Acercándonos a la programación dinámica

Carolina Biscayart (*) y Cristina Di Pasquale (**)

Algo sobre Modelos

"La resolución de problemas reales es el mayor logro de la matemática para con la humanidad y el progreso de las civilizaciones. Cuánto más consciente se sea de ello, más placer brindará el contacto con esta ciencia. Acercar métodos innovadores y eficaces es dar herramientas para entrar en la investigación y ser artífices de logros en beneficio de otros y/o del saber universal"

Un modelo matemático es una representación de una situación real en términos matemáticos (formalismo simbólico) con el objeto de obtener resultados más completos y mayores conclusiones desde la matemática o desde la ciencia a la cual pertenece el problema en estudio.

El modelo consiste en una estructura lógica matemática que establece las relaciones entre los parámetros que afectan la situación.

Esta tarea incluye necesariamente

♦ Un buen análisis del problema a tratar: observación cuidadosa y detallada, análisis de los datos disponibles o planificación de la toma de datos, formulación de los objetivos que se desean alcanzar.

♦ La confección del modelo propiamente dicho que intente abstraer lo mejor posible la esencia del problema real. Es decir que tenga la mayor precisión posible, para que las conclusiones matemáticas tengan validez dentro de la situación real.

♦ Por último, es preciso una serie de pruebas de simulación y confrontación para corroborar las hipótesis planteadas inicialmente que permitan perfeccionar el modelo y determinar su validez.

Para este tipo de trabajo, fundamentalmente en el último de los ítems anteriores, con frecuencia es necesario realizar numerosísimos cálculos por lo que la computadora es la principal aliada, determinando si todo el planteo formal es o no adecuado. Por esta razón se debe pensar paralelamente en el objetivo, en la forma global del problema y en su algoritmo computacional.

Desarrollos de modelos matemáticos han servido de manera extraordinaria a la medicina, a la economía (actualmente las grandes empresas tienen su propio centro de investigación de operaciones), a la biología, ciencias sociales, control de energía, transporte, áreas de seguridad y defensa etc.

En general este tipo de investigaciones está destinado a hallar una mejor solución* (solución óptima) para un problema bajo consideración. Este objetivo recibe el nombre de optimización y radica en la maximización o minimización de alguna función objetivo que es fruto del modelado matemático.

El campo de acción de la matemática es muy amplio y las respuestas que puede dar en problemas de diversas áreas son muchas y de gran importancia. Una de las ramas de la matemática que ofrece amplias posibilidades en lo referido a desarrollos analíticos y brinda herramientas eficaces en muchos problemas es la Programación Dinámica.

*Se dice "una mejor solución" y no "la mejor solución" ya que es posible que exista más de una solución satisfactoria al mismo nivel.

LA PROGRAMACIÓN DINÁMICA

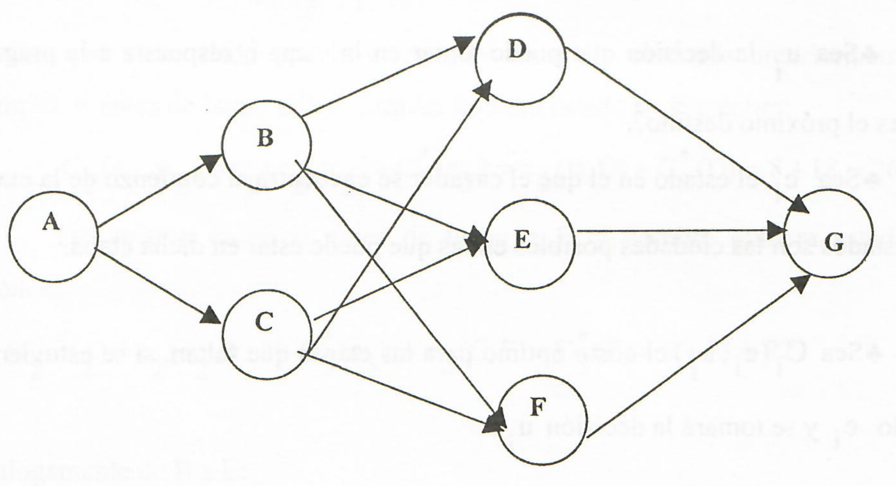
Un buen ejemplo para comenzar a acercarnos a la programación dinámica y los beneficios de su utilización viene dado por el siguiente problema:

Se trata de un cazador norteamericano que por el año 1925 decide cumplir su mayor sueño: cazar leones en África. Para esto desembarca en el Golfo de Guinea más precisamente en la ciudad de Libreville, estado de Gabón. Este hombre debe dirigirse a Katanga, Zaire, donde se unirá a la expedición que saldrá de cacería en unos pocos días. Como es de imaginarse quiere llegar a destino en perfectas condiciones y a tiempo. Para ir de Libreville (A) a Katanga (G) tenía varias posibilidades de recorrido, que por supuesto implicaban pasar por distintas ciudades intermedias. Como los riesgos en los caminos del África eran múltiples comienza a pensar en el modo de llegar a destino de la forma más segura posible. Se le ocurre entonces que las pólizas de seguro transporte de pasajeros aumentan conforme a los peligros de los caminos, llegando a la conclusión de que a ruta más segura sería aquella que tuviera un costo total menor de la póliza de seguro.

Los costos de las pólizas de seguro figuran en la siguiente tabla:

Procedencia	Destino	Costo
A	B	10
A	C	11
B	D	8
B	E	12
B	F	15
C	D	10
C	E	14
C	F	9
D	G	18
E	G	8
F	G	13

El problema gráficamente quedaría de la siguiente forma:



Podemos decir que este problema se divide en tres etapas. Cada una de ellas comienza al arribar a una ciudad determinada y allí se decide cuál será la próxima ciudad a la que se debería ir.

El cazador se dio cuenta que elegir la ruta más barata en cada etapa no lleva a la ruta más barata globalmente. Si eligiera de la primer forma diría que la ruta óptima es A→ B→D→G cuyo costo total sería $C_{AG} = 10+8+18 = 36$. Sin embargo esta ruta tendría un costo menor A→C→E→G donde $C_{AG}=11+14+8 = 33$.

La programación dinámica es un proceso de decisión secuencial que permite la optimización de un problema global. Veamos cómo funciona.

Supongamos que el cazador casi llega a destino y sólo debe tomar la última decisión, que es la única posible: dirigirse a la ciudad definitiva G. Para esto debe hallarse en el comienzo de la tercera y última etapa, donde podría encontrarse en las ciudades D, E ó F.

A partir de aquí ampliaremos el problema gradualmente, incorporando etapas, hasta abarcar el problema completo.

♣Sea u_i la decisión que puede tomar en la etapa i, respuesta a la pregunta: ¿Cuál es el próximo destino?.

♣Sea e_i el estado en el que el cazador se encuentra al comienzo de la etapa i. Estos estados son las ciudades posibles en las que puede estar en dicha etapa.

♣Sea $C_i(e_i, u_i)$ el costo óptimo para las etapas que faltan, si se estuviera en el estado e_i y se tomará la decisión u_i.

♣Sea u_i^* la decisión que minimiza $C_i(e_i, u_i)$ y sea

$$\min_{u_i} C(e_i, u_i) = C(e_i, u_i^*) = C_i^*(e_i).$$

Como el proceso de resolución comienza de atrás hacia delante, se encuentra primero $C_3^*(e_3)$, luego $C_2^*(e_2)$ y por último $C_1^*(A)$ que es el objetivo ya que sus Correspondientes u_i^* forman la sucesión de decisiones que deben ser tomadas

SOLUCIÓN

Etapa 3

e_3	$C_3^*(e_3)$	u_3^*
D	18	G
E	8	G
F	13	G

Como aquí se ve la última decisión es conocida.

Etapa 2

Para ir calculando los costos óptimos de las etapas restantes debo considerar el costo inmediato de esa etapa $c_i(e_i, u_i)$ y sumarle el costo que falta de allí hasta llegar a destino que viene dado por la etapa que sigue (la evaluada anteriormente). Por ejemplo, si antes de llegar a D el cazador hubiera estado en B entones:

$$C_2(e_2, u_2) = c_2(e_2, u_2) + C_3^*(e_3) = c_2(B, D) + C_3^*(D) = 8 + 18 = 26$$

Del mismo modo si antes de llegar a F el hombre hubiera estado en C entonces:

$$C_2(e_2, u_2) = c_2(e_2, u_2) + C_3^*(e_3) = c_2(C, F) + C_3^*(F) = 9 + 13 = 22$$

Análogamente de B a E:

$$C_2(e_2,u_2)=c_2(e_2,u_2)+C_3^*(e_3)=c_2(B,E)+C_3^*(E)=12+8=20$$

La tabla completa para la segunda etapa sería:

u_2 \ e_2	D	E	F	$C_2^*(e_2)$	u_2^*
B	26	20	28	20	E
C	28	22	22	22	E ó F

Etapa 1

u_1 \ e_1	B	C	$C_1^*(A)$	u_1^*
A	30	33	30	B

$$C_1(e_1,u_1)=c_1(e_1,u_1)+C_2^*(e_2)=c_1(A,B)+C_2^*(B)=10+20=30$$

$$C_1(e_1,u_1)=c_1(e_1,u_1)+C_2^*(e_2)=c_1(A,C)+C_2^*(C)=11+22=33$$

Notemos que

$$C_1^*(e_1)=C_1^*(A)=\min_{u_1}\left\{c_1(e_1,u_1)+C_2^*(e_2)\right\}=c_1(A,B)+C_2^*(B)=30$$

Volviendo para atrás relacionando las decisiones óptimas, la ruta más segura es A→B→E→G.

A pesar de que hemos obtenido una sola ruta óptima, en otros casos es posible obtener más de una solución que implique el mismo costo óptimo. Cualquiera sea la sucesión de soluciones que lo consiga será "una mejor solución".

Vale destacar que la función $C_i(e_i,u_i)$ depende implícitamente de todos los estados y de todas las decisiones en el resto de las etapas (no en las anteriores), ya que para cada paso es necesaria la salida (output) del paso siguiente. En otras palabras el método de resolución está dado por la relación recursiva:

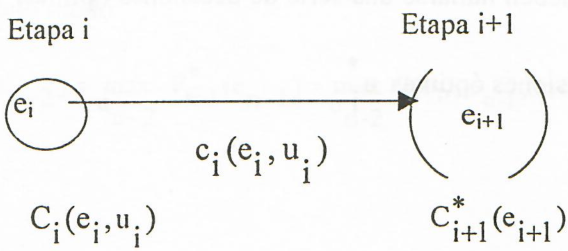
$$(1) \qquad C_i^*(e_i) = \min_{u_i}\left\{c_i(e_i, u_i) + C_{i+1}^*(e_{i+1})\right\}$$

que puede deducirse de la formulación general que se plantea en la siguiente sección.

Elementos de la programación dinámica:

Los problemas de programación dinámica deben poseer la característica de poder dividirse en **etapas**, éstas permiten un ordenamiento de la situación. Al comienzo de cada etapa la descripción del sistema puede estar dada por cualquiera de los **estados** posibles en el inicio de la misma. En cada etapa se toma una **decisión** que transforma el estado actual en otro estado asociado al inicio de la etapa siguiente. Cada decisión inmediata óptima sólo depende del estado en que se encuentra el sistema antes de tomarla. El mecanismo de solución apunta a encontrar una **política de decisión** para todo el problema. Es decir que lo que permite la programación dinámica es hallar una serie óptima de decisiones secuenciales. Es necesario conocer la última decisión y de ahí, ir ampliando el problema hacia atrás. La relación recursiva (1) que constituye la **ecuación funcional** de la programación dinámica, permite hallar la política óptima en la etapa i compuesta por la política óptima en la etapa i+1. y por la contribución inmediata $(c_i(e_i, u_i))$ de la toma de una determinada decisión.

Esta contribución es conocida con anterioridad, por ejemplo en el problema anterior está dada en la tabla correspondiente al costo de pólizas de seguro.



En cada problema particular debe analizarse si esa relación recursiva es aditiva o multiplicativa y cómo es la transformación de los estados a través de las decisiones. Es decir, no hay "recetas" para el uso de la programación dinámica. Ésta plantea un camino abierto, siempre y cuando las características del problema respondan o puedan adecuarse a una estructura como la antes descripta.

Si queremos abstraer los conceptos fundamentales de la teoría de la Programación Dinámica, seguimos el siguiente desarrollo.

Se tiene una ecuación funcional

$$G(e_n, e_{n-1}, \dots, e_{r+1}, e_r, u_n, u_{n-1}, \dots, u_{r+1}, u_r)$$

que depende de una serie de estados (e_i) y de una serie de decisiones tomadas una por cada etapa i (de las n-r etapas) dependiente del estado en el que se encuentra G al comienzo de la misma.

Lo que se busca es obtener:

$$\underset{u_n, u_{n-1}, \dots, u_{r+1}, u_r}{\text{Max}} G(e_n, e_{n-1}, \dots, e_{r+1}, e_r, u_n, u_{n-1}, \dots, u_{r+1}, u_r)$$

o en su defecto

$$\underset{u_n, u_{n-1}, \dots, u_{r+1}, u_r}{\text{Min}} G(e_n, e_{n-1}, \dots, e_{r+1}, e_r, u_n, u_{n-1}, \dots, u_{r+1}, u_r)$$

para la solución del problema deben hallarse una serie de decisiones óptimas u_i que nos lleven a tal fin, a saber decisiones óptimas u_i^*.

Desarrollaremos la ecuación funcional en las distintas etapas, suponiendo que se desea obtener el máximo. Si el problema involucra mínimos el resultado es análogo.

Para que comience el proceso de la programación dinámica se debe conocer la decisión que maximiza la ecuación funcional G en la última etapa n.

Sea $F_i^*(e_i)$ la ecuación funcional optimizada desde la etapa i hasta la etapa n. En símbolos:

$$F_i^*(e_i) = \underset{u_i}{\mathrm{Max}}\, G(e_n, e_{n-1}, \ldots, e_{r+1}, e_r, u_n^*, u_{n+1}^*, \ldots, u_{i+1}^*, u_i, \ldots, u_{r+1}, u_r)$$

la decisión u_i^* se obtiene a partir de la contribución inmediata $f_i(e_i, u_i)$ teniendo en cuenta que de allí en adelante las decisiones son óptimas. La función $f_i(e_i, u_i)$ no es otra cosa que el aumento o disminución de G en la etapa i, considerando que se partió del estado e_i

Si se considera la penúltima etapa del proceso se tiene que:

$$F_{n-1}^*(e_{n-1}) = \max_{u_{n-1}} F_n^*(e_n) = \max_{u_{n-1}} G(e_n, e_{n-1}, \ldots, e_{r+1}, e_r, u_n^*, u_{n-1}, \ldots, u_{r+1}, u_r) =$$

$$= \max_{u_{n-1}} \max_{u_n} G(e_n, e_{n-1}, \ldots, e_r, u_n, u_{n-1}, \ldots, u_{r+1}, u_r)$$

del mismo modo

$$F_{n-2}^*(e_{n-2}) = \max_{u_{n-2}} F_{n-1}^*(e_{n-1}) = \max_{u_{n-2}} G(e_n, e_{n-1}, \ldots, e_{r+1}, e_r, u_n^*, u_{n-1}^*, \ldots, u_{r+1}, u_r) =$$

$$= \max_{u_{n-2}} \max_{u_{n-1}} \max_{u_n} G(e_n, e_{n-1}, \ldots, e_r, u_n, u_{n-1}, \ldots, u_{r+1}, u_r)$$

.

.

.

$$F_r^*(e_r) = \max_{u_r} F_{r+1}^*(e_{r+1}) = \max_{u_r} G(e_n, e_{n-1}, \ldots, e_{r+1}, e_r, u_n^*, u_{n-1}^*, \ldots, u_{r+1}^*, u_r) =$$

$$= \max_{u_r} \max_{u_{r+1}} \ldots\ldots \max_{u_{n-1}} \max_{u_n} G(e_n, e_{n-1}, \ldots, e_r, u_n, u_{n-1}, \ldots, u_{r+1}, u_r)$$

indicando esta última la ecuación funcional óptima desde la etapa r hasta la etapa n.

Dentro de las optimizaciones de las ecuaciones funcionales es posible que ocurran dos cosas, una es que la contribución inmediata $f_i(e_i, u_i)$ se sume al proceso cada vez, y la otra es que ésta se multiplique en cada etapa. De aquí provienen las posibles relaciones recursivas expresadas en una etapa i cualquiera del proceso:

♦ Aditiva :

$$F_i^*(e_i) = \max_{u_i}\left\{f_i(e_i, u_i) + F_{i+1}^*(e_{i+1})\right\} = \max_{u_i}\left\{f_i(e_i, u_i) + \max_{u_{i+1}} F_{i+2}^*(e_{i+2})\right\} =$$

$$\max_{u_i}\left\{f_i(e_i, u_i) + \max_{u_{i+1}} G(e_n, \ldots, e_1, u_n^*, u_{n-1}^*, \ldots, u_{i+2}^*, u_{i+1}, u_i, \ldots, u_r)\right\}$$

Si el problema involucra mínimos el desarrollo es análogo, resultando en este caso

$$F_i^*(e_i) = \min_{u_i}\left\{f_i(e_i, u_i) + F_{i+1}^*(e_{i+1})\right\} = \min_{u_i}\left\{f_i(e_i, u_i) + \min_{u_{i+1}} F_{i+2}^*(e_{i+2})\right\}$$

Esta es la estructura resultante del primer ejemplo, donde $f_i = c_i$ y $F_i^* = C_i^*$.

♦ Multiplicativa:

$$F_i^*(e_i)=\max_{u_i}\{f_i(e_i,u_i).F_{i+1}^*(e_{i+1})\}=\max_{u_i}\left\{f_i(e_i,u_i).\max_{u_{i+1}}F_{i+2}^*(e_{i+2})\right\}=$$

$$\max_{u_i}\left\{f_i(e_i,u_i).\max_{u_{i+1}}G(e_n,\ldots,e_1,u_n^*,u_{n-1}^*,\ldots,u_{i+2}^*,u_{i+1},u_i,\ldots,u_r)\right\}$$

Esta última forma se pone en evidencia en el problema que sigue, donde

$f_i(e_i,u_i)=p_i(u_i)=p(e_i,u_i),\quad F_i^*=E_i^*.$

Otro problema:

Está en estudio un tratamiento para una enfermedad de la sangre que produce una alteración en el número de leucocitos. El tratamiento consiste en agregar a los medicamentos que se están aplicando una novedosa vacuna que regularía la formación de estas células. Se sabe que la frecuencia en las dosis es decisiva para la efectividad del tratamiento. También se conoce que más de cinco dosis producen una alteración en las plaquetas en la sangre que alterarían la coagulación produciendo efectos colaterales adversos. El tratamiento según los médicos, se llevaría a cabo durante cuatro meses cada año. Lo que se quiere saber es cuál es el modo óptimo de aplicar estas dosis durante el tratamiento. En una etapa inicial se elaboró un diseño experimental que permitió evaluar los efectos que producen en los pacientes el medicamento que se administra usualmente en los centros médicos y el tratamiento que incorpora la aplicación de la nueva vacuna. Las probabilidades de eficiencia resultantes, con respecto a los números de dosis en cada mes, vienen dadas en la siguiente tabla.

nºde dosis \ mes	Enero	febrero	marzo	Abril
0	0,1	0,2	0,5	0,6
1	0,3	0,4	0,5	0,8
2	0,4	0,6	0,6	0,7
3	0,6	0,7	0,9	0,4
4	0,6	0,8	0,8	0,3
5	0,5	0,8	0,7	0,2

SOLUCIÓN

Cada decisión u_i, será el número de dosis que deben ser asignadas en la etapa i, cuando aún podían darse e_i dosis. Consecuentemente, cada estado e_i, corresponderá al mes i de tratamiento, es decir a la etapa i, con i=1, 2, 3, 4. Los estados irán cambiando de etapa en etapa de manera tal que $e_{i+1} = e_i - u_i$, ya que deben ir teniéndose en cuenta las dosis ya administradas para que el total no supere las cinco dosis. Siguiendo estas consideraciones observamos que surge la condición $e_{i+1} \geq 0$, de que el número de dosis no puede ser negativo. En este problema, la primer fila de la tabla representa la efectividad del tratamiento antes de suministrar la nueva vacuna.

Se debe maximizar la efectividad en el transcurso de los cuatro meses:

$$\underset{u_i}{\mathrm{Max}}\, p_1(u_1).p_2(u_2).p_3(u_3).p_4(u_4) = \underset{u_i}{\mathrm{Max}} \prod_{i=1}^{4} p_i(u_i)$$

La relación recursiva, ecuación funcional de la programación dinámica que en el problema anterior representaba el mínimo costo, ahora representa el máximo de la efectividad del tratamiento. Así,

$$E_i(e_i, u_i) = p_i(u_i).E^*_{i+1}(e_i - u_i) = p_i(u_i).E^*_{i+1}(e_{i+1})$$

considerando que

$$E^*_i(e_i) = \max_{u_i} E_i(e_i, u_i) = \max_{u_i}\, p_i(u_i).E^*_{i+1}(e_i - u_i) = \max_{u_i}\, p_i(u_i).E^*_{i+1}(e_{i+1})$$

donde $p_i(u_i) = p(e_i, u_i)$, representa la contribución inmediata a la efectividad global al haber tomado la decisión u_i.

Comenzando el proceso:

Etapa 4: abril

e_4	$E_4^*(e_4)$	u_4^*
0	0,6	0
1	0,8	1
2	0,7	2
3	0,4	3
4	0,3	4
5	0,2	5

La última decisión se conoce.

Etapa 3: marzo

e_3 \ u_3	0	1	2	3	4	5	$E_3^*(e_3)$	u_3^*
0	0,3	-	-	-	-	-	0,3	0
1	0,4	0,3	-	-	-	-	0,4	0
2	0,35	0,4	0,36	-	-	-	0,4	1
3	0,2	0,35	0,48	0,54	-	-	0,54	3
4	0,15	0,2	0,42	0,72	0,48	-	0,72	3
5	0,1	0,15	0,24	0,63	0,64	0,42	0,64	4

Los lugares que figuran sin valores corresponden a aquellos donde el estado en la etapa siguiente sería un número negativo, cosa que no tiene sentido en el problema.

Ejemplo:

Si se está en el estado de tener dos dosis para dar y se toma la decisión de administrar una en esta etapa, considerando que

$E_i(e_i, u_i) = p_i(u_i).E^*_{i+1}(e_i - u_i)$

se obtiene

$E^*_3(2,1) = p_3\ (1).E^*_4(2-1) = 0{,}5.0{,}8 = 0{,}4$

$E^*_3(e_3) = \max\limits_{u_3} E_3(e_3, u_3)$ representa el valor máximo por fila para cada e_3, resultado que se vuelca en la penúltima columna. La última columna da la estrategia óptima correspondiente al valor máximo.

Etapa 2: febrero

e_2 \ u_2	0	1	2	3	4	5	$E^*_2(e_2)$	u^*_2
0	0,06	-	-	-	-	-	0,06	0
1	0.08	0,12	-	-	-	-	0,12	1
2	0,08	0,16	0,18	-	-	-	**0,18**	2
3	0,108	0,16	0,24	0,21	-	-	0,24	2
4	0,144	0,216	0,24	0,28	0,24	-	0,28	3
5	0,128	0,288	0,324	0,28	0,32	0,24	0,324	2

Ejemplo:

Si se está en esta etapa en el estado de tener aún cuatro dosis para dar y se decide dar una, teniendo en cuenta que

$E_i(e_i, u_i) = p_i(u_i).E^*_{i+1}(e_i - u_i)$, resulta

$E_2(4,1) = p_2(1).E^*_3(4-1) = 0{,}4.0{,}54 = 0{,}216$

Etapa 1: enero

Como se está en el comienzo del problema el único estado posible en esta etapa es 5 ya que aún no se ha dado ninguna dosis.

e_1 \ u_1	0	1	2	3	4	5	$E_1^*(e_1)$	u_1^*
5	0,0324	0,084	0,096	0,108	0,072	0,03	0,108	3

Ejemplo:

Dado que aquí el máximo de la efectividad se obtiene al aplicar tres dosis, $E_i^*(e_i) = \max\limits_{u_i} E_i(e_i, u_i)$ da como resultado

$$E_1^*(5) = E_1(5,3) = p_1(3).E_2^*(5-3) = 0,6.0,18 = 0,108$$

Esta ecuación en forma desarrollada reconstruye el tratamiento de enero a abril con las dosis óptimas que se deben suministrar en los meses correspondientes.

$$E_1^*(5) = E_1(5,3) = p_1(3).E_2^*(5-3) = p_1(3).p_2(2).E_3^*(0) =$$

$$p_1(3).p_2(2).p_3(0).E_4^*(0) = p_1(3).p_2(2).p_3(0).p_4(0) =$$

$$= 0,6.\ 0,6.\ 0,5.\ 0,6 = 0,6.\ 0,18 = 0,108$$

La solución óptima está dada entonces por

$$u_1^* = 3$$

$$e_2 = e_1 - u_1 = 5 - 3 \Rightarrow u_2^* = 2$$

$$e_3 = 0 - 0 = 0 \qquad \Rightarrow u_3^* = 0$$

$$e_4 = 0 \qquad \Rightarrow u_4^* = 0$$

estas decisiones pueden verse resaltadas en las tablas correspondientes a cada mes.

Estos resultados indican que las dosis deben suministrarse en los dos primeros meses del tratamiento, tres en enero y dos en febrero para que la incorporación de esta droga sea lo más efectiva posible dentro del tratamiento.

Consideraciones finales:

En numerosos problemas, la optimización puede venir dada por la toma de decisiones interrelacionadas. La programación dinámica nos permite llegar a estas decisiones de una manera mucho menos costosa que la de analizar una por una todas las posibilidades de combinar esas decisiones. La clave recae en establecer la relación recursiva del problema. Cuánto mayores sean las dimensiones de éste, mayor será el ahorro computacional de usar este método. Por su estructura, la programación dinámica nos presenta un camino matemático abierto en la resolución de problemas reales.

Bibliografía:

BELLMAN, R. Dynamic Programming. Princeton University Press. 1957.

BELLMAN R.E. and DREYFUS S.E. Applied Dynamic Programming. Princeton University Press. Princeton, New Jersey. 1962.

HILLIER F., LIEBERMAN G. Introducción a la investigación de operaciones. McGraw-Hill, Inc. U.S.A. 1997.

NORMAN J.M. Elementary Dynamic Programming. Edward Arnold. London. 1975.

SACCO W, COPES W., SLOYER C., STARK R. Dynamic Programming. An elegant problem solver. Janson Publications, Inc. U.S.A. 1987

(*) (**) Departamento de Matemática, Centro Regional Universitario Bariloche

Universidad Nacional del Comahue

8400 San Carlos de Bariloche – Río Negro

e-mail: cbiscaya@crub.uncoma.edu.ar

dibor@bariloche.com.ar