁNGULO ÓRTICO

El Triángulo órtico de un triángulo dado es el triángulo formado por los pies de sus alturas sobre sus lados.

Las principales propiedades de este triángulo órtico de un triángulo son:

- Obviamente, no existe el triángulo órtico de un triángulo rectángulo.
- Los lados de un triángulo acutángulo son las bisectrices exteriores de su triángulo órtico.
- Los vértices de un triángulo son los exincentros de su triángulo órtico.
- Las alturas de un triángulo acutángulo son las bisectrices interiores de su triángulo órtico.
- Si un triángulo es obtusángulo, sus alturas son una bisectriz interior y dos exteriores y sus lados son las restantes bisectrices de su triángulo órtico.

4. CIRCUNFERENCIAS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO

Aparte las circunferencias ya definidas anteriormente que se pueden considerar en un triángulo, como la inscrita, circunscrita y exinscrita, existen otras circunferencias notables en un triángulo. Entre ellas, pueden ser citadas las siguientes.

4.1 LA CIRCUNFERENCIA DE 6 PUNTOS

Es la circunferencia que pasa por seis puntos notables en un triángulo: los tres vértices y los tres puntos de intersección de la mediatriz de cada lado con la bisectriz que pasa por el vértice opuesto.

Las principales propiedades de esta circunferencia son:

- Su nombre se debe a que pasa por esos seis puntos notables ya indicados del triángulo, aunque obviamente, por propia definición, esta circunferencia no es más que la propia circunferencia circunscrita del triángulo

4.2 LA CIRCUNFERENCIA DE 9 PUNTOS

Esta circunferencia notable en un triángulo es la circunferencia que pasa por los siguientes nueve puntos notables de un triángulo: los tres pies de las alturas del triángulo, los tres puntos medios de sus lados y los tres puntos medios de los segmentos de altura comprendidos entre cada vértice y el ortocentro. Su nombre deriva del hecho que la circunferencia pasa por nueve puntos notables, seis de ellos sobre el mismo triángulo (salvo que el triángulo sea obtusángulo).

Esta circunferencia fue denominada con ese nombre por Poncelet, si bien algunos geómetras franceses la llaman *circunferencia de Euler* y los geómetras alemanes la denominan *circunferencia de Feuerbach*.

Las principales propiedades de esta circunferencia (véase Figura 2) son:

- La circunferencia de 9 puntos de un triángulo es homotética a la circunferencia circunscrita, siendo el centro de homotecia el ortocentro del triángulo y 2 la razón de la homotecia (este concepto de *homotecia* habría que explicárselo a los alumnos).
- El centro de la circunferencia de 9 puntos se halla sobre la recta de Euler del triángulo.
- La circunferencia de 9 puntos es tangente exterior a los círculos exinscritos al triángulo y la circunferencia inscrita al triángulo es tangente interior a la circunferencia de 9 puntos.

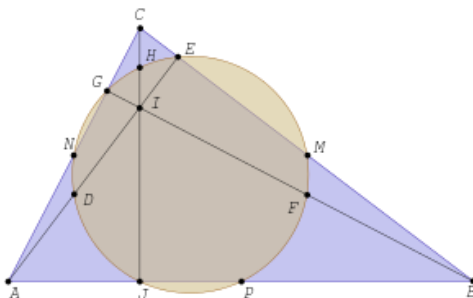


Figura 2. La circunferencia de 9 puntos

4.3 LA CIRCUNFERENCIA DE TUCKER

La circunferencia de Tucker es la circunferencia que pasa por 6 puntos de un triángulo, siendo uno de ellos un punto cualquiera de un lado del triángulo y los restantes los puntos obtenidos al trazar a partir de él, sucesiva y alternadamente, segmentos paralelos y antiparalelos a los lados.

Esta circunferencia, que por cierto generaliza a la siguiente de Taylor, generaliza también a la circunferencia del coseno y a la de Lemoine, pudiéndose ver esta última como una familia de círculos obtenidos por desplazamientos paralelos de los lados del coseno correspondiente o del hexágono de Lemoine (web1).

4.4 LA CIRCUNFERENCIA DE TAYLOR

La circunferencia de Taylor es la circunferencia que pasa por los pies de las perpendiculares trazadas desde los pies de las alturas a los lados del triángulo.

Una propiedad principal de esta circunferencia es que es una circunferencia de Tucker.

5. TRIÁNGULOS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO

En un triángulo dado también se pueden considerar otros triángulos notables, relacionados con él. Entre ellos, pueden ser citados los siguientes.

5.1 LOS TRIÁNGULOS DE NAPOLEÓN: EXTERIOR E INTERIOR

El triángulo de Napoleón exterior (respectivamente, interior) de un triángulo es el triángulo cuyos vértices son los baricentros de los tres triángulos equiláteros exteriores (respectivamente, interiores) construidos sobre los lados del triángulo inicial.

Las principales propiedades de estos dos triángulos son las siguientes:

- Tanto el triángulo de Napoleón exterior de un triángulo como el interior son triángulos equiláteros.
- La diferencia entre las áreas de los triángulos de Napoleón exterior e interior de un triángulo dado es igual al área de dicho triángulo.

Bibliografía

- H.S.M. Coxeter, S.L. Greitzer. Retorno a la Geometría. Serie «La tortuga de Aquiles», No.1, otoño 1993. Proyecto Euler. Traducción al español de Geometry Revisited, editado por la Mathematical Association of America.
- A.I. Fetísov. Acerca de la demostración en geometría, Editorial Mir Moscú (1980).
- web1. (2017). Recuperado 25 de marzo de 2017 de <http://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/centros-triangulo/>.